Построив график для C_m, можем заключить, что для $0 \leqslant \delta \leqslant 1.5$ момент полого цилиндра в $\pi/2$ раз больше момента пластинки, площадь которой равна площади цилиндра в плане.

В заключение отметим, что при сравнении характеристик кольцевого и плоского крыла не учитывалось влияние конечности размаха плоского крыла. Если такой учет делать, то коэффициенты C_y и C_m кольцевого крыла будут превосходить соответствующие коэффициенты плоского крыла еще больше.

Поступила
24 I 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. W a r d G. N. The approximate external and internal flow past a quasi — cilindrical tube moving at supersonic speeds. The Quaterly journal of Mechanics and Applied Mathematics, 1948, vol. 1, part 2.
2. H a a k W. Charakteristikenverfaren zur näherungsweisen Berechnung der unsymmetrischen Überschallströmung um ringförmige Körper. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, 1951, v. 2, No 5.
3. У т к и н А. И. Теоретическое определение аэродинамических характеристик кольцевого крыла при сверхзвуковых скоростях. ОНТИ, 1957.
4. Б о б р о в Г. Е. К теории кольцевого крыла в сверхвуковом потоке. Изв. вузов, серия авиационная техника, 1959, № 3.

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА О НАГНЕТАНИИ ГАЗА В ВОДОНОСНЫЙ ПЛАСТ

М. В. Филинов (*Москва*)

Рассматриваемая ниже задача представляет интерес в связи с усилившимися исследованиями вопросов, связанных с подземным хранением газа в водоносных пластах. Кроме того, приводимое здесь точное решение может быть использовано для оценки правильности различных приближенных методов (например, метода последовательной смены стационарных состояний и др.) и для выбора наиболее удобных из них как с точки зрения точности, так и простоты конечных расчетных формул.

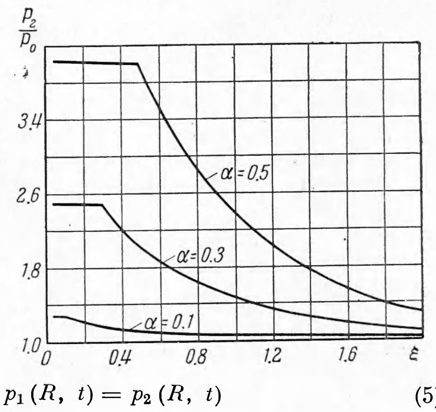
Задача о вытеснении воды газом была впервые сформулирована и решена при некоторых допущениях Л. С. Лейбензоном [1].

В дальнейшем решением задач, связанных с перемещением границы раздела газ — вода занимались многие авторы [2–6]. Для случая нагнетания газа в галерею, расположенную в полубесконечном пласте, точное решение получено в работе [7].

Рассмотрим задачу о нагнетании постоянного весового расхода G газа в скважину бесконечно малого радиуса, расположенную в бесконечном пласте, первоначально заполненном водой. Предполагается, что зона смеси отсутствует и имеется четкая граница раздела между газом и водой. Неполнота вытеснения, при сохранении предположения о четкой границе раздела, не вносит принципиальных трудностей в решение задачи и при желании может быть учтена. Требуется найти давление p_1 (в области, занятой газом) и давление p_2 (в области, занятой водой). Эти функции удовлетворяют дифференциальным уравнениям движения

$$\frac{p_1}{D}\left(\frac{\partial^2 p_1^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial p_1^2}{\partial r}\right)=\frac{\partial p_1^2}{\partial t} \qquad (0<r<R) \tag{1}$$

$$\varkappa\left(\frac{\partial^2 p_2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial p_2}{\partial r}\right)=\frac{\partial p_2}{\partial t} \qquad (R<r<\infty) \tag{2}$$



при следующих начальных и граничных условиях:

$$p_2(r,\ 0)=p_0=\mathrm{const} \tag{3}$$

$$\left(\frac{2\pi kh\gamma_0}{\mu p_0}\lim r p_1\frac{\partial p_1}{\partial r}\right)_{r\to 0}=G=\mathrm{const} \tag{4}$$

$$p_2(\infty,\ t)=p_0=\mathrm{const}, \qquad p_1(R,\ t)=p_2(R,\ t) \tag{5}$$

$$\frac{k_1}{\mu_1}\frac{\partial p_1(R,\ t)}{\partial r}=\frac{k_2}{\mu_2}\frac{\partial p_2(R,\ t)}{\partial r}, \qquad m\frac{dR}{dt}=-\frac{k_2}{\mu_2}\frac{\partial p_2(R,\ t)}{\partial r}, \qquad R(0)=0 \tag{6}$$

Здесь $m_1=m_2=m$ — пористость, $k_1=k_2=k$ — проницаемость, $\varkappa$ — пьезопроводность, μ_1, μ_2 — вязкость, p_0 — начальное давление в водоносном пласте, G — весовой расход газа на скважине.

Индексы 1 и 2 относятся соответственно к газовой и водяной зонам.

