

ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ РЕЛЯТИВИСТСКИХ МНОГОРЕЗОНАТОРНЫХ СИСТЕМ

И. А. Сандер, В. М. Свешников, Н. Г. Хавин

(Новосибирск)

При расчете различных электрофизических приборов, в которых используются релятивистские электронные пучки (РЭП), возникает задача исследования движения пучка заряженных частиц во внешнем электромагнитном поле с учетом собственных (потенциальных и вихревых) полей пучка. Примером такого прибора может служить мощный многорезонаторный клистрон, в котором существенным является взаимодействие РЭП с полем излучения в резонаторах. Численное моделирование рассматриваемых процессов основывается на решении полной системы уравнений Максвелла.

В настоящей работе приводится описание численных алгоритмов и их программной реализации в рамках пакета прикладных программ (ППП) ЭРАНС [1] для расчета на ЭВМ релятивистского потока заряженных частиц, движущегося в протяженных многорезонаторных системах. Задача расчета таких систем разбивается на следующие подзадачи: 1) расчет входного резонатора, в который поступает несгруппированный поток заряженных частиц (колебания в резонаторе возбуждаются и поддерживаются за счет энергии, поступающей от внешнего источника, например, через петлю связи); 2) расчет потока в пролетных трубах; 3) расчет потока в промежуточных и выходных резонаторах; 4) стыковка решений первых трех задач.

Исходная задача предполагается осесимметричной, рассматриваемой в цилиндрических координатах r, z, θ , причем пучок движется преимущественно вдоль оси симметрии (оси z).

При выборе численных алгоритмов особое внимание уделялось их экономичности. В процессе проведения расчетов различных участков системы учитывается влияние на поток заряженных частиц наиболее существенных на данном участке факторов. При расчетах в резонаторах производится учет вихревых электромагнитных полей \mathbf{E}^B, \mathbf{H} , у которых отличны от нуля компоненты E_r^B, E_z^B, H_θ (так называемые E -поля). Расчет в пролетных трубах проводится с учетом азимутальной составляющей собственного магнитного поля потока. На протяжении всей системы на пучок влияют внешние электрические и магнитные поля, а также потенциальные поля потока. При вычислении вихревых полей берутся пять первых гармоник вихревого векторного потенциала (см. ниже).

Приведенные алгоритмы позволяют проследить переходные процессы в отдельных участках системы, но в настоящей работе нас будут интересовать в основном установившиеся периодические процессы. Рассмотренный подход иллюстрируется примером решения практической задачи.

Остановимся отдельно на алгоритмах решения подзадач, проводя рассмотрение в порядке, удобном для их изложения. Задача расчета потока заряженных частиц в резонаторе математически сводится к решению полной системы уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} (1) \quad & \operatorname{div} \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0; \\ (2) \quad & \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu_0 \partial \mathbf{H} / \partial t; \\ (3) \quad & \operatorname{div} \mathbf{H} = 0; \\ (4) \quad & \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t, \end{aligned}$$

где \mathbf{E} — напряженность электрического поля; \mathbf{H} — напряженность магнитного поля; ρ — плотность пространственного заряда; \mathbf{j} — плотность тока; ϵ_0 — электрическая постоянная; μ_0 — магнитная постоянная ($\epsilon_0 \mu_0 = c^{-2}$, c — скорость света); t — время.

К (1)–(4) следует добавить еще уравнение движения заряженных частиц с зарядом e

$$(5) \quad d\mathbf{p}/dt = e(\mathbf{E} + \mu_0[\mathbf{v}\mathbf{H}]).$$

Здесь $\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$ — импульс частицы; m — ее масса покоя; \mathbf{v} — скорость; $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ — релятивистский фактор; $v = |\mathbf{v}|$.

