

во втором случае (см. фиг. 4, б) реальная вязкость будет препятствовать сдвигу разнородных слоев относительно друг друга. Двух приведенных фактов достаточно, чтобы понять, почему в 1-й серии экспериментов работы [4] имел место разрыв контрольной проволоки в образцах, а во 2-й серии, где металлы поменяли местами, разрыва не было. Не вызывает сомнения, что для случая, когда внутренний слой более тяжелый, чем внешний, можно подобрать такие материалы слоев биметаллических пластин и реализовать такие параметры соударения, что внутренний слой все-таки сдвинется «вперед» относительно внешнего и конфигурация контрольной проволоки в образце качественно будет близка к обозначенной на фиг. 4, б цифрой  $II$  во внешнем слое и цифрой  $II'$  — во внутреннем.

Необходимо подчеркнуть, что эффект разрыва скоростей на границе соединения разнородных металлов определяется самой структурой течения, соответствующего рассматриваемому соударению пластин, а не прочностью и вязкостью металлов, как это утверждается в работе [4]. Учет реальных свойств материалов требуется лишь для понимания того факта, что такие характеристики материалов, как прочность или вязкость, могут усиливать или ослаблять результат действия этого эффекта, который в данном случае выражается в сдвиге слоев относительно друг друга и разрыве контрольной проволоки.

Таким образом, все экспериментальные результаты работы [4] полностью укладываются в рассмотренную в данной работе стационарную модель соударения двухслойных струй идеальной несжимаемой жидкости с различными значениями постоянной интеграла Бернулли в разных слоях струи и тем самым качественно подтверждают справедливость этой модели.

Поступила 15 VI 1979

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М., Наука, 1973.
2. Белоцерковский П. М. Нелинейная задача о соударении плоских струй идеальной несжимаемой жидкости с разрывом течения на границе между струями.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1970, № 5.
3. Белоцерковский П. М. Задача о столкновении двух струй, вытекающих из каналов с параллельными стенками при разных скоростях на свободных поверхностях.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1969, № 6.
4. Козин Н. С., Мали В. И., Рубцов М. В. О тангенциальном разрыве при склопывании биметаллической облицовки.— ФГВ, 1977, № 4.

УДК 532.516

### О НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНАХ НА ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛЕНКЕ ЖИДКОСТИ

А. П. Иванский

(Новосибирск)

В работе рассматриваются волны малой, но конечной амплитуды, возникающие на поверхности слоя вязкой несжимаемой жидкости, стекающей по вертикальной твердой поверхности, при малых числах Рейнольдса  $Re = U_0 h_0 / \nu$  на основе полной системы уравнений Навье — Стокса и граничных условий на стенке и свободной поверхности жидкости (учтено действие поверхностного натяжения).

Подобная задача, но для случая отсутствия поверхностного натяжения и не слишком больших углов наклона стенки, рассматривалась в [1, 2].

В работах [3, 4] используется уравнение вида

$$(1) \quad h_t + 3h_x + 6hh_x + \alpha h_{xx} + \gamma h_{xxxx} = 0,$$

учитывающее эффекты нелинейности, «отрицательной вязкости» (член  $\alpha h_{xx}$ ) и диссипации (член  $\gamma h_{xxxx}$ ) для волн на поверхности пленки жидкости.

Подобное же уравнение получено и в работе [5] для волн концентрации в химически реагирующих диффузионных средах. Там же приведено одно из аналитических решений такого уравнения в стационарном случае, а также некоторые качественные рассуждения о механизмах подкачки, диссипации и перекачки энергии по спектру, описываемых таким уравнением. В [6] проведен численный анализ эволюции возмущений для уравнения (1) при периодическом граничном условии и показано, что в процессе эволюции регулярное начальное возмущение приходит в турбулентное состояние (химическая турбулентность).

Как уже указывалось, уравнение (1) описывает нелинейность, подкачку энергии и диссипацию для волн в активных средах, но, к сожалению, не учитывает влияния дисперсии. В данной работе используется уравнение вида

$$h_t + 3h_x + 6hh_x + \alpha h_{xx} + \beta h_{xxx} + \gamma h_{xxxx} = 0$$

для волн на поверхности пленки жидкости при малых числах Рейнольдса. Оно является, по-видимому, простейшей формой волнового уравнения, учитывающего все перечисленные выше эффекты, включая дисперсию ( $\beta \neq 0$ ). Также сделана попытка исследования некоторых свойств его решений. Более полное исследование поведения решений следует, видимо, проводить с помощью численного анализа.

