

мулы в (4.3), окончательно получим  $a(t) = (5/2)^{2/5} t^{3/5}$  ( $t > 5/2$ ). Можно показать, что в окрестности точки  $t = 5/2$  функция  $a(t)$  дважды непрерывно дифференцируема, а ее третья производная в этот момент меняется скачком ( $a''(5/2 + 0) - a''(5/2 - 0) = 166/3125$ ).

Таким образом, после определения функции  $a(t)$  плоская задача о погружении твердого контура в идеальную слабо сжимаемую жидкость полностью эквивалентна задаче об обтекании слабо изогнутого тонкого крыла сверхзвуковым потоком газа. Последняя задача подробно исследована в [6], полученные результаты и методы анализа без труда переносятся на нашу задачу. В частности, получены простые формулы для вычисления распределения давления по смоченному участку контура. Так, в задаче (1.11)–(1.16) при  $0 < t < 11/2$  распределение давления выражается через нормальные эллиптические интегралы Лагранжа первого рода.

Поле скоростей жидких частиц, вычисленное в акустическом приближении, имеет интегрируемые особенности в окрестности точек контакта. Согласно методу сращиваемых асимптотических разложений, эти окрестности следует выделять и строить в них «внутреннее» разложение искомых функций, рассматривая решение, полученное в акустическом приближении, как главный член внешнего асимптотического разложения решения исходной задачи. Предварительно можно сообщить, что в системе координат, движущейся вместе с точкой контакта, течение жидкости в малой окрестности этой точки будет существенно нелинейным и квазистационарным. Последнее обстоятельство позволяет использовать результаты теории дозвуковых струй газа. Построенное таким способом «внутреннее» квазистационарное решение теряет силу в момент выхода ударной волны на свободную границу. Этот этап процесса рассмотрен в [7]. Показано, что движение жидкости описывается сложной начально-краевой задачей для уравнения околозвукового движения газа. Однако при  $M \rightarrow 0$  продолжительность этапа стремится к нулю, что и позволяет рассматривать акустическое приближение без выделения околозвукового этапа.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Lesser M. B., Field J. E. The impact of compressible liquids // Annual Rev. Fluid Mechanics.—1983.—V. 15.—P. 97.
2. Korobkin A. A., Pukhnachov V. V. Initial stage of water impact // Annual Rev. Fluid Mechanics.—1988.—V. 20.—P. 159.
3. Пухначев В. В. Линейное приближение в задаче о входе затупленного тела в воду // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики.—1979.—Вып. 38.
4. Кубенко В. Д. Проникание упругих оболочек в сжимаемую жидкость.—Киев: Наук. думка, 1981.
5. Коробкин А. А. Проникание затупленного тела в слабо сжимаемую жидкость // ПМТФ.—1984.—№ 5.
6. Красильникова Е. А. Тонкое крыло в сжимаемом потоке.—М.: Наука, 1986.
7. Korobkin A. A., Pukhnachov V. V. Initial asymptotics in contact hydrodynamics problems // 4th Intern. Conf. on Numer. Ship Hydrodynamics, Wash., 1985: Proc.—S. l., s. a.

2. Новосибирск

Поступила 11/VI 1991 г.

УДК 532.529.5

С. Л. Гаврилюк

#### РАСПРОСТРАНЕНИЕ СИГНАЛА В ПОЛИДИСПЕРСНОЙ ПУЗЫРЬКОВОЙ ЖИДКОСТИ С НЕПРЕРЫВНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ПУЗЫРЬКОВ ПО РАЗМЕРАМ

Теория распространения волн в жидкости с пузырьками газа, основанная на уравнениях [1–3], развита главным образом для монодисперсных пузырьковых жидкостей (в каждой точке пространства имеются пу-