Решение системы (1)–(4) сводится [2] к определению вихревых \mathbf{E}^B , \mathbf{H} и потенциальных \mathbf{E}^P полей: $\mathbf{E} = \mathbf{E}^B + \mathbf{E}^P$, $\text{div } \mathbf{E}^B = 0$, $\text{rot } \mathbf{E}^P = 0$. Вихревые поля рассчитываются по формулам

$$(6) \quad \mathbf{E}^B = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{dq_k(t)}{dt} \mathbf{A}_k^B(\mathbf{r}), \quad \mathbf{H} = \frac{1}{i\omega_k} \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \text{rot } \mathbf{A}_k^B(\mathbf{r}),$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор точки наблюдения; $\mathbf{A}_k^B(\mathbf{r})$ — вихревой векторный потенциал такой, что

$$(7) \quad \Delta \mathbf{A}_k^B + \eta_k \mathbf{A}_k^B = 0, \quad (\mathbf{A}_k^B)_{tg} |_{\Gamma} = 0$$

(Δ — оператор Лапласа, η_k — собственные числа, Γ — граница расчетной области, $(\mathbf{A}_k^B)_{tg}$ — тангенциальная составляющая вектора), а коэффициенты $q_k(t)$ определяются из решения уравнения

$$(8) \quad \frac{d^2 q_k}{dt^2} + \frac{\omega_k}{Q_k} \frac{dq_k}{dt} + \omega_k^2 q_k = \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{A}_k^B(\mathbf{r}) dV,$$

в котором Q_k — нагруженная добротность резонатора на частоте $\omega_k = c \sqrt{\eta_k}$.

Потенциальные поля находятся из решения уравнения Пуассона

$$(9) \quad \Delta \varphi = -\rho/\epsilon_0, \quad \varphi |_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} |_{\Gamma_2} = 0.$$

Здесь φ таково, что $\mathbf{E}^P = -\text{grad } \varphi$; $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$.

Численные алгоритмы решения данной задачи аналогичны алгоритмам, рассмотренным в [1], и включают в себя следующие основные этапы: решение задач на собственные значения (7); расчет вихревых и потенциальных полей; интегрирование уравнений движения; вычисление плотности тока и пространственного заряда.

Нестационарный процесс в резонаторе представляется следующим образом. Исследуемый промежуток времени $[T_H, T_R]$ разбивается на N_T временных шагов $\Delta T_i = T_i - T_{i-1}$ ($i = 1, 2, \dots, N_T$, $T_H = T_0 < T_1 < \dots < T_{N_T} = T_R$). Рассчитываются и запоминаются в архиве ППП ЭРАНС собственные функции вихревого векторного потенциала. В электрическом и магнитном полях, определенных на момент времени $t = T_H$, интегрируются уравнения движения до $t = T_1$. Рассчитываются распределения пространственного заряда и плотности тока. Используя полученные распределения, пересчитываем вихревые и потенциальные поля на момент времени $t = T_1$, которые, как и на первом шаге, предполагаются не зависящими от времени в течение всего промежутка ΔT_2 . Поток заряженных частиц продвигается до момента T_2 . Таким же образом процесс продолжается до момента $t = T_R$.

Расчет собственных функций вихревого векторного потенциала осуществляется при помощи ППП ЭДИП [3]. Поток заряженных частиц моделируется методом «больших» частиц. Интегрирование уравнений движения на промежутке $[T_{i-1}, T_i]$ проводится численно с шагом $\tau^i \leq \Delta T_i$ по схеме, приведенной в [1]. Расчет вихревых полей осуществляется по формулам (6), в которых берется не более пяти первых членов ряда.

В уравнении (8) правая часть вычисляется с использованием значений подынтегральной функции в узлах разностной сетки [1]. Решение (8) при $t \in [T_{i-1}, T_i]$ осуществляется по схеме

$$x_k^i = x_k^{i-1} + \left(F_k^i - \frac{\omega_k}{Q_k} \frac{x_k^i + x_k^{i-1}}{2} - \omega_k^2 \frac{q_k^i + q_k^{i-1}}{2} \right) \Delta T_i,$$

$$q_k^i = q_k^{i-1} + \frac{x_k^i + x_k^{i-1}}{2} \Delta T_i,$$

где F_k^i — значение правой части (8); $x_k^i = \left(\frac{dr_k}{dt}\right)^i$. Для определения потенциальных полей (задача (9)) применяются разностные алгоритмы на прямоугольной неравномерной сетке, причем система разностных уравнений решается итерационными методами [4].