Полная система уравнений с граничными условиями, описывающая стекание пленки жидкости по вертикальной стенке (фиг. 1) в безразмерных переменных, имеет вид

$$(2) \quad u_t + uu_x + vv_y + p_x = \left( u_{xx} + \frac{u_{yy}}{\delta^2} \right) / R + \frac{Lg}{U_0^2},$$

$$\delta^2 (v_t + uv_x + vv_y) + p_y = \delta^2 \left( v_{xx} + \frac{v_{yy}}{\delta^2} \right) / Re,$$

$$u_x + v_y = 0.$$

Граничные условия:

$$(3) \quad u = v = 0|_{y=0},$$

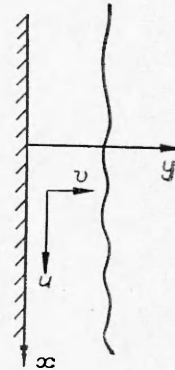
$$v = h_t + uh_x|_{y=h},$$

$$p = 2[v_y + \delta^2 h_x^2 u_x - h_x(u_y + \delta^2 v_x)] / Re (1 + \delta^2 h_x^2) - \delta^2 W h_{xx}|_{y=h},$$

$$(u_y + \delta^2 v_x)(1 - \delta^2 h_x^2) - 2\delta^2 h_x(u_x - v_y) = 0|_{y=0},$$

где  $u, v$  — вертикальная и горизонтальная компоненты безразмерной скорости;  $p$  — давление;  $x$  и  $y$  — координаты вдоль и поперек пленки, а обезразмеривание проведено следующим образом:  $x = x'/L, y = y'/h_0, u = u'/U_0, v = Lv'/h_0 U_0, p = (P' - P'_a) / \rho U_0^2, h = h'/h_0$ , где  $L$  — характерный продольный размер;  $h_0$  — невозмущенная толщина пленки;  $U_0 = gh_0^2/\nu$  — характерная скорость стекания;  $\nu$  — вязкость; введены параметры:  $\delta = h_0/L$ , характеризующий длину волны;  $Re = U_0 L/\nu$  — число Рейнольдса;  $W = \sigma/\rho h_0 U_0^2$  — число Вебера, характеризующее поверхностное натяжение;  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения;  $g$  — ускорение силы тяжести.

Для решения этой системы уравнений представим функции в виде рядов по параметру  $\epsilon \ll 1$  — величине отклонения поверхности от невозмущенного положения:



Ф и г. 1

$$(4) \quad \begin{aligned} h &= 1 + \varepsilon\eta, \\ u &= U + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2, \\ v &= \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2, \\ p &= p_\pi + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2. \end{aligned}$$

Рассмотрим случай, когда  $Re \sim 1$ ,  $\delta \ll 1$  (длинные волны). Подставив выражения (4) в (2), (3) и приравнявая члены при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получим в нулевом порядке

$$\begin{aligned} U_{yy}/Re \delta^2 + Lg/U_0^3 &= p_{xx}, \quad p_{\pi y} = 0, \\ U_y = p_\pi &= 0|_{y=1}, \quad U = 0|_{y=0}, \end{aligned}$$

откуда следует, что  $p_\pi = 0$  и  $U = y - y^2/2$ , т. е. обычный профиль Пуазейля.

Переходя к следующим двум приближениям, выберем соотношение между длиной волны и амплитудой в виде  $\delta^2 = k\varepsilon$ , где  $k$  — число порядка 1.

Это предположение означает, что скорость дисперсионного распыления волны того же порядка, что и скорость ее нелинейного укручения. При этом условии система уравнений примет вид