зырьки только одного размера). Обзор соответствующих результатов можно найти в [4—6]. Пузырьковым жидкостям, в которых имеется распределение пузырьков по размерам, посвящено сравнительно небольшое число работ. Как правило, они относятся к дискретной функции распределения (пузырьковая смесь с конечным числом фракций) [7—13]. Пузырьковые жидкости с непрерывным распределением пузырьков по размерам качественно исследовались в [14—18]. В [19] построена асимптотика решения задачи Коши для линеаризованных уравнений движения пузырьковой жидкости с непрерывным спектром пузырьков. В частности, показано, что монохроматическая волна, имеющая частоту, совпадающую с одной из собственных частот пузырьков, не распространяется в пузырьковой жидкости. Она распадается на сумму двух монохроматических волн (низко- и высокочастотную) либо редуцируется в высокочастотную волну в зависимости от того, является ли начальная волна достаточно длинной или достаточно короткой. Настоящая работа — продолжение [19]. Для замкнутости изложения приведен вывод интегро-дифференциального уравнения, проделанный в [19]. На основе этого уравнения исследована задача об эволюции сигнала, распространяющегося по первоначально покоившейся среде.

**1. Уравнения движения.** Исходные пелипейные уравнения движения пузырьковой жидкости имеют вид [1—3, 14, 18]

$$(1.1) \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{\nabla p}{\rho} = 0, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla,$$

$$R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left( \frac{dR}{dt} \right)^2 = \frac{1}{\rho_{l0}} \left( \frac{P_0}{R} \left( \frac{\xi}{R} \right)^{3\alpha_2} - p \right),$$

$$dN/dt + N \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \rho = \rho_l (1 - \alpha_2), \quad p = p_0 + c_{l0}^2 (\rho_l - \rho_{l0}),$$

$$\alpha_2 = \frac{4}{3} \pi \int_0^\infty N(\xi, t, \mathbf{x}) R^3(\xi, t, \mathbf{x}) d\xi.$$

Здесь  $t$  — время;  $\mathbf{x}$  — пространственная координата;  $\rho(t, \mathbf{x})$  — плотность смеси;  $\rho_l(t, \mathbf{x})$  — плотность жидкости;  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$  — скорость смеси;  $\xi$  — радиус пузырька « $\xi$ -й фракции» в равновесии ( $\xi$  изменяется в интервале  $[\xi_1, \xi_2]$ ,  $0 < \xi_1 < \xi_2 < \infty$ , и играет роль лагранжевой переменной, фиксирующей соответствующую фракцию пузырьков);  $R(\xi, t, \mathbf{x})$  — текущий радиус пузырька;  $p(t, \mathbf{x})$  — давление в смеси, которое полагается равным давлению в жидкости;  $c_{l0}$  — скорость звука в жидкости;  $N(\xi, t, \mathbf{x})$  — числовая плотность распределения пузырьков по размерам, так что  $dN = N(\xi, t, \mathbf{x}) d\xi$  — число пузырьков « $\xi$ -й фракции» в единице объема смеси;  $\alpha_2(t, \mathbf{x})$  — объемная концентрация пузырьков. Индексом нуль обозначены величины в состоянии покоя.

Отметим, что система (1.1) содержит бесконечное число искомых переменных, характеризуемых индексом  $\xi$ . Более того, часть искомых переменных в (1.1) зависит только от  $t, \mathbf{x}$ , а другая — от  $t, \mathbf{x}, \xi$ . Если  $N = N_*(t, \mathbf{x}) \delta(\xi - \xi_*)$  ( $\delta$  — дельта-функция, а  $\xi_*$  — некоторое фиксированное значение радиуса пузырька), то (1.1) сводится к уравнениям движения монодисперсной смеси.

