

УДК 532.526.3:539.3

Параметрическое исследование гидродинамической устойчивости пограничного слоя плоской пластины над двухслойными податливыми покрытиями*

А.Э. Даржаин^{1,2}, А.В. Бойко^{3,4}, В.М. Кулик⁵, А.П. Чупахин^{1,2}

¹Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

²Новосибирский государственный университет

³Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск

⁴Тюменский государственный университет

⁵Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск

E-mails: boiko@itam.nsc.ru

В работе представлены результаты параметрического исследования гидродинамической устойчивости в линейной постановке пограничного слоя Блазиуса над двухслойными податливыми покрытиями. В расчетах используются экспериментальные данные для реальных кремнийорганических резин нескольких типов, связывающие модуль упругости и коэффициент потерь в зависимости от частоты деформации. Рассмотрено восемь пар покрытий. Проведены параметрические исследования влияния толщин слоев покрытия и скорости внешнего потока на устойчивость течения, в частности на поведение критического числа Рейнольдса. Обнаружены области немонотонности критического числа Рейнольдса, характерные для большинства рассматриваемых покрытий. Дано качественное объяснение этому эффекту. Анализ поведения критического числа Рейнольдса позволяет определить оптимальное соотношение толщин покрытий для взаимодействия с потоком.

Ключевые слова: податливые покрытия, пограничный слой, гидродинамическая неустойчивость, критическое число Рейнольдса.

Введение

В настоящее время существует большое количество работ по исследованию гидродинамической устойчивости пограничных слоев над вязкоупругими покрытиями (см., например, работы [1–4] и обзоры в них). Идея использования двухслойных покрытий, связанная с практическими приложениями, высказывалась еще несколько десятилетий назад (см., например, [3]). Известно, что существенное влияние на гидродинамическую устойчивость оказывают покрытия с относительно небольшим модулем упругости, которые при этом являются довольно мягкими, т.е. их поверхность со стороны потока

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФ № 17-11-01156; экспериментальные данные получены В.М. Куликом в рамках гранта РФФИ № 18-08-00761.

подвержена существенному риску получения дефектов. При необходимости использования такого покрытия кажется довольно естественным попробовать отделить его от жидкости другим, более жестким, но тонким покрытием. Вместе с тем, в большинстве предыдущих работ по устойчивости потоков над податливыми покрытиями до сих пор рассматривались модельные покрытия. Это связано с тем, что экспериментальные данные о вязкоупругих свойствах перспективных покрытий (в основном различных кремний-органических резин) в диапазоне частот колебаний, важных для исследования гидродинамической устойчивости, были получены лишь в последние годы [5–7].

В работе [4] были представлены результаты параметрических расчетов устойчивости пограничного слоя Блазиуса над реальными однослойными податливыми покрытиями. В работе [8] впервые рассматривалась такая же задача для одного двуслойного покрытия, причем был обнаружен эффект немонотонности критического числа Рейнольдса в зависимости от толщины примыкающего к потоку слоя. За счет варьирования толщины этого слоя оказалось возможным существенно (на величину около 20 %) увеличить критическое число Рейнольдса для потока воды при скорости 15 м/с (что сравнимо со скоростями движения быстроходных судов) по сравнению со случаем жесткой стенки, причем максимум наблюдался при толщине указанного слоя около 0,15 мм практически вне зависимости как от толщины другого слоя, так и от скорости потока в рассмотренном диапазоне — 5–15 м/с. Такое постоянство оптимальной толщины при разных скоростях потока может быть существенным для практических приложений, но требует проверки на других покрытиях. С этой целью в настоящей работе путем проведения параметрических расчетов для различных комбинаций покрытий, скоростей потока и толщин стенок проводится обобщение результатов [8].

1. Постановка задачи

Схема исследуемого течения представлена на рис. 1. Рассматривается пограничный слой Блазиуса над плоской пластиной. Пусть начало координат совпадает с положением передней кромки пограничного слоя. Данное течение описывается системой уравнений Навье–Стокса [9]:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_f} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \Delta U, \quad (1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_f} \cdot \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \Delta V, \quad (2)$$

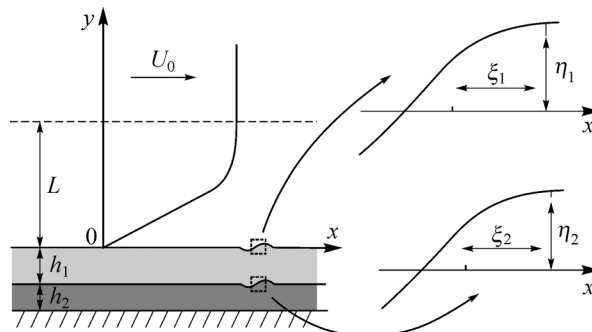


Рис. 1. Схема течения потока над двухслойным покрытием.

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

где x и y — продольная и поперечная к покрытию декартовы координаты, t — время, U, V — продольная и поперечная к покрытию компоненты скорости потока, P — давление, ρ_f — плотность жидкости, ν — кинематическая вязкость жидкости, Δ — двумерный оператор Лапласа.

Пусть поверхность стенки представляет собой двухслойное податливое покрытие конечной толщины. Предположим, что вязкоупругие свойства материала стенки описываются моделью Кельвина–Фойгта в отсутствие анизотропии, связывающей напряжения τ и деформации ε в вязкоупругой среде, следующим образом:

$$\tau(t) = E\varepsilon(t) + d \frac{d\varepsilon(t)}{dt}, \quad (4)$$

где E — вещественный модуль упругости, d — вязкость. Для гармонических возмущений $\varepsilon = \varepsilon_0 e^{-i\omega t}$, где ω — круговая частота, имеем $\tau_\omega/\varepsilon_0 = E(1 - i\mu)$, где $\mu = \omega d/E$ — коэффициент потерь, $\tau_\omega = \tau e^{i\omega t}$. В этой модели также должны быть заданы эмпирические зависимости $E(\omega)$ и $\mu(\omega)$.