$$(5) \quad \begin{aligned} \varepsilon(u_{1t} + Uu_{1x} + U_y v_1 + p_{1x}) &= \varepsilon u_{1xx} + (u_{1yy} + \\ &+ \varepsilon u_{2yy})/k / Re, \\ \varepsilon p_{1y} + \varepsilon^2 p_{2y} &= k\varepsilon[\varepsilon v_{1xx} + (v_{1yy} + \varepsilon v_{2yy})/k] / Re, \\ \varepsilon(u_{1x} + v_{1y}) + \varepsilon^2(u_{2x} + v_{2y}) &= 0, \\ u_1 = u_2 = v_1 = v_2 &= 0|_{y=0}, \\ \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 &= \varepsilon\eta_t + (U + \varepsilon u_1)\varepsilon\eta_x|_{y=1+\varepsilon\eta}, \\ \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 &= 2(\varepsilon v_{1y} + \varepsilon^2 v_{2y} - \varepsilon\eta_x U_y - \varepsilon^2\eta_x u_{1y}) / Re - \\ &- k\varepsilon^2 W\eta_{xx}|_{y=1+\varepsilon\eta}, \\ \varepsilon U_{yy}\eta + \varepsilon u_{1y} + \varepsilon^2 u_{2y} + k\varepsilon^2 v_{1x} - 2k\varepsilon^3 \eta_x(u_{1x} - v_{1y}) &= 0|_{y=1+\varepsilon\eta}. \end{aligned}$$

Оставляя везде старшие члены по  $\varepsilon$ , получим следующее приближение:

$$\begin{aligned} u_{1yy} &= 0, \quad p_{1y} = v_{1yy}/Re, \\ u_{1x} + v_{1y} &= 0, \\ u_1 = v_1 &= 0|_{y=0}, \quad v_1 = \eta_t + U\eta_x|_{y=1}, \\ p_1 &= 2v_{1y}/Re - \delta^2 W\eta_{xx}|_{y=1}, \\ U_{yy}\eta + u_{1y} &= 0|_{y=1}. \end{aligned}$$

Эта система уравнений имеет решение в виде так называемых «кинematicких» волн [7]:

$$(6) \quad \begin{aligned} u_1 &= y\eta, \quad v_1 = -\eta_x y^2/2, \\ \eta &= \eta(x - t), \quad p_1 = -\eta_x(y + 1)/Re - \delta^2 W\eta_{xx}. \end{aligned}$$

В этом приближении, как видно из (6), они стационарны и их скорость  $c = g h_0^2 / \nu$ .

Для получения эволюционного уравнения формы поверхности  $\eta(x, t)$  необходимо построить следующее приближение, в котором уже следует считать

$$(7) \quad \eta = \eta(\xi, \tau),$$

где  $\xi = x - t$ ;  $\tau = \varepsilon t$ .

Подставив (7) в (5) и перенося граничные условия в точку  $y = 1$ , получим

$$\begin{aligned} (U - 1)u_{1\xi} + U_y v_1 + p_{1\xi} &= u_{1\xi\xi}/\text{Re} + u_{2yy}/\text{Re}k, \\ u_{2\xi} + v_{2y} &= 0, \quad u_2 = v_2 = 0|_{y=0}, \\ -v_{1y}\eta + v_2 &= \eta_\tau + u_1\eta_\xi|_{y=1}, \\ u_{2y} + kv_{1\xi} &= 0|_{y=1}. \end{aligned}$$

Подставляя сюда уже известные  $u_1, v_1, p_1$  и исключая неизвестные  $u_2, v_2$ , из кинематического граничного условия получим уравнение на  $\eta$

$$\eta_\tau + 2\eta\eta_\xi + (2/15)\text{Re}k\eta_{\xi\xi} + k\eta_{\xi\xi\xi} + \left(\frac{\text{Re}k\delta^2 W}{3}\right)\eta_{\xi\xi\xi\xi} = 0$$

или в размерном виде

$$h_t + 2U_0[(h-h_0)/h_0]h_\xi + (2/15)U_0\left(\frac{gh_0^4}{v^2}\right)h_{\xi\xi} + U_0h_0^2h_{\xi\xi\xi} + \left(\frac{U_0\sigma h_0}{3\rho g}\right)h_{\xi\xi\xi\xi} = 0,$$

где все величины размерны.

Это уравнение представляет собой эволюционное уравнение, описывающее нелинейные волны малой, но конечной амплитуды на поверхности вертикальной пленки жидкости. Член с  $h_{\xi\xi}$  описывает подкачку энергии в волну от стационарного основного потока, член с  $h_{\xi\xi\xi\xi}$  — действие поверхностного натяжения, а член с  $h_{\xi\xi\xi}$  — «гидродинамическую» дисперсию волн. Наличие этого члена в уравнении, как это будет видно ниже, может существенно сказываться на поведении решений (уединенные волны, например).