Из уравнений неразрывности и сохранения плотности числа пузырьков в единице объема смеси вытекает

$$(1.2) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{N}{\rho} \right) = 0.$$

Если при  $t = 0$  распределение пузырьков однородно по  $\mathbf{x}$ , то из (1.2) получим

$$(1.3) \quad N/\rho = N_0(\xi)/\rho_0, \quad \rho_0 = \rho_{l0} \left( 1 - \frac{4}{3} \pi \int_0^\infty N_0(\xi) \xi^3 d\xi \right),$$

где  $N_0(\xi)$  — распределение пузырьков в равновесии. Предполагается, что  $N_0(\xi)$  — финитная на  $[0, \infty)$  функция с носителем  $I = [\xi_1, \xi_2]$ . Уравнение (1.3) позволяет выразить функцию  $N(\xi, t, x)$  через  $N_0(\xi)$ . Тогда плотность смеси определяется формулой

$$(1.4) \quad \rho = \rho_l \left( 1 - \frac{\rho_l}{\rho_{l0}} \frac{4}{3} \pi \int_0^\infty N_0(\xi) R^3(\xi, t, x) d\xi \right) + O(\alpha_2^2).$$

Пусть  $\varepsilon_1$  — малый параметр. Линеаризуем систему (1.4), учитывая формулу (1.4) и следующее представление решения:

$$p = p_0 + \varepsilon_1 p', \quad u = \varepsilon_1 u', \quad R = \xi + \varepsilon_1 R', \quad \rho_l = \rho_{l0} + \varepsilon_1 \rho' / c_{l0}^2.$$

После отбрасывания членов порядка  $\varepsilon_1^2$  и  $\alpha_2^2$  и исключения скорости  $u'$  имеем

$$(1.5) \quad \begin{aligned} c_f^{-2} p_{tt} - \Delta p' &= 4\pi \rho_{l0} \int_0^\infty N_0(\xi) \xi^2 R'_{tt} d\xi, \\ \xi R'_{tt} + \omega^2(\xi) \xi R' &= -p'/\rho_{l0}, \quad \omega^2(\xi) = x^2/\xi^2, \quad \kappa^2 = 3\gamma p_0/\rho_{l0}. \end{aligned}$$

Здесь  $\Delta$  — оператор Лапласа по  $x$ ;  $c_f = c_{l0}(1 + \alpha_{20})$  — «замороженная» скорость звука;  $\alpha_{20}$  — объемная концентрация пузырьков в равновесии;  $\omega(\xi)$  — собственная частота колебаний пузырьков  $\xi$ -го сорта. Система (1.5) практически совпадает с предложенной в [15], где вместо  $c_f$  стоит  $c_{l0}$ . По-видимому, более корректно в этом приближении считать, что «замороженная» скорость звука совпадает со скоростью звука в чистой жидкости. Подразумевая это замечание в дальнейшем, тем не менее сохраним обозначение  $c_f$ , отдавая дань сложившейся традиции. Опуская штрихи и делая замену  $A = \xi R'$ , окончательно получим

$$(1.6) \quad c_f^{-2} p_{tt} - \Delta p = 4\pi \rho_{l0} \int_0^\infty N_0(\xi) \xi A_{tt} d\xi, \quad A_{tt} + \omega^2(\xi) A = -p/\rho_{l0}.$$

Ниже для простоты рассмотрим одномерный случай. Начальные и краевые условия для системы (1.6), соответствующие задаче о распространении сигнала по покоящейся жидкости, запишем в виде

$$(1.7) \quad \begin{aligned} p|_{t=0} &= p_t|_{t=0} = 0, \quad A|_{t=0} = A_t|_{t=0} = 0, \quad x > 0, \\ p|_{x=0} &= \mu(t), \quad t > 0. \end{aligned}$$

**2. Сведение к одному уравнению.** Переидем от переменной  $\xi$  к  $\omega$ :

$$(2.1) \quad \begin{aligned} c_f^{-2} p_{tt} - p_{xx} &= 4\pi \rho_{l0} \kappa^2 \int_0^\infty \frac{\tilde{N}_0(\omega)}{\omega^3} \tilde{A}_{tt} d\omega, \\ \tilde{A}_{tt} + \omega^2 \tilde{A} &= -p/\rho_{l0}, \quad \kappa^2 = 3\gamma p_0/\rho_{l0}. \end{aligned}$$