Введем следующие обозначения для покрытия. Цифры 1, 2 в нижнем индексе будут указывать на номер слоя покрытия: первое покрытие будем считать верхним, контактирующим с жидкостью, второе — нижним, контактирующим с жесткой стенкой: ρ_{s1}, ρ_{s2} — плотности слоев, h_1, h_2 — толщины каждого слоя, σ_1, σ_2 — коэффициенты Пуассона, E_1, E_2 — модули упругости, μ_1, μ_2 — коэффициенты потерь; $E_1^* = E_1(1 - i\mu_1)$, $E_2^* = E_2(1 - i\mu_2)$ — комплексные модули упругости. Распространение малых возмущений в каждом слое покрытия описывается уравнениями Навье [10]:

$$\frac{\partial^2 \xi_k}{\partial t^2} = C_{Tk}^2 \left(\frac{\partial^2 \xi_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi_k}{\partial y^2} \right) + (C_{Tk}^2 - C_{Lk}^2) \left(\frac{\partial^2 \xi_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta_k}{\partial x \partial y} \right), \quad k = 1, 2, \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \eta_k}{\partial t^2} = C_{Tk}^2 \left(\frac{\partial^2 \eta_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta_k}{\partial y^2} \right) + (C_{Tk}^2 - C_{Lk}^2) \left(\frac{\partial^2 \eta_k}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi_k}{\partial x \partial y} \right), \quad k = 1, 2, \quad (6)$$

где $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$ — деформации продольной и поперечной к покрытию компонент верхнего и нижнего слоя соответственно, $C_{L1}, C_{T1}, C_{L2}, C_{T2}$ — величины, имеющие смысл скорости продольных и поперечных волн в верхнем и нижнем слоях соответственно. Предполагаем, что σ_1 и σ_2 являются вещественными величинами, тогда нормированные скорости распространения возмущений можно выразить следующим образом [10]:

$$C_{Tk} = \frac{1}{U_0} \sqrt{\frac{E_k^*}{2\rho_{sk}(1 + \sigma_k)}}, \quad C_{Lk} = \frac{1}{U_0} \sqrt{\frac{E_k^*(1 - \sigma_k)}{\rho_{sk}(1 - \sigma_k)(1 - 2\sigma_k)}}, \quad k = 1, 2. \quad (7)$$

Также предполагаем квазипараллельность линий тока основного потока, т.е. на периоде волны возмущения профиль продольной компоненты скорости U меняется незначительно по оси x , кроме того поперечную компоненту скорости V считаем малой. Для малых возмущений продольной u и поперечной v компонент скорости и давления p вид уравнений Навье (5)–(6) в безразмерных переменных не изменится, а уравнения Навье–Стокса (1)–(3) примут вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta u, \quad (8)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta v, \quad (9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (10)$$

где $\text{Re} = LU_0/\nu$ — число Рейнольдса,

Решение системы уравнений (5), (6), (8)–(10) будем искать в классе бегущих волн, имеющих фиксированные частоту ω и продольное (комплексное) волновое число α :

$$(u, v, p, \xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)^T(x, y, t) = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{p}, \hat{\xi}_1, \hat{\eta}_1, \hat{\xi}_2, \hat{\eta}_2)^T(y) e^{i(\alpha x - \omega t)}. \quad (11)$$

После подстановки выражений (11) в уравнения (5)–(6), (8)–(10) получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$i(\alpha U - \omega)\hat{u} + U\hat{v}' + i\alpha\hat{p} - \frac{1}{\text{Re}}(\hat{u}'' - \alpha^2\hat{u}) = 0, \quad (12)$$

$$i(\alpha U - \omega)\hat{v} + \hat{p}' - \frac{1}{\text{Re}}(\hat{v}'' - \alpha^2\hat{v}) = 0, \quad (13)$$

$$i\alpha\hat{u} + \hat{v}' = 0, \quad (14)$$

$$\omega^2\hat{\xi}_k + C_{Tk}^2(-\alpha^2\hat{\xi}_k + \hat{\xi}_k'') + (C_{Lk}^2 - C_{Tk}^2)(-\alpha^2\hat{\xi}_k + i\alpha\hat{\eta}_k') = 0, \quad (15)$$

$$\omega^2\hat{\eta}_k + C_{Tk}^2(-\alpha^2\hat{\eta}_k + \hat{\eta}_k'') + (C_{Lk}^2 - C_{Tk}^2)(\hat{\eta}_k'' + i\alpha\hat{\xi}_k') = 0, \quad (16)$$

где $k = 1, 2$, а штрихи означают дифференцирование по y .

Поставим граничные условия для выписанной системы. Во внешнем потоке накладывается условие затухания возмущений. На границе между покрытием и жидкостью, а также на границе между верхним и нижним слоями покрытия должны выполняться условия прилипания и условия непрерывности полных касательных и нормальных напряжений. Для постановки этих условий необходимо знать форму поверхности, что существенно усложняет задачу. Будем считать, что смещения поверхности малы и использовать линейное приближение [11]. Подробные выкладки приведены в работах [3, 4]. Тогда окончательный вид граничных условий будет следующим:

$$\hat{u} = \hat{v} = 0 \quad \text{при } y \rightarrow \infty, \quad (17)$$

$$-i\omega\hat{\xi}_1 = \hat{u} + \eta_1 U', \quad -i\omega\hat{\eta}_1 = \hat{v} \quad \text{при } y = 0, \quad (18)$$