Для анализа запишем уравнение в виде

$$(8) \quad \varphi_t + 2\varphi\varphi_\xi + \frac{2}{15}\frac{h_0}{L}R\varphi_{\xi\xi} + \frac{h_0^2}{L^2}\varphi_{\xi\xi\xi} + \frac{\sigma h_0}{3\rho g L^3}\varphi_{\xi\xi\xi\xi} = 0,$$

где  $\varphi = (h' - h'_0)/h'_0$ ;  $t = U_0 t'/L$ ;  $R = gh_0^3/v^2$ .

Рассмотрим решения (8) в виде стационарных волн. Ищем решение в виде  $\varphi = \varphi(\xi) = \varphi(\xi - Vt)$ , тогда

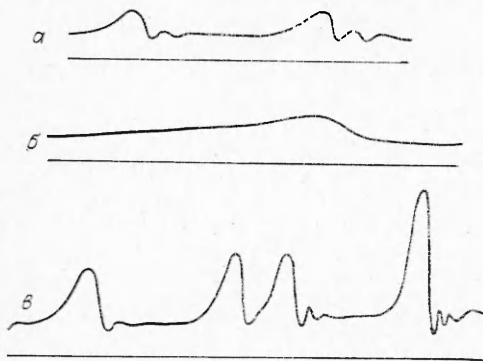
$$(9) \quad -V\varphi' + 2\varphi\varphi' + \frac{2}{15}\frac{h_0}{L}R\varphi'' + \frac{h_0^2}{L^2}\varphi''' + \frac{\sigma h_0}{3\rho g L^3}\varphi'''' = 0.$$

Введя пленочное число  $\text{Fi} = \sigma^3/\rho^3 g v^4$  и интегрируя (9) по  $\xi$  от  $-\infty$  до  $\infty$  с учетом того, что для уединенной волны типа солитона  $\varphi = \varphi' = \varphi'' = \varphi''' = \varphi'''' = 0$  при  $\xi \rightarrow \pm\infty$  и для «ступеньки»  $\varphi = 0$ ,  $\xi \rightarrow +\infty$ ,  $\varphi = V$  при  $\xi \rightarrow -\infty$ , получим

$$(10) \quad (\varphi - V)\varphi + \frac{2}{15}\left(\frac{h_0}{L}\right)R\varphi' + \left(\frac{h_0}{L}\right)^2\varphi'' + \frac{1}{3}\frac{\text{Fi}^{1/3}h_0^2}{R^{2/3}L^3}\varphi''' = 0.$$

Уравнение (10) дает возможность проанализировать некоторые характерные особенности волн, наблюдаемых при стекании пленки. На фиг. 2 изображены некоторые типичные профили толщины пленки. Видно, что для таких естественных (фиг. 2, в) волн наблюдается сильный разброс по длинам волн. Это может быть качественно объяснено с помощью уравнения (10) следующим образом. В областях малой толщины главными членами уравнения являются  $(\varphi - V)\varphi$  и  $\frac{2}{15}\frac{h_0}{L}R\varphi'$ , и оно приобретает вид

$$(\varphi - V)\varphi + \frac{2}{15}\frac{h_0}{L}R\varphi' = 0.$$



Фиг. 2

Фазовые траектории этого уравнения имеют вид фиг. 3, причем стрелка соответствует возрастанию  $\zeta = \xi - Vt$ . При приближении  $\varphi$  к точке  $\varphi = V$  производная  $\varphi' \rightarrow 0$ , причем это приближение происходит асимптотически при  $\zeta \rightarrow +\infty$ , т. е. решение в этой области имеет вид фиг. 4.

Однако в обстановке эксперимента случайное малое возмущение может привести к тому, что  $\varphi'$  обратится в нуль и фазовая точка окажется вновь в положении А. Поскольку возмущения

носят случайный характер, длина волны также будет случайной. Форма поверхности в области возвращения в точку А определяется и членами с высшими производными. В случае же возбужденных волн выделяется определенная длина волны, соответствующая частоте возбуждения.

Влияние дисперсионного члена и члена, учитывающего поверхностное натяжение, на форму уединенных волн и «ступенек» можно проанализировать, рассмотрев поведение фазовых траекторий уравнения (10) в окрестностях стационарных точек при  $\zeta \rightarrow +\infty$ .

Рассмотрим случай солитонов. Подставляя в уравнение

$$\varphi \sim e^{kz/\delta},$$

получим характеристическое уравнение

$$(11) \quad k^3 + ak^2 + bk - c = 0,$$

где  $a = 3R^{2/3}/Fi^{1/3}$ ;  $b = (6/15)R^{5/3}/Fi^{1/3}$ ;  $c = 3VR^{2/3}/Fi^{1/3}$ .