Здесь  $\tilde{N}_0(\omega) = N_0(\kappa/\omega)$ ;  $\tilde{A}(\omega, t, x) = A(\kappa/\omega, t, x)$ . Функция  $\tilde{N}_0(\omega)$  обращается в нуль вне интервала  $J = [\omega_1, \omega_2]$ ,  $\omega_1 = \kappa/\xi_2$ ,  $\omega_2 = \kappa/\xi_1$ . Из второго уравнения системы (2.1) вытекает

$$(2.2) \quad \tilde{A} = -\frac{1}{\rho_{l0}\omega} \int_0^t p(\tau, x) \sin \omega(t-\tau) d\tau.$$

Подставляя (2.2) в первое уравнение системы (2.1), окончательно имеем

$$(2.3) \quad c_f^{-2} p_{tt} - p_{xx} + m^2 p = \int_0^t K(t-\tau) p(\tau, x) d\tau,$$

где

$$(2.4) \quad m^2 = \int_0^\infty \frac{N(\omega)}{\omega^3} d\omega, \quad K(t - \tau) = \int_0^\infty \frac{N(\omega)}{\omega^2} \sin \omega(t - \tau) d\omega,$$

$$N(\omega) = 4\pi\kappa^2 \tilde{N}_0(\omega), \quad \kappa^2 = 3\gamma p_0/\rho_{l0}.$$

Уравнения (2.3), (2.4) с начальными данными (1.7) исходные для дальнейшего анализа. Наличие в правой части уравнения (2.3) оператора свертки означает, что пузырьковая жидкость является средой с «памятью». В монодисперсном случае уравнение типа (2.3) получено в [20].

**3. Задача о распространении сигнала.** Рассмотрим изображение по Лапласу:

$$P(s, x) = \int_0^\infty p(t, x) e^{-st} dt, \quad M(s) = \int_0^\infty \mu(t) e^{-st} dt, \quad s = \sigma + i\eta.$$

Тогда уравнение (2.3) с начальными и краевыми условиями (1.7) сводится к исследованию краевой задачи:

$$(3.1) \quad P_{xx} - L(s)P = 0, \quad x > 0, \quad P|_{x=0} = M(s), \quad P \xrightarrow[x \rightarrow \infty]{} 0,$$

$$L(s) = s^2 \left( c_f^{-2} + \int_0^\infty \frac{N(\omega) d\omega}{\omega^3 (\omega^2 + s^2)} \right).$$

Если предположить, что  $\mu(t)$  — интегрируемая функция, то  $M(s)$  не имеет особенностей в правой полуплоскости. Интегрируемость  $\mu(t)$  в дальнейшем будет предполагаться. Сформулируем условия на функцию  $N(\omega)$ .

А. Функция  $N(\omega)$  достаточно гладкая и тождественно равна нулю вне интервала  $J = [\omega_1, \omega_2]$ ;  $N(\omega) > 0$  во внутренних точках  $J$ ;  $N(\omega_i) = 0$ ,  $N'(\omega_i) = 0$ ,  $i = 1, 2$ ,  $0 < \omega_1 < \omega_2 < \infty$ .

Б.  $c_f^{-2} + \lim_{\eta \rightarrow \omega_2+0} \int_0^\infty \frac{N(\omega) d\omega}{\omega^3 (\omega^2 - \eta^2)} < 0$ . Поскольку  $c_f^{-2}$  — малая величина,

то условие Б выполнено для разумных функций распределения  $N(\omega)$ .

Из условия А вытекает, что функция  $L(s)$ , найденная в (3.1), аналитична в плоскости комплексного переменного  $s$ , за исключением отрезков  $[-i\omega_2, -i\omega_1]$ ,  $[i\omega_1, i\omega_2]$  мнимой оси. Под выражением  $\sqrt{L(s)}$  будем понимать в дальнейшем ветвь корня, определяемую из того условия, что корень из положительного числа есть положительное число. Тогда решение уравнения (3.1) имеет вид