$$2\rho C_{T1}^2 \left(\hat{\eta}_1' + \left(\frac{C_{L1}^2}{2C_{T1}^2} - 1 \right) (i\alpha\hat{\xi}_1 + \hat{\eta}_1') \right) = \frac{2}{\text{Re}} \hat{v}' - \hat{p} \quad \text{при } y = 0, \quad (19)$$

$$\rho C_{T1}^2 (\hat{\xi}_1' + i\alpha\hat{\eta}_1) = \frac{1}{\text{Re}} (\hat{u}' + i\alpha\hat{v}' + U''\hat{\eta}) \quad \text{при } y = 0, \quad (20)$$

$$\hat{\xi}_1 = \hat{\xi}_2, \quad \hat{\eta}_1 = \hat{\eta}_2 \quad \text{при } y = -h_1, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & \rho_{s1} C_{T1}^2 \left(\hat{\eta}_1' + \left(\frac{C_{L1}^2}{2C_{T1}^2} - 1 \right) (i\alpha\hat{\xi}_1 + \hat{\eta}_1') \right) = \\ & = \rho_{s2} C_{T2}^2 \left(\hat{\eta}_2' + \left(\frac{C_{L2}^2}{2C_{T2}^2} - 1 \right) (i\alpha\hat{\xi}_2 + \hat{\eta}_2') \right) \quad \text{при } y = -h_1, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\rho_{s1} C_{T1}^2 (\hat{\xi}'_1 + i\alpha \hat{\eta}'_1) = \rho_{s2} C_{T2}^2 (\hat{\xi}'_2 + i\alpha \hat{\eta}'_2) \quad \text{при } y = -h_1, \quad (23)$$

$$\hat{\xi}'_2 = \hat{\eta}'_2 = 0 \quad \text{при } y = -(h_1 + h_2). \quad (24)$$

Уравнения (12)–(14), (15), (16) вместе с граничными условиями (17)–(24) составляют обобщенную задачу на собственные значения α .

В настоящей работе используется следующее определение числа Рейнольдса:

$$\text{Re} = \delta^* U_0 / \nu,$$

где $\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{U}{U_0}\right) dy$ — толщина вытеснения пограничного слоя.

2. Численный метод решения

В системе уравнений (12)–(14) в качестве функции-параметра присутствует продольная (вдоль x) компонента скорости основного потока U . В качестве основного потока используется пограничный слой Блазиуса. Нахождение компонент скорости основного потока сводится к решению уравнения Блазиуса [12]

$$\Phi'''(y) + \Phi\Phi''(y) = 0 \quad (25)$$

с граничными условиями $\Phi(0) = \Phi'(0) = 0$, $\Phi(\infty) = 1$, где $\Phi' = U$. Это уравнение можно свести к системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{d}{dy} \begin{pmatrix} \Phi_0 \\ \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ -\Phi_0\Phi_2 \end{pmatrix}, \quad (26)$$

где $\Phi_0 = \Phi$, $\Phi_1 = \Phi'$, $\Phi_2 = \Phi''$. Известно, что решение системы (26) не имеет аналитического представления. Решать эту систему можно разными способами. В представленной работе система (26) решается конечно-разностным методом с помощью решателя `bvp4c` в среде MATLAB. Здесь $\Phi' = U$, $\Phi'' = U'$ — коэффициенты, использующиеся в уравнениях (12), (13) и в граничных условиях (18).

При расчете характеристик гидродинамической устойчивости применялся метод коллокаций. Область $[-1, 1]$ дискретизируется следующим образом. В качестве узлов интерполяции используются корни полиномов Чебышева второго рода и точки $-1, 1$ (точки Гаусса–Лобатто):

$$\zeta_j = \cos(\pi j / (N-1)), \quad j = 0, 1, \dots, N-1.$$

В качестве базисных функций используются многочлены Лагранжа

$$h_i(\zeta) = \prod_{j=0, j \neq i}^{N-1} \frac{\zeta - \zeta_j}{\zeta_i - \zeta_j}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1$$

так, что $h_i(\zeta_j) = \delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера.

Физическая область $[-(h_1 + h_2), y_{\max}]$, где $y_{\max} \gg \delta^*$, разбивается на три области: область, занятая потоком, — $[0, y_{\max}]$, область, занятая верхним слоем покрытия, — $[-h_1, 0]$, и область, занятая нижним слоем покрытия, — $[-(h_1 + h_2), -h_1]$. Для каждой из этих областей можно выбрать разное число узлов интерполяции, но для простоты изложения будем считать количество узлов одинаковым.

Отображение отрезка $\zeta \in [-1, 1]$ на область $y \in [0, y_{\max}]$ осуществлялось дробно-линейным преобразованием [13]:

$$y = l \frac{1 + \zeta}{b - \zeta},$$

где l — масштабный множитель, $b = 1 + 2l/y_{\max}$ — константа, необходимая для контроля над распределением узлов дискретизации. Отображение отрезка $\zeta \in [-1, 1]$ на часть физической области, занятой верхним слоем ($y \in [-h_1, 0]$), осуществлялось линейным преобразованием. В общем виде линейное преобразование отрезка $\zeta \in [-1, 1]$ на отрезок $y \in [a, b]$ осуществляется отображением

$$y = \frac{b-a}{2} \left(\zeta - \frac{a+b}{a-b} \right). \quad (27)$$

Тогда для верхнего слоя

$$y = \frac{h_1}{2} (\zeta - 1).$$

Отображение отрезка $\zeta \in [-1, 1]$ на физическую область, занятую нижним слоем ($y \in [-h_1 - h_2, -h_1]$), осуществлялось также линейным преобразованием