При помощи подстановки $\xi = r / \sqrt{\varkappa t}$ уравнения (1) и (2) могут быть преобразованы к обыкновенным дифференциальным уравнениям, из которых одно линейное, а другое нелинейное

$$\frac{d^2 p_1^*}{d\xi^2} = -\frac{1}{p_1^*}\left[\left(\frac{p_1^*}{\xi} + \xi\frac{\varkappa D}{2p_0}\right)\frac{dp_1^*}{d\xi} + \left(\frac{dp_1^*}{d\xi}\right)^2\right] \qquad (7)$$

$$\frac{d^2 p_2^*}{d\xi^2} + \frac{dp_2^*}{d\xi}\left(\frac{1}{\xi} + \frac{\xi}{2}\right) = 0, \qquad p^* = \frac{p_1}{p_0}, \quad p_2^* = \frac{p_2}{p_0} \qquad (8)$$

Решение уравнения (8) находится с точностью до параметра α

$$p_2^* = 1 - \frac{\alpha^2 \varkappa m \mu_2}{4k_2 p_0} \exp\frac{\alpha^2}{4}\, \mathrm{E_i}\left(-\frac{\xi^2}{4}\right) \qquad (9)$$

Здесь Ei ($^1/_4\ \xi^2$) —интегральная показательная функция. Параметр α входит в соотношение $R = \alpha\sqrt{\varkappa t}$, выполнение которого необходимо для соблюдения условий (6); таким образом, распределение давления в водяной зоне можно получить из равенства (9), задаваясь различными значениями α.

Распределение давления p_1^* в газовой области приходится определять численно из уравнения (7) при следующих условиях на подвижной границе раздела:

$$p_1^* = 1 - \frac{\alpha^2 \varkappa m \mu_2}{4k_2 p_0} \exp\frac{\alpha^2}{4}\, \mathrm{E_i}\left(-\frac{\alpha^2}{4}\right), \qquad \frac{dp^*}{d\xi} = -\frac{\alpha \varkappa m \mu_1}{2k_1 p_0} \qquad (10)$$

Равенство (4) перепишется в виде

$$q = \frac{G p^\circ \mu_1}{2\pi k h p_0^2 \gamma^\circ} = -\left(\xi p_1^* \frac{dp_1^*}{d\xi}\right)_{\xi\to 0} = \mathrm{const} \qquad (11)$$

Критерием правильности численного решения дифференциального уравнения будет соблюдение условия $G = \mathrm{const}$ при $r \to 0$.

Численное решение указанного уравнения методом Рунге — Кутта на счетной машине Урал-1 было произведено В. Томельгасом, которому автор, пользуясь случаем, выражает большую признательность.

На фигуре приводятся результаты вычислений для значений $\alpha = 0.1,\ 0.3,\ 0.5$ (соответственно кривые *1*, *2*, *3*). Здесь $m = 0.2$, $\mu_2 = 1$ *спз*, $\mu_1 = 0.01$; $h = 10$ *м*, $p_0 = 100$ *ат*, $\varkappa = 10^4$ *см²/сек*.

Результаты вычислений показывают, что, как и следовало ожидать, давление в газовой зоне остается практически постоянным. Кроме того, оказалось, что расход газа $G(\xi)$ также остается практически постоянным, что видно из приводимых ниже результатов вычислений.

$\alpha = 0.1$	ξ	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
	$10^7 q$	12 715	12 720	12 720	12 720	12 720	12 720
$\alpha = 0.3$	ξ	0.3	10^{-1}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
	$10^6 q$	22 418	22 454	22 458	22 458	22 458	22 458
$\alpha = 0.5$	ξ	0.5	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
	$10^6 q$	100 077	100 377	100 389	100 389	100 389	100 389

Полученные результаты качественно хорошо согласуются с результатом опытно-промышленной закачки воздуха в водоносный пласт. Автор приносит благодарность И. А. Чарному за ценные советы, которые способствовали выполнению данной работы.

Поступила
22 IV 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Лейбензон Л. С. Нефтепромысловая механика. Ч. II. Горгеонефтеиздат, 1934.
2. Чарный И. А. Основы подземной гидравлики. Гостоптехиздат, 1956.
3. Мирзаджанзаде А. Х., Мустафаев В. В. О вытеснении газа водой в пористой среде. ДАН АзербССР, 1958, № 1.
4. Баренблатт Г. И. О приближенном решении задач одномерной нестационарной фильтрации в пористой среде. ПММ, 1954, т. XVIII, вып. 3.
5. Щелкачев В. Н., Лапук Б. Б. Подземная гидравлика. Гостоптехиздат, 1949.
6. Веригин Н. Н. Нагнетание вяжущих растворов в горные породы в целях повышения прочности и водонепроницаемости оснований гидротехнических сооружений. Изв. АН СССР, ОТН, 1952, № 5.
7. Филинов М. В. О нагнетании газа в водоносный пласт. Изв. АН СССР, ОТН Механика и машиностроение, 1960, № 4.