Поведение решений в окрестностях стационарных точек определяется тем, имеет ли уравнение (11) комплексные или действительные корни. Интерес представляет влияние дисперсионного члена на наличие осцилляций на концах при  $\zeta \rightarrow \pm \infty$ , так как в случае  $a = 0$ ,  $b > 0$  критерий наличия трех действительных корней [8]

$$(12) \quad A = \frac{27(3b - a^2)^3}{(2a^3 - 9ab - 27c)^2} < -6,75$$

не выполним и, следовательно, всегда имеются один действительный и два комплексно-сопряженных корня  $k_1$ ,  $k_{2,3} = \alpha \pm i\omega$ .

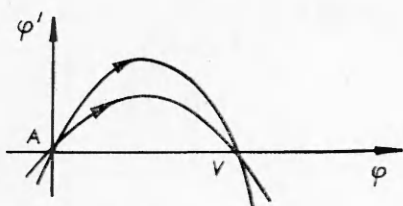
Из теоремы Виета следует

$$k_1 k_2 k_3 = k_1(\alpha^2 + \omega^2) = \frac{3VR^{2/3}}{Fi^{1/2}},$$

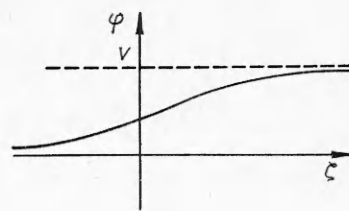
$$k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_1 k_3 = b,$$

$$k_1 + k_2 + k_3 = k_1 + 2\alpha = -a,$$

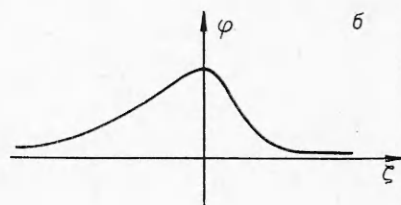
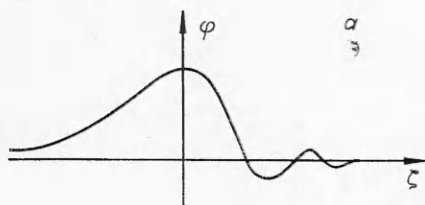
т. е. при  $V > 0$ ,  $a = 0$  получаем  $k_1 > 0$  и  $\alpha = -k_1/2 < 0$ , т. е. при  $\zeta \rightarrow +\infty$  ограниченному решению  $e^{kz/\delta}$  будет соответствовать комплексный корень, а  $\zeta \rightarrow -\infty$  — действительный. Таким образом, солитон будет иметь вид, как на фиг. 5, а, т. е. впереди всегда решение осциллирующее, а сзади — гладкое. В случае  $V < 0$  наоборот. Волны такого типа были получены численно в работе [9] и наблюдались экспериментально [10].



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Покажем теперь возможность существования солитона без осцилляций при учете члена с третьей производной. Для этого должно выполняться условие  $A < -6,75$  (наличие трех действительных корней), причем корни должны иметь разные знаки.

Это возможно, например, для случаев  $a = 0,3, b = 0,004, c = 0,003$ , что соответствует значениям  $\kappa_1 = 0,08, \kappa_2 = -0,16, \kappa_3 = -0,234, R = 0,1, Fi = 10, V = 0,01$  или  $a = 3, b = 1,25, c = 1,5$ , что соответствует значениям  $\kappa_1 = 0,5, \kappa_2 = -1,5, \kappa_3 = -2,0, R = 3,125, Fi = 10, V = 0,5$ .

Солитон при этом имеет вид, изображенный на фиг. 5, б. Для выяснения общих условий отсутствия осцилляций воспользуемся тем фактом, что, как известно из алгебры (см., например, [11]), все корни уравнения (11) лежат в левой комплексной полуплоскости тогда и только тогда, когда все его коэффициенты, т. е.  $a, b$  и  $(-c)$ , имеют одинаковые знаки и, кроме того,

$$-c - ba < 0.$$

Таким образом, при  $V > 0$  корни  $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$  либо все положительны, либо имеют разные знаки. Первая возможность не может реализоваться, так как обе точки экстремумов кубической параболы (11) всегда находятся в левой полуплоскости при  $a > 0$  и  $b > 0$ . Следовательно, солитон без осцилляций может существовать, если выполняется условие (12) и  $V > 0$ , либо при  $V < 0$

$$3(-V)R_{\text{гн}}^{2/3}/Fi^{1/3} - ba \geq 0.$$

Автор выражает благодарность В. Е. Накорякову за руководство, В. Г. Гасенко и О. Ю. Цвелодубу за ценные замечания и советы.