$$y = \frac{h_2}{2} \left(\zeta - \frac{2h_1 + h_2}{h_2} \right).$$

Уравнения (12)–(16) вместе с граничными условиями (17)–(24) формируют обобщенную задачу на собственные значения, в которую α входит нелинейным образом. В уравнении (12) можно понизить степень α с помощью уравнения неразрывности (14). В уравнениях (13), (15), (16) степень α можно понизить введением вспомогательных переменных $\hat{f} = \alpha \hat{v}$, $\hat{g}_k = \alpha \hat{\xi}_k$, $\hat{h}_k = \alpha \hat{\eta}_k$, $k = 1, 2$. Тогда система (12)–(16) примет вид:

$$i(\alpha U - \omega) \hat{u} + U \hat{v} + i \alpha \hat{p} - \frac{1}{\text{Re}} (\hat{u}'' - i \alpha \hat{v}) = 0, \quad (28)$$

$$i(\alpha U - \omega) \hat{v} + \hat{p}' - \frac{1}{\text{Re}} (\hat{v}'' - \alpha \hat{f}) = 0, \quad (29)$$

$$i \alpha \hat{u} + \hat{v}' = 0, \quad (30)$$

$$\alpha \hat{v} - \hat{f} = 0, \quad (31)$$

$$\omega^2 \hat{\xi}_k + C_{Tk}^2 (-\alpha \hat{g}_k + \hat{\xi}_k'') + (C_{Lk}^2 - C_{Tk}^2) (-\alpha \hat{g}_k + i \alpha \hat{\eta}_k') = 0, \quad k = 1, 2, \quad (32)$$

$$\omega^2 \hat{\eta}_k + C_{Tk}^2 (-\alpha \hat{h}_k + \hat{\eta}_k'') + (C_{Lk}^2 - C_{Tk}^2) (\hat{\eta}_k'' + i \alpha \hat{\xi}_k') = 0, \quad k = 1, 2, \quad (33)$$

$$\alpha \hat{\xi}_k - \hat{g}_k = 0, \quad k = 1, 2, \quad (34)$$

$$\alpha \hat{\eta}_k - \hat{h}_k = 0, \quad k = 1, 2. \quad (35)$$

После дискретизации система уравнений (28)–(35) принимает вид линейной обобщенной задачи на собственные значения:

$$L \hat{s} = \alpha G \hat{s}, \quad (36)$$

где $\hat{s} = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{p}, \hat{f}, \hat{\xi}_1, \hat{\eta}_1, \hat{g}_1, \hat{h}_1, \hat{\xi}_2, \hat{\eta}_2, \hat{g}_2, \hat{h}_2)^T$, верхним индексом обозначаются компоненты каждого вектора: $\hat{u} = (\hat{u}^0, \hat{u}^1, \dots, \hat{u}^{N-1})^T, \dots, \hat{h}_1 = (\hat{h}_2^0, \hat{h}_2^1, \dots, \hat{h}_2^{M_1-1})^T, \dots,$

$\hat{h}_2 = (\hat{h}_2^0, \hat{h}_2^1, \dots, \hat{h}_2^{M_2-1})^T$, где N, M_1, M_2 — числа узлов интерполяции в потоке и в первом и втором слоях покрытия соответственно.

Наложение однородных граничных условий при $y = y_{\max}$ и $y = -h_1 - h_2$ сводится к замене соответствующих строк на нулевые строки в матрицах L и G . Это позволяет уменьшить число уравнений за счет удаления этих строк и соответствующих им столбцов. Остальные граничные условия в дискретной форме будут иметь следующий вид. Кинематические условия (18) при $y = 0$:

$$-i\omega \hat{\xi}_1^0 = \hat{u}^{N-1} + \hat{\eta}_1^0 U'^{N-1}, \quad -i\omega \hat{\eta}_1^0 = \hat{v}^{N-1}. \quad (37)$$

Динамические условия (19) и (20) при $y = 0$:

$$2\rho C_{T1}^2 \left(\hat{\eta}_1'^0 + \left(\frac{C_{L1}^2}{2C_{T1}^2} - 1 \right) (i\alpha \hat{\xi}_1^0 + \hat{\eta}_1^0) \right) = \frac{2}{\text{Re}} \hat{v}'^{N-1} - \hat{p}^{N-1}, \quad (38)$$

$$\rho C_{T1}^2 (\hat{\xi}_1'^0 + i\alpha \hat{\eta}_1^0) = \frac{1}{\text{Re}} (\hat{u}'^{N-1} + i\alpha \hat{v}^{N-1}). \quad (39)$$

Кинематические условия (21) при $y = -h_1$:

$$\hat{\eta}_1^{N-1} = \hat{\eta}_2^1, \quad \hat{\xi}_1^{N-1} = \hat{\xi}_2^1. \quad (40)$$

Динамические условия (22) и (23) при $y = -h_1$:

$$\rho_{s1} C_{T1}^2 \left(\hat{\eta}_1'^{N-1} + \left(\frac{C_{L1}^2}{2C_{T1}^2} - 1 \right) (i\alpha \hat{\xi}_1^{N-1} + \hat{\eta}_1^{N-1}) \right) = \quad (41)$$

$$= \rho_{s2} C_{T2}^2 \left(\hat{\eta}_2'^1 + \left(\frac{C_{L2}^2}{2C_{T2}^2} - 1 \right) (i\alpha \hat{\xi}_2^1 + \hat{\eta}_2^1) \right),$$

$$\rho_{s1} C_{T1}^2 (\hat{\xi}_1'^{N-1} + i\alpha \hat{\eta}_1^{N-1}) = \rho_{s2} C_{T2}^2 (\hat{\xi}_2'^1 + i\alpha \hat{\eta}_2^1). \quad (42)$$

Для наложения этих граничных условий необходимо поменять строки в матрицах L и G на строки, которые соответствуют уравнениям (38)–(42).