Расчет входного резонатора имеет следующие особенности. Колебания в нем возбуждаются и поддерживаются за счет тока $I(t) = I_0 \cos \omega t$ ($I_0 = \text{const}$, ω — частота), проходящего через петлю связи, которая аппроксимируется прямоугольником Π : $z_{\Pi}^{\Gamma} \leq z \leq z_{\Pi}^{\Pi}$, $r_{\Pi}^{\Gamma} \leq r \leq r_{\Pi}^{\Pi}$. Амплитуды $q_k(t)$ вынужденных колебаний в резонаторе находятся из уравнения

$$(8) \text{ с правой частью } \mu_0 I(t) s_{\Pi} \left(s_{\Pi} = \int_{z_{\Pi}^{\Gamma}}^{z_{\Pi}^{\Pi}} \int_{r_{\Pi}^{\Gamma}}^{r_{\Pi}^{\Pi}} H_{\theta k} dr dz, \quad H_{\theta k} - \theta\text{-я компонента} \right.$$

магнитного поля, возбуждаемого в резонаторе). Интегрирование здесь выполняется численно по формулам второго порядка точности. В данном случае при $\omega = \omega_k$ уравнение (8) имеет единственное периодическое решение $q(t) = \mu_0 I_0 Q_k \omega_k^{-2} s_{\Pi} \sin \omega t$.

Кроме рассмотренных вынужденных E -колебаний, на поток заряженных частиц во входном резонаторе действуют собственное электрическое и магнитное поля, а также внешние поля. Учет влияния собственного магнитного поля в предположении слабой группировки потока проводится путем пересчета r -й компоненты потенциального электрического поля E_r^{Π} [5]: $E_{r\Pi}^{\Pi} = E_r^{\Pi} / \gamma^2$ ($E_{r\Pi}^{\Pi}$ — «новое» значение поля). В остальном для расчета входного резонатора применяются алгоритмы, аналогичные алгоритмам расчета промежуточного резонатора.

Расчет потока заряженных частиц в пролетных трубах осуществляется в предположении, что поля излучения в них малы. При этом учитывается влияние пространственного заряда и собственного магнитного поля пучка, а также внешних полей. Расчет потенциальных электрических полей в пролетных трубах проводится разностными методами. В целях сокращения времени счета для данного случая разностная сетка выбирается равномерной и система разностных уравнений, построенных на ней, решается одним из прямых методов: методом циклической редукции. В настоящей работе реализована одна из модификаций этого метода, позволяющая вычислять значения потенциала с произвольным (а не только равным $2^k + 1$, где k — целое) числом узлов разностной сетки по каждому из координатных направлений [6].

Мы учитываем влияние на поток заряженных частиц, который движется в трубе, азимутальной составляющей собственного магнитного поля, вычисляемой [7] как $H_{\theta} = I / 2\pi R$. Здесь I — ток проводимости в сечении S радиуса R (ток смещения $I_c = \epsilon_0 \int_S \frac{\partial E}{\partial t} dS$ считаем малым в силу пред-

положений о полях в трубе). При слабой группировке потока применяются алгоритмы учета собственного магнитного поля, описанные выше.

Стыковка решений рассмотренных подзадач, т. е. получение решения исходной задачи, осуществляется следующим образом. Расчетная область разбивается сечениями $z = \text{const}$ на ряд подобластей, каждая из которых представляет собой либо входной резонатор, либо пролетную трубу, либо промежуточный (выходной) резонатор. На выходе из какой-либо подобласти в течение периода на каждом временном шаге в архиве ППП запоминаются координаты, скорости и заряды «больших частиц». Данная информация считывается из архива и используется в качестве начальных условий для проведения расчетов в последующей подобласти. Отметим, что стыковка проводится с «перехлестом» подобластей. Граничное условие для потенциала ϕ электрического поля в сечениях, ограничивающих рассматриваемую подобласть: $\partial\phi/\partial z|_{z=\text{const}} = 0$, оно выполняется достаточно точно в первых подобластях многорезонаторной системы. При расчете

последующих подобластей необходимо в качестве граничных условий брать значения потенциала, рассчитанные в течение периода в предыдущих подобластях.

Такой подход является аналогом одной итерации альтернирующего метода Шварца [8]. В результате численного эксперимента установлено, что на второй итерации характеристики пучка отличаются от соответствующих характеристик на первой на доли процента.