Поступила 26 IV 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Johnson R. S. Shallow water waves on a viscous fluid. The undular bore.— Phys. Fluids, 1972, vol. 15, N 10.
2. Иванюв Ю. П. Катящиеся волны в наклонном канале.— ЖВММФ, 1961, т. 1, № 6.

3. Непомнящий А. А. Устойчивость волновых режимов в пленке, стекающей по наклонной плоскости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1974, № 3.
4. Маурин Л. Н., Одишария Г. Э., Точигин А. А. Уединенная волна на стекающей жидкой пленке.— В кн.: Нелинейные волновые процессы в двухфазных средах. Под ред. С. С. Кутателадзе. Новосибирск, изд. Ин-та теплофизики СО АН СССР, 1977.
5. Kuramoto Y., Tsuzuki T. Persistent propagation of concentration waves in dissipative media far from thermal equilibrium.— Progress of Theoretical Physics, 1976, vol. 55, N 2.
6. Yamada T., Kuramoto Y. A reduced model showing chemical turbulence.— Progress of Theoretical Physics, 1976, vol. 56, N 2.
7. Уизэм Дж. Линейные и нелинейные волны. М., Мир, 1977.
8. Шумягский Б. М. Таблицы для решения кубических уравнений. М., Гостехиздат, 1950.
9. Цвелодуб О. Ю. Стационарные плоские волны на стекающей пленке жидкости.— В кн.: Теплофизические исследования. Новосибирск, изд. Ин-та теплофизики СО АН СССР, 1977.
10. Покусаев Б. Г., Алексеенко С. В. Двумерные волны на вертикальной пленке жидкости.— В кн.: Нелинейные волновые процессы в двухфазных средах. Новосибирск, изд. Ин-та теплофизики СО АН СССР, 1977.
11. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., Наука, 1973.

УДК 532.517+532.574.7

### О ЗАРОЖДЕНИИ ВИХРЕЙ ТЕЙЛОРА В ТЕЧЕНИИ КУЭТТА

*Ю. Г. Василенко, Е. А. Кузнецов, В. С. Львов,  
Ю. Е. Нестерихин, В. С. Соболев, М. Д. Спектор,  
С. А. Тимохин, Е. Н. Уткин, Н. Ф. Шмойлов*  
(Новосибирск)

В последнее время изучение механизмов зарождения гидродинамической турбулентности является предметом многочисленных исследований (см. [1] и обзоры [2, 3]). Однако до сих пор не найдены ответы на ряд вопросов, касающихся процессов перехода от ламинарного состояния к турбулентному. Следует отметить, что неустойчивость ламинарного течения не приводит сразу к турбулентности — могут возникнуть другие формы равновесного движения, представляющего собой суперпозицию первичного течения и возмущений конечной амплитуды. Таким примером может служить течение между соосными цилиндрами — течение Куэтта, которое изучалось на протяжении многих лет как теоретически, так и экспериментально [4—6]. Известно, что при увеличении скорости вращения внутреннего цилиндра течение Куэтта теряет устойчивость, что приводит к появлению вихрей Тейлора. Подробному исследованию этого перехода посвящена данная работа. В ней изложены как теоретические, так и экспериментальные результаты.

В ходе экспериментов было установлено, что переход к вихрям Тейлора осуществляется мягким образом — амплитуда вихрей с ростом надкритичности изменяется по закону Ландау [1]. При малой надкритичности исследованы также переходы между состояниями с различным числом вихрей, определена граница их устойчивости. В теоретической части работы в рамках уравнения для огибающих, описывающего слабую пространственную модуляцию вихрей Тейлора, исследована устойчивость стационарных решений.

1. Как известно [6], потеря устойчивости ламинарного течения Куэтта, скорость которого при вращении внутреннего цилиндра  $V_\Phi = \frac{\Omega R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \times \left( \frac{R_2}{r} - r \right)$  ( $\Omega$  — частота вращения,  $R_1, R_2$  — радиусы внутреннего и внешнего цилиндров), наступает при некотором числе Рейнольдса  $Re_*$  ( $Re =$