Таким образом получена полная задача (28)–(35) с граничными условиями (37)–(42) на собственные значения α . Эта задача решается с помощью *QZ*-алгоритма [14] в среде MATLAB; в результате находится спектр матрицы $G^{-1}L$, из которого моды соответствующей физической задачи выбираются по их сходимости к фиксированным значениям при увеличении числа узлов интерполяции N, M — в потоке и в покрытии. Из них отбирается ведущая мода (с минимальной мнимой частью α), которая соответствует возмущению, распространяющемуся вниз по потоку ($\text{Re}(\alpha) > 0$).

Поиск критического числа Рейнольда Re_* осуществлялся в диапазоне $\text{Re} \in [200, 1000]$, а частотный параметр, обычно используемый при описании гидродинамической устойчивости пограничного слоя $F = \omega/\text{Re}$ [12] в диапазоне $F \in [50 \cdot 10^{-6}, 1000 \cdot 10^{-6}]$.

В этом случае $\omega \in [10^{-2}, 1]$. Выбор y_{\max} обуславливается сходимостью спектра при увеличении y_{\max} . В дальнейших расчетах использовались фиксированные значения $M_1 = M_2 = 50$, $y_{\max} = 20$ и $N = 70$. Расчеты показали, что при их увеличении собственные числа α отличаются мало (в четвертом–пятом знаке после запятой).

В настоящей работе использованы экспериментальные данные (модуль упругости $E(f)$ и коэффициент потерь $\mu(f)$), полученные в исследованиях [15, 16] для нескольких резин.

Таблица

Параметры покрытий

Покрытие	a_1	b_1	a_2	b_2	ρ , кг/м ³
Пента 740	0,0385	0,0987	0	0,15	600
RTV-3133	0,0301	0,3673	0,0411	-0,1029	1135
Пента 710	0,1004	0,9394	0,0016	0,0511	1120
Пента 710 + 50 % Pb ₃ O ₄	0,2851	1,1794	0,0018	0,0678	1840
Пента 710 + 150 % Pb ₃ O ₄	0,3825	1,6475	-0,0002	0,1091	2350
RTV-3133 + 400 % W	1,2418	5,6914	-0,0020	0,0425	5330

Выбор этих покрытий обусловлен тем, что в цитируемых работах была показана перспектива их использования для управления возмущениями пограничного слоя при актуальных для практики скоростях набегающего потока. Две резины (Пента 740 и RTV-3133) соответствуют нижнему слою, четыре (Пента 710 без добавок и с добавлением разных долей свинцового сурика, RTV-3133 с добавлением вольфрама) — верхнему. Эмпирические зависимости имеют следующий вид:

$$E(f) = a_1 \ln(f) + b_1, \quad \mu(f) = a_2 \ln(f) + b_2. \quad (43)$$

Коэффициенты a_1, b_1, a_2, b_2 , а также плотности покрытий приведены в таблице. Поскольку по своим свойствам рассматриваемые резины близки к несжимаемому материалу, то как и в работах [16, 17], коэффициент Пуассона σ для них был выбран 0,47.

3. Результаты расчетов

На рис. 2 приведены примеры типичных кривых нейтральной устойчивости (кривые, где $\text{Im}(\alpha) = 0$), а также линии уровня мнимой части волнового числа $\text{Im}(\alpha) = -0,001$ и $\text{Im}(\alpha) = -0,002$. Области внутри нейтральных кривых соответствуют неустойчивому течению. Сплошной линией показан случай жесткой стенки, штриховой — случай податливой стенки (внешний слой из материала Пента 710, внутренний — Пента 740) при толщине верхнего и нижнего слоев 0,1 и 2 мм соответственно и скорости внешнего потока 15 м/с. Из рис. 2 следует, что критическое число Рейнольдса в течении над покрытием больше, чем критическое число Рейнольдса над жесткой стенкой. Кроме того видно, что частота, соответствующая критическому числу Рейнольдса, и диапазон частот, при котором возникают неустойчивые возмущения, уменьшаются, а также уменьшается скорость нарастания возмущений. При увеличении скорости внешнего потока

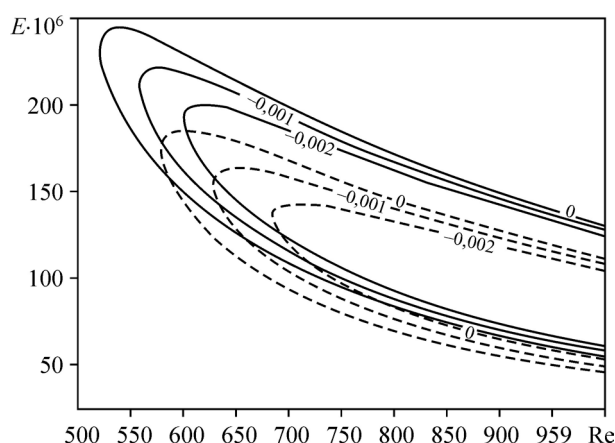
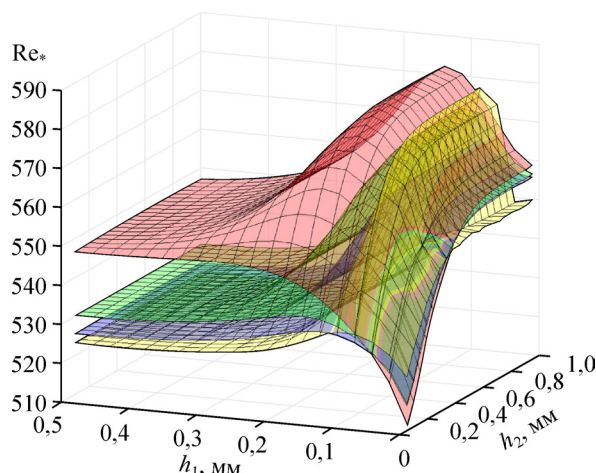


Рис. 2. Кривые нейтральной устойчивости и линии уровня. Числа на графиках соответствуют мнимой части α .