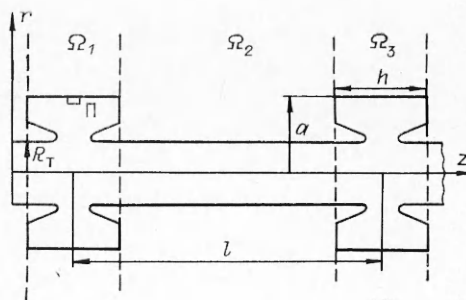
Данный факт говорит о том, что одной итерации достаточно для получения решения рассматриваемого класса задач с приемлемой точностью. При расчетах в промежуточном резонаторе для ускорения сходимости нестационарного процесса к периодическому за начальное приближение принимается решение, полученное из одномерной аналитической теории [9].

Приведенные численные алгоритмы реализованы на ЭВМ БЭСМ-6 в рамках пакета прикладных программ ЭРАНС [1], составными частями которого являются библиотеки программных модулей, архив, входные языки. Модули пакета разработаны на языках ФОРТРАН, АЛГОЛ-ГДР и автокоде МАДЛЕН и хранятся в текстовом виде и на языке загрузки в библиотеках, которые размещаются на магнитной ленте или диске. В архив пакета, расположенный на магнитных барабанах, ленте или диске, помещаются информация, необходимая для прерывания счета с последующим продолжением, стыковки подобластей, а также собственные числа и собственные функции резонаторов. На входных языках [10, 11] описываются исходные данные о задаче и информация о выводимых характеристиках, например, таких как вихревые поля и энергия излучения в зависимости от времени, картина полей на заданных временных шагах, координаты, скорости и заряды «больших частиц» и др. Вывод осуществляется на АЦПУ в виде таблиц чисел и на графопостроитель.

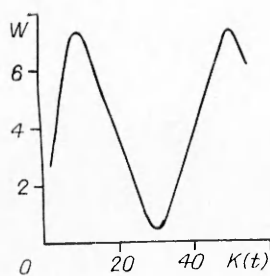
С помощью данного пакета был проведен расчет одного элемента релятивистского многорезонаторного клистрона, применяемого в СВЧ-энергетике линейных ускорителей (рис. 1). Рассмотренный элемент состоит из двух резонаторов (входного Ω_1 , промежуточного Ω_3) и пролетной трубы Ω_2 между ними. На вход первого резонатора, имеющего параметры $a = 1,3 \cdot 10^{-2}$ м, $h = 1,5 \cdot 10^{-2}$ м, поступает трубчатый пучок с равномерной плотностью тока. Пучок движется в магнитном поле, направленном вдоль оси z ($H_p = 0,12 \cdot 10^6$ А/м в первом резонаторе и $H_T = 0,24 \cdot 10^6$ А/м в других подобластях). Параметры пучка на входе в расчетную область выбирались следующими: внешний радиус $R_k = 4 \cdot 10^{-3}$ м, внутренний $R_{in} = 10^{-3}$ м, $I = 50$ А, $\gamma = 1,4$. Во входном резонаторе пучок получает начальную скоростную модуляцию. В пролетной трубе (ее радиус $R_T = 5 \times 10^{-3}$ м, длина $l = 9 \cdot 10^{-2}$ м) происходит его группировка по плотности пространственного заряда. Сгруппированный пучок возбуждает промежуточный резонатор, имеющий те же геометрические размеры, что и входной, длину волны основного вида колебания $\lambda_1 \approx 4 \cdot 10^{-2}$ м. Добротности входного и промежуточного резонаторов рассчитывались с учетом нагрузок их пучком по линейной аналитической теории для одномерного приближения [9].

Расчет проводился при следующих счетных параметрах: во входном резонаторе (те же параметры использовались для счета в промежуточном резонаторе) число узлов разностной сетки $N_y \approx 1000$, число больших частиц $N_{\text{ч}} \approx 200$; в пролетной трубе $N_y \approx 3000$, $N_{\text{ч}} \approx 1200$.