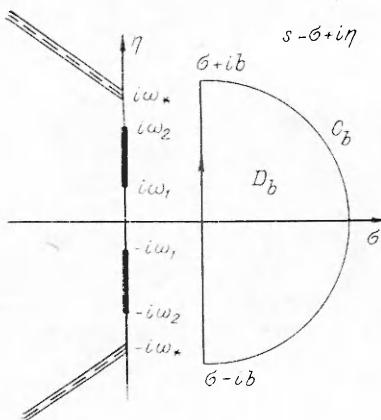
$$(3.2) \quad P = M(s) \exp(-\sqrt{L(s)}x).$$

У функции  $L(s)$  есть три нуля, один из них  $s = 0$  двукратный, а два оставшихся  $s_k$  чисто мнимые и комплексно-сопряженные (причем они оба простые). Таким образом,

$$s_1 = i\omega_*, \quad s_2 = -i\omega_*, \quad c_f^{-2} + \int_0^\infty \frac{N(\omega) d\omega}{\omega^3 (\omega^2 - \omega_*^2)} = 0.$$

В силу условия Б на функцию  $N(\omega)$  имеет место неравенство  $\omega_2 < \omega_* < \infty$ . Точки  $\pm i\omega_*$  являются точками ветвления функции  $\sqrt{L(s)}$ . Проведем разрезы на комплексной плоскости так, как показано на рис. 1. Используя формулу обращения преобразования Лапласа, согласно (3.2), находим

$$(3.3) \quad p(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{\sigma - ib}^{\sigma + ib} M(s) \exp(st - \sqrt{L(s)}x) ds, \quad \sigma > 0.$$



Р и с. 1

В плоскости переменных  $(t, x)$  фиксируем луч  $x/t = c$ . Дальнейшая цель состоит в получении асимптотики решения  $p(t, x)$ , определяемого формулой (3.3), вдоль этого луча при больших  $t$ . Покажем сначала, что возмущения не могут распространяться со скоростью, большей, чем  $c_f$ , т. е. в области  $x/t > c_f$  решение уравнения (2.3) тривиально. Действительно, при каждом фиксированном  $t$  для больших  $\operatorname{Re}(s) = \sigma$  имеем

$$p(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{\sigma - ib}^{\sigma + ib} M(s) \exp \left\{ \left( 1 - \frac{c}{c_f} \right) s t + O \left( \frac{1}{s} \right) \right\} ds.$$

Замкнем отрезок  $[\sigma - ib, \sigma + ib]$  окружностью  $C_b$ , обозначив соответствующую область через  $D_b$ , а ее границу через  $\partial D_b$  (см. рис. 1). Тогда в силу леммы Жордана [21]

$$p(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{\partial D_b} M(s) \exp \left\{ \left( 1 - \frac{c}{c_f} \right) s t + O \left( \frac{1}{s} \right) \right\} ds.$$

Из аналитичности подынтегральной функции вытекает, что при  $c > c_f$  давление  $p(t, x) \equiv 0$ . Этот результат вполне аналогичен полученному в [22, гл. 10].

Пусть теперь  $c < c_f$ . В формуле обращения (3.3) положим  $\sigma = 0$ . Поскольку выражение для  $L(s)$  содержит интеграл типа Коши, то в точках отрезков  $[-i\omega_2, -i\omega_1], [i\omega_1, i\omega_2]$  необходимо вычислить предельное значение  $L(s)$  при  $s$ , стремящемся к мнимой оси справа \*. Обозначим соответствующее предельное значение через  $L^-(s)$ . Пусть для определенности  $s = \delta + i\Omega$ , где  $\delta > 0$ , а  $\Omega$  — произвольная внутренняя точка интервала  $[\omega_1, \omega_2]$  (если  $\Omega$  совпадает с  $\omega_k$  ( $k = 1, 2$ ), у функции  $L(s)$  нет особенностей при  $s \rightarrow i\omega_k$ , так как  $N(\omega_k) = 0$ ). Тогда

$$\begin{aligned} L(s) = s^2 \left( c_f^{-2} + \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{N(\omega) d\omega}{\omega^3 (\omega^2 + s^2)} \right) &= s^2 \left( c_f^{-2} + \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{\frac{N(\omega)}{\omega^3} - \frac{N(\Omega)}{\Omega^3}}{\omega^2 + s^2} d\omega + \right. \\ &\quad \left. + \frac{N(\Omega)}{\Omega^3 2is} \left\{ \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{d\omega}{\omega + \Omega - i\delta} - \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{d\omega}{\omega - \Omega + i\delta} \right\} \right). \end{aligned}$$