Рис. 3. Зависимость величины Re_* от толщин слоев.

Нижний слой — Пента 740, $U_0 = 15$ м/с;
 верхнему слою цвета соответствуют
 следующим образом:
 красный — Пента 710,
 зеленый — Пента 710 + 50 %,
 синий — Пента 710 + 150 %,
 желтый — RTV-3133 + 400 %.



от 15 м/с и выше появляются новые области неустойчивости, которые связаны с податливостью покрытия. В работе [3] показано, что те же области возникают и в случае однослойного покрытия.

На рис. 3 приведены четыре графика, показывающие зависимость критического числа Рейнольдса от толщины верхнего и нижнего слоев при фиксированной скорости внешнего потока $U_0 = 15$ м/с. Для каждого графика в качестве нижнего слоя выбрана резина Пента 740. Для всех графиков характерно то, что при увеличении толщины верхнего слоя свыше 0,4 мм, критическое число Рейнольдса Re_* перестает зависеть от толщины нижнего слоя. Это связано с тем, что возмущение в покрытии затухает еще на верхнем слое и не доходит до нижнего. При увеличении h_2 от 1 мм и выше эффекты, связанные с податливостью, перестают зависеть от толщины нижнего слоя. Это объясняется тем, что волна возмущений в покрытии затухает на нижнем слое, не доходя до жесткой стенки. Как было показано в работе [9], тот же эффект возникает и в случае с однослойным покрытием. Таким образом, можно зафиксировать h_2 , взяв его значение больше либо равным двум миллиметрам. Также из рис. 3 видно, что существует локальный максимум Re_* при $h_1 \approx 0,15$ мм. Качественное объяснение этого эффекта дано в виде иллюстраций поведения профиля амплитуды поперечной компоненты деформации в покрытии, которые представлены на рис. 4.

На рис. 4 пунктирная линия обозначает границу раздела слоев. Выше этой линии расположен график профилей деформации в верхнем слое, ниже — в нижнем. На левом рисунке $h_1 = 0,1$ мм, на центральном (соответствует максимуму Re_*) $h_1 = 0,15$ мм,

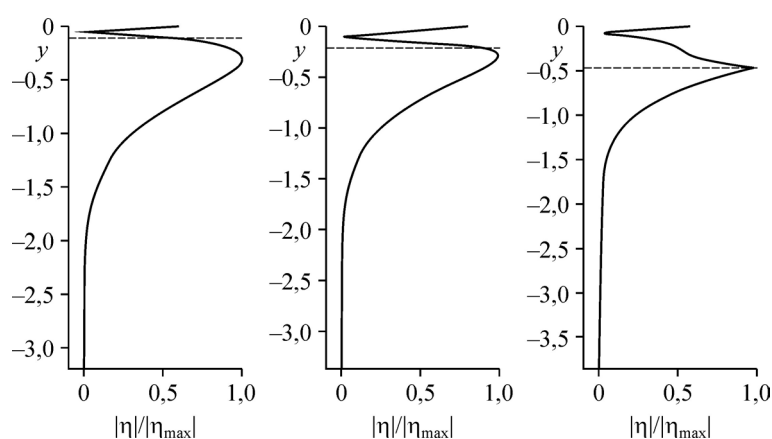


Рис. 4. Профиль амплитуды поперечной компоненты деформации в покрытии, нормированный на ее максимум, при различных h_1 .

Нижний слой — Пента 740, верхний слой — Пента 710; $h_2 = 3$ мм, $U_0 = 15$ м/с.

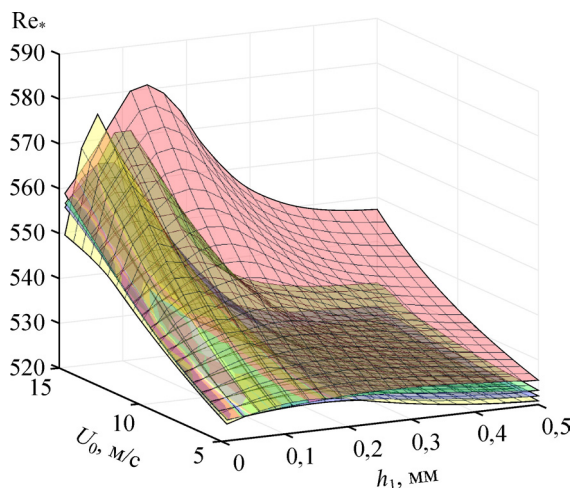


Рис. 5. Зависимость величины Re_* от толщины верхнего слоя и скорости внешнего потока. Нижний слой — Пента 740, $h_2 = 2$ мм; обозначения верхнего слоя см. на рис. 3.

на правом $h_1 = 0,45$ мм. Видно, что при увеличении h_1 от 0,15 мм и выше образуется точка перегиба на графике амплитуды. При уменьшении h_1 волна довольно быстро переходит на нижний слой, что можно наблюдать на левом рисунке. В случае $h_1 = 0,15$ мм максимум амплитуды волны на верхнем слое практически

совпадает с максимумом волны на нижнем слое и при этом не возникает излома, который можно видеть на правом графике.

На рис. 5 представлены графики зависимости критического числа Рейнольдса Re_* от толщины верхнего слоя и скорости внешнего потока. Нижний слой здесь соответствует материалу Пента 710, остальные цвета соответствуют различным верхним слоям также как и на рис. 3. Видно, что в рассматриваемом диапазоне скоростей точка максимума по толщине верхнего слоя не зависит от скорости внешнего потока, кроме того Re_* увеличивается при увеличении скорости.