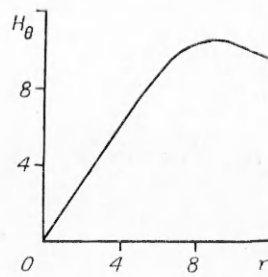
Период T_p колебаний во входном резонаторе разбивался на 40 временных шагов. Величина временного шага была постоянной во всех проведенных расчетах. На каждом шаге по времени вычислялись значения



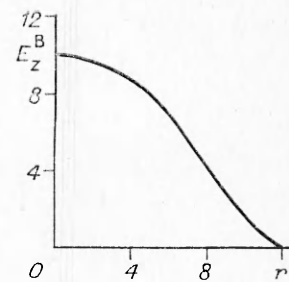
Р и с. 1



Р и с. 2



Р и с. 3



Р и с. 4

функции $\sigma(t) = \int_0^h E_z^n(0, z, t) dz$. Установление периодического решения в резонаторах контролировалось по величинам

$$\varepsilon_i^t = \frac{t_{i+1}^p - t_i^p}{t_i^t}, \quad \varepsilon_i^m = \frac{|\sigma_{i+1}^m - \sigma_i^m|}{\sigma_i^m}, \quad \text{где } t_i^p (i = 1, 2, \dots) \text{ — нули } \sigma(t),$$

а $\sigma_i^m = \max_{t_i^p < t < t_{i+1}^p} |\sigma(t)|$. В численных расчетах обоих резонаторов уменьше-

ние $\varepsilon_i^t, \varepsilon_i^m$ до долей процента происходило за 80 шагов по времени, что заняло около 0,5 ч машинного времени БЭСМ-6. Периодический процесс в пролетной трубе устанавливался за 240 временных шагов (2,5 ч машинного времени), что определялось по совпадению долей процента координат и скоростей соответствующих «больших» частиц в каком-либо сечении $z = \text{const}$ в моменты времени t и $t + T_p$.

В качестве примера характеристик, полученных из численных расчетов, на рис. 2—4 приведены характеристики электромагнитного поля в промежуточном резонаторе Ω_2 . В частности, на рис. 2 дана зависимость энергии электромагнитного поля $W = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_V (E^n)^2 dV + \frac{1}{2} \mu_0 \int_V H_0^2 dV$ от времени, на рис. 3 при фиксированном времени показана зависимость $H_0(r)$ при $z = \text{const}$ в центре резонатора, а на рис. 4 — при тех же условиях зависимость $E_z^B(r)$. На рисунках все величины указаны в безразмерном виде: $r = r(\text{м})/r_0$, $W = W(\text{Дж})/W_0$, $H_0 = H_0(\text{В/м})/H_0$, $E_z^B = E_z^B(\text{В/м})/E_0$, где $r_0 = 10^{-3}$ м, $W_0 = 10^{-3}$ Дж, $H_0 = 1,34 \cdot 10^2$ В/м, $E_0 = 10^5$ В/м. На рис. 2 K_t — номер временного шага, причем $K_t = K'_t - 100$ (K'_t — номер временного шага, отсчитываемый с момента входа частиц в Ω_3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Свешников В. М. Численный расчет нестационарных потоков заряженных частиц и его программная реализация. — Новосибирск, 1986. — (Препринт/ВЦ СО АН СССР; № 652).
2. Лонухин В. М. Возбуждение электромагнитных колебаний и волн электронными потоками. — М.: ГИТТЛ, 1953.
3. Гаврилин А. В. Автоматизация решения задач электродинамики. — Новосибирск, 1980. — (Препринт/ВЦ СО АН СССР; № 268).
4. Ильин В. П. Численные методы решения задач электрофизики. — М.: Наука, 1985.
5. Свешников В. М. Об автоматизации численного решения стационарных и нестационарных задач электронной оптики: Автореф. дис... канд. физ.-мат. наук. — Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1978.
6. Сандер С. А. Циклическая редукция без ограничений на представление числа неизвестных. — Новосибирск, 1980. — (Препринт/ВЦ СО АН СССР; № 69).
7. Свешников В. М. Расчет сильнооточных релятивистских пучков с учетом столкновительных эффектов // ПМТФ. — 1986. — № 1.
8. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. — М.: Наука, 1968.