Первые два интеграла не имеют особенностей при  $\delta \rightarrow 0$ . Последний же интеграл считается явно. Действительно,

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{d\omega}{\omega - \Omega + i\delta} = \frac{1}{2} \ln \frac{(\omega_2 - \Omega)^2 + \delta^2}{(\omega_1 - \Omega)^2 + \delta^2} - i \left\{ \operatorname{arctg} \frac{\omega_2 - \Omega}{\delta} - \operatorname{arctg} \frac{\omega_1 - \Omega}{\delta} \right\}.$$

Отсюда вытекает

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{d\omega}{\omega - \Omega + i\delta} = \ln \frac{\omega_2 - \Omega}{\Omega - \omega_1} - i\pi.$$

\* В [19] соответствующие предельные значения интегралов типа Коши получены неверно (лемма 4.2). На это указал автору К. В. Лотов. Автор приносит ему искреннюю благодарность. Правильный результат получается аналогично приведенному в данной работе и сводится к тому, что в формулы для скачка интегралов типа Коши следует добавить множитель  $1/2$ . Это не оказывает влияния на последующий анализ и полученные выводы.

Таким образом,

$$(3.4) \quad L^-(s) = -\Omega^2 \left( c_f^{-2} + \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{\frac{N(\omega)}{\omega^3} - \frac{N(\Omega)}{\Omega^3}}{\omega^2 - \Omega^2} d\omega \right) + \\ + \frac{N(\Omega)}{2\Omega^2} \left( \ln \frac{\omega_2 + \Omega}{\omega_1 + \Omega} - \ln \frac{\omega_2 - \Omega}{\Omega - \omega_1} + i\pi \right).$$

Аналогичная формула может быть получена и при  $s \rightarrow -i\Omega + 0$ ,  $\Omega \in [\omega_1, \omega_2]$ .

Если  $s \in (-i\omega_*, -i\omega_2) \cup (i\omega_2, i\omega_*)$ , то  $\sqrt{L(s)} > 0$ . Значит, вклад этих отрезков в асимптотику решения экспоненциально мал. Далее, пусть  $s \in (-i\omega_2, -i\omega_1) \cup (i\omega_1, i\omega_2)$ . Из формулы (3.4) следует, что  $\operatorname{Re}(\sqrt{L(s)}) > 0$ . Таким образом, вклад непрерывного спектра также экспоненциально мал. Итак, достаточно исследовать асимптотику для больших  $t$  интеграла

$$(3.5) \quad p(c, t) = \frac{1}{2\pi} \int M(i\eta) \exp(i\Phi(c, \eta)t) d\eta.$$

$$\Phi(c, \eta) = \eta - c \sqrt{\eta^2 \left( c_f^{-2} + \int_0^\infty \frac{N(\omega) d\omega}{\omega^3 (\omega^2 - \eta^2)} \right)}.$$

В формуле (3.5) интегрирование проводится по вещественной оси с выброшенными отрезками  $(-\omega_*, -\omega_1) \cup (\omega_1, \omega_*)$ . Для оценки интеграла (3.5) воспользуемся методом стационарной фазы (см., например, [22]). Стационарные точки фазы  $\Phi(c, \eta)$  определяются из уравнения

$$(3.6) \quad \frac{1}{c} = \operatorname{sgn}(\eta) \frac{c_f^{-2} + \int_0^\infty \frac{N(\omega) d\omega}{\omega(\omega^2 - \eta^2)^2}}{\sqrt{c_f^{-2} + \int_0^\infty \frac{N(\omega) d\omega}{\omega^3(\omega^2 - \eta^2)}}},$$