На рис. 6 и 7 представлены графики, аналогичные графикам рис. 3 и 5, но нижним слоем здесь является резина RTV-3133. Для красного графика наблюдается монотонность Re_* по толщине верхнего слоя, в то время как остальные графики ведут себя немонотонно. Это можно увидеть также на рис. 8, где зафиксированы толщина нижнего слоя и скорость внешнего потока. Тенденция монотонности Re_* здесь при увеличении скорости внешнего потока сохраняется, как и в случае с резиной Пента 710. Из графиков видно, что более сильное влияние на устойчивость оказывает нижний слой, а верхний слой влияет значительно меньше.

Численный анализ показывает, что на поведение Re_* существенно влияет коэффициент потерь нижнего слоя. На рис. 9 представлены четыре графика, показывающие зависимость Re_* от толщины верхнего слоя при фиксированной скорости внешнего потока $U = 15$ м/с и толщине нижнего слоя $h_2 = 2$ мм. На всех графиках также зафиксирован верхний слой — Пента 710 без добавок. Графикам 1 и 2 отвечают случаи, когда нижнему слою соответствуют Пента 740 и RTV-3133. Остальные графики соответствуют некоторым модельным покрытиям.

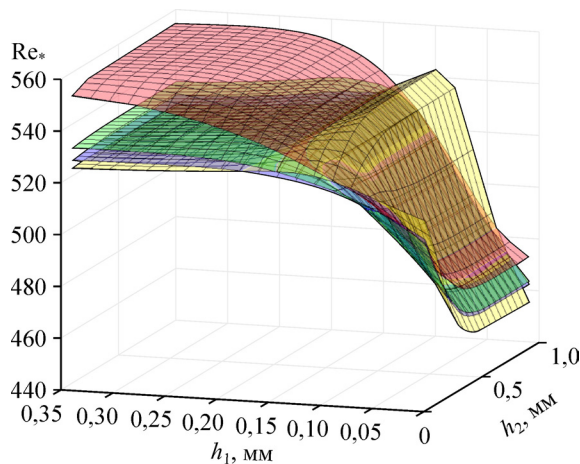
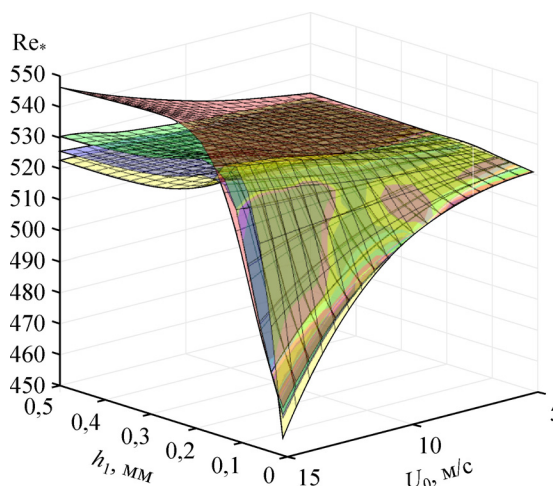


Рис. 6. Зависимость величины Re_* от толщин слоев. Нижний слой — RTV-3133, $U_0 = 15$ м/с; обозначения верхнего слоя см. на рис. 3.

Рис. 7. Зависимость величины Re_* от толщины верхнего слоя и скорости внешнего потока. Нижний слой — RTV-3133, $h_2 = 2$ мм; обозначения верхнего слоя см. на рис. 3.



Их полезно рассмотреть при анализе поведения критического числа Рейнольдса. Графику 3 соответствует нижнее покрытие с плотностью и модулем упругости как у Пенты 740 и коэффициентом потерь как у RTV-3133, покрытие, соответствующее графику 4, имеет плотность и коэффициент потерь как у Пенты 740, модуль упругости как у RTV-3133, графику 5 соответствует модуль упругости и коэффициент потерь как у Пенты 740, а плотность — как у RTV-3133. Из этих графиков можно сделать вывод, что значительные изменения плотности очень слабо влияют на значение Re_* . Существенное влияние оказывает коэффициент потерь, а модуль упругости влияет в меньшей степени.

С практической точки зрения использование резины RTV-3133 невыгодно, поскольку при различных параметрах критическое число Рейнольдса может быть меньше 520, в то время как для резины Пента 710 критическое значение Re_* , больше 520 при любых параметрах толщин слоев и скорости внешнего потока.

Для семи из восьми комбинаций покрытий можно определить оптимальную толщину верхнего слоя как такую толщину, на которой достигается максимум критического числа Рейнольдса. Это положение обосновывается тем, что для практических приложений как правило важно добиваться именно увеличения Re_* .

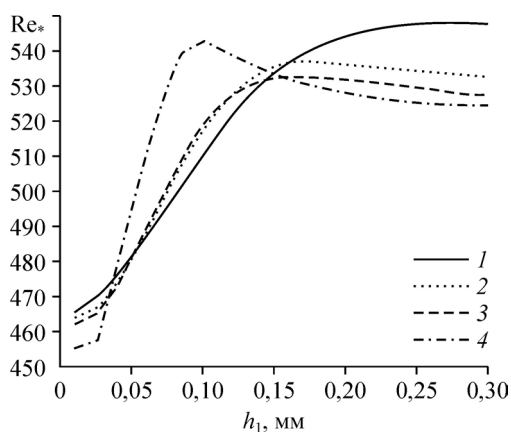


Рис. 8. Зависимость величины Re_* от толщины верхнего слоя.

Скорость внешнего потока $U_0 = 15$ м/с; нижний слой — RTV-3133, $h_2 = 2$ мм; верхний слой: 1 — Пента 710, 2 — Пента 710 + 50 %, 3 — Пента 710 + 150 %, 4 — RTV-3133 + 400 %.