9. Кацман. Приборы СВЧ.— М.: Высш. шк., 1983.
10. Катешов В. А., Свешников В. М. Автоматизация описания краевых задач и начальных условий в пакете прикладных программ ЭРА.— Новосибирск, 1980.— (Препринт/ВЦ СО АН СССР; № 226).
11. Гатрич В. Н., Свешников В. М. Расчет электростатических полей сложных изоляционных конструкций в пакете прикладных программ ЭРА.— Новосибирск, 1983.— (Препринт/ВЦ СО АН СССР; № 443).

Поступила 25/IX 1987 г.

УДК 533.6.011,72

РАСЧЕТ СИЛЬНЫХ ИЗЛУЧАЮЩИХ УДАРНЫХ ВОЛН, СХОДЯЩИХСЯ К ЦЕНТРУ СИММЕТРИИ

А. И. Марченко, В. В. Урбан

(Минск)

В автоматическом решении задачи о сходящейся сильной ударной волне (УВ) [1, 2], рассматриваемой как бесконечно тонкий математический разрыв в идеальном газе, асимптотическое приближение фронта к центру симметрии ($R \rightarrow 0$) дает неограниченный рост плотности энергии. В реальной среде фронт УВ имеет конечную толщину и конкретную структуру, определяемую совокупностью диссипативных физических процессов (вязкость, теплопроводность, ионизация, излучение) [3]. Это приводит к ограничению кумуляции, описываемой газодинамической моделью сплошной среды, в окрестности фокусировки, минимальный размер которой определяется газокинетическим пробегом частиц. Рассмотрение сходящихся УВ на основе решения кинетического уравнения Больцмана показало [4], что величины макропараметров (плотность, давление, температура, скорость) газа принимают всюду конечные значения. Имеется ряд работ, посвященных изучению сходящихся УВ в рамках газодинамической модели среды с учетом электронной или лучистой теплопроводности [5, 6], вязкости, теплопроводности и обмена энергией между ионами и электронами в двухтемпературной полностью ионизованной плазме [7—10], а также излучения с планковским средним коэффициентом поглощения (оптически тонкий случай) в трехтемпературном приближении [11]. Как известно [3], существует большое различие в длинах свободного пробега фотонов и частиц среды, вследствие чего полная задача асимптотически распадается на: а) задачу с УВ в идеальном газе с излучением; б) задачу с УВ без излучения с учетом электронной теплопроводности и обмена энергией в соударениях ионов и электронов и т. д. [12]. В продолжение исследований [5, 11] в настоящей работе рассматривается задача «а», когда основным процессом, определяющим структуру фронта, является перенос энергии излучением, а толщина скачка, обусловленная электронной теплопроводностью и другими диссипативными эффектами, предполагается бесконечно малой. Как показали расчеты, при схождении сильных излучающих УВ сверхкритической амплитуды основную часть пути фронты прогретной тепловой волны (ТВ) и УВ движущая по автоматическим степенным законам, аналогичным [1, 2]. Перенос энергии излучением не в состоянии ограничить кумуляцию плотности энергии газа при асимптотическом приближении фронта к центру симметрии, и конечные размеры окрестности фокусировки могут быть определены лишь при учете вязкости в скачке уплотнения. В оптически тонкой среде с сильно неравновесным излучением обнаружено расщепление фронта на две УВ, подтверждающее результаты [11]. Продольная плотность газа в момент фокусировки многократно превосходит плотность в идеальном газе [1, 2], однако остается конечной. С ростом оптической толщины газа, когда излучение становится почти равновесным, характер кумуляции видоизменяется, переходя от идеальной газовой [1, 2] (конечная плотность, бесконечная температура) к теплопроводной [5] (бесконечная плотность, конечная температура).

1. Газодинамическое течение в одностепенном приближении рассчитывалось с помощью известного лагранжева конечно-разностного метода с искусственной вязкостью [13] на нерегулярных массовых сетках с прогрессией 1,4, построенных от центральной ячейки до границы расчетной области. Перенос энергии излучением рассматривался в предположении, что рассеяние, давление и энергия излучения малы, при этом в газе имеется локальное термодинамическое равновесие. Основное содержание расчетного метода состоит в следующем. Для определения средних групповых по спектру интенсивностей $J_{k,j+1}^{\pm}$, задаваемых в узлах конечно-разностной сетки $[R_j, R_{j+1}]$, воспользуемся уравнениями, записанными для положительного (+) и отрицательного (—) направлений