которое имеет смысл лишь при  $\eta > 0$ . Это отвечает тому, что решение представляет собой волну, бегущую только вправо. Соотношение (3.6) допускает простую интерпретацию: если  $\eta$  — заданная частота, то  $c$  есть групповая скорость (более подробное обсуждение проведено в [19]). Дисперсионная кривая (зависимость волнового числа  $k$  от частоты  $\eta$ ), построенная в [19], имеет вид, показанный на рис. 2. Кривые  $k(\eta)$  (высоко- и низкочастотная ветви дисперсионной кривой) монотонно возрастают и являются выпуклыми. Кроме того,

$$\lim_{\eta \rightarrow \omega_1 - 0} \frac{dk}{d\eta} = \frac{1}{c_{kp}} < \infty, \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{dk}{d\eta} = \frac{1}{c_e}, \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{dk}{d\eta} = \frac{1}{c_f}.$$

На рис. 2 цифрами 1—3 обозначены прямые с наклонами соответственно  $1/c_{kp}$ ,  $1/c_e$ ,  $1/c_f$ .

Равновесная скорость звука  $c_e = \sqrt{c_f^{-2} + \int_0^\infty \frac{N(\omega) d\omega}{\omega^5}}$  — максимально возможная скорость распространения низкочастотных возмущений. Скорость  $c_{kp}$  (в монодисперсном случае она равна нулю) — минимально возможная групповая скорость распространения низкочастотных возмущений. Если  $c \in (0, c_{kp}) \cup (c_e, c_f)$ , то существует

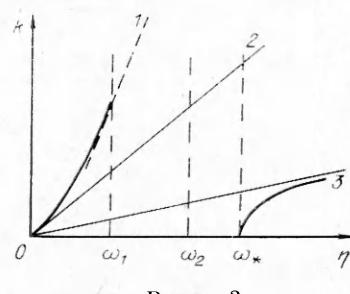


Рис. 2

только одна стационарная точка фазы  $\Phi$ , соответствующая высокочастотным волнам. Если  $c \in [c_{kr}, c_e]$ , то стационарных точек две (одна из них отвечает низкочастотным волнам, другая — высокочастотным). Поскольку дисперсионные кривые выпуклы, то стационарные точки фазы  $\Phi$  не вырождены, т. е. вторая производная от  $\Phi$  по  $\eta$  в них отлична от нуля. Таким образом, вдоль лучей  $x/t = c$  решение  $p(t, x)$  убывает как  $t^{-1/2}$  (см., например, [22]).

Физически довольно очевидно, что наличие диссипации приводит к быстрому затуханию высокочастотных возмущений. Таким образом, наблюдатель, перемещающийся со скоростью  $c$ , лежащей вне интервала  $(c_{kr}, c_e)$ , при больших  $t$  практически будет двигаться по состоянию покоя. Основное возмущение сосредоточится внутри сектора, образованного лучами с наклоном  $c_{kr}$  и  $c_e$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Иорданский С. В. Об уравнениях движения жидкости, содержащей пузырьки газа // ПМТФ.— 1960.— № 3.
2. Когарко Б. С. Одномерное неустановившееся движение жидкости с возникновением и развитием кавитации // ДАН СССР.— 1964.— Т. 155, № 4.
3. Van Wijngaarden L. On the equations of motion for mixtures of liquid and gas bubbles // J. Fluid Mech.— 1968.— V. 33, pt 3.
4. Нигматуллин Р. И. Динамика многофазных сред.— М.: Наука, 1987.— Ч. 1—2.
5. Кутателадзе С. С., Накоряков В. Е. Тепломассообмен и волны в газожидкостных системах.— Новосибирск: Наука, 1984.
6. Заболотская Е. А. Нелинейные волны в жидкости с пузырьками газа // Нелинейные волновые процессы: Тр. ИОФАН.— М.: Наука, 1989.— Т. 18.
7. Шагапов В. Ш. Структура ударных волн в полидисперсной смеси жидкость — пузырьки газа // Изв. АН СССР. Сер. МЖГ.