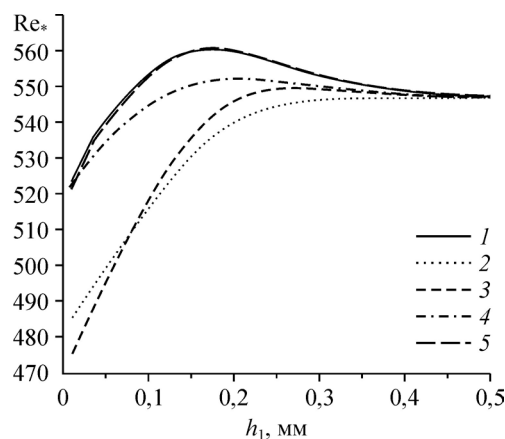


Рис. 9. Зависимость величины Re_* от толщины верхнего слоя.

$h_2 = 2$ мм; верхний слой — Пента 710; нижний слой: 1 — Пента 740; 2 — RTV-3133; 3 — Пента 740, коэффициент потерь как у RTV-3133; 4 — Пента 740, модуль упругости как у RTV-3133; 5 — Пента 740, плотность как у RTV-3133.

Заключение

Проведен параметрический анализ устойчивости пограничного слоя над рядом перспективных двухслойных податливых покрытий, в которых наружный тонкий слой является существенно более жестким, чем нижний, что может быть важно для практического применения. Получена многопараметрическая задача на собственные значения с учетом граничных условий. Численные эксперименты показали, что геометрические и физические свойства обоих слоев покрытия существенно влияют на устойчивость пограничного слоя для всех рассмотренных резин. В частности, критическое число Рейнольдса для различных покрытий может как увеличиваться, так и уменьшаться по сравнению со случаем жесткой стенки. Анализ расчетов позволяет уменьшить число определяющих параметров. В частности, фокус на критическом числе Рейнольдса исключает необходимость тщательного исследования зависимости характеристик устойчивости от частот возмущений, а затухание возмущений в покрытии дает возможность зафиксировать толщину нижнего слоя. Показано, что критическое число Рейнольдса меняется немонотонно с увеличением толщины верхнего слоя, что позволяют определить его оптимальную толщину.

Список литературы

1. Riley J.J., Gad-el-Hak M., Metcalfe R.W. Compliant coatings // *Ann. Rev. Fluid Mech.* 1988. Vol. 20. P. 393–420.
2. Carpenter P.W., Lucey A.D., Dixon A.E. The optimization of compliant walls for drag reduction // *Recent Developments in Turbulence Management* / Ed. by K.-S. Choi. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1991. P. 195–221.
3. Yeo K.S. The stability of boundary layer flow over single- and multiple-layer viscoelastic walls // *J. Fluid Mech.* 1988. Vol. 196. P. 359–408.
4. Бойко А.В., Кулик В.М., Филимонов В.А. Устойчивость пограничного слоя плоской пластины над податливыми покрытиями повышенной прочности // *Вестн. НГУ. Серия: Физика.* 2011. Т. 6, вып. 4. С. 104–115.
5. Kulik V.M., Semenov B.N., Boiko A.V., Seoudi B., Chun H.H., Lee I. Measurement of dynamic properties of viscoelastic materials // *Exp. Mech.* 2009. Vol. 49. P. 417–425.
6. Kulik V.M., Boiko A.V., Seoudi B., Chun H.H., Lee I. Measurement method of complex viscoelastic material properties // *Int. J. Solids Struct.* 2010. Vol. 47. P. 374–382.
7. Kulik V.M., Boiko A.V., Bardakhanov S.P., Park H., Chun H.H., Lee I. Viscoelastic properties of silicone rubber with admixture of SiO₂ nanoparticles // *Materials Sci. Eng. A.* 2011. Vol. 528. P. 5729–5732.
8. Даржаин А.Э., Бойко А.В., Кулик В.М., Чупахин А.П. Анализ устойчивости пограничного слоя плоской пластины над двухслойным податливым покрытием конечной толщины // *Прикл. механика и техн. физика.* 2019. № 4. С. 35–46.
9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Гидродинамика.* М.: Наука, 1986. 73 с.
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теория упругости.* М.: Наука, 1987. 248 с.
11. Benjamin T. Shearing flow over a wavy boundary // *J. Fluid Mech.* 1959. Vol. 6, No. 2. P. 161–205.
12. Boiko A.V., Grek G.R., Dovgal A.V., Kozlov V.V. *Physics of transitional shear flows.* Berlin: Springer Verlag, 2011. 272 p.
13. Бойко А.В., Нечепуренко Ю.М., Жучков Р.Н., Козелков А.С. Блок расчета положения ламинарно–турбулентного перехода для пакета ЛЮГОС // *Теплофизика и аэромеханика.* 2014. Т. 21, № 2. С. 201–220.
14. Moler C.B., Stewart G.W. An algorithm for generalized matrix eigenvalue problems // *SIAM J. Numer. Anal.* 1973. Vol. 10, No. 2. P. 241–256.
15. Кулик В.М., Бойко А.В., Ли И. Снижение трения податливыми покрытиями из однородного материала // *Теплофизика и аэромеханика.* 2018. Т. 25, № 4. С. 537–546.
16. Кулик В.М., Бойко А.В., Ли И. Двухслойные податливые покрытия для управления турбулентным пограничным слоем // *Теплофизика и аэромеханика.* 2019. Т. 26, № 1. С. 51–62.
17. Кулик В.М. Плоская волна деформации в изотропном слое вязкоупругого материала // *Прикл. механика техн. физика.* 2006. Т. 47, № 3. С. 104–111.

*Статья поступила в редакцию 5 июня 2019 г.,
после доработки — 27 июля 2019 г.,
принята к публикации 6 ноября 2019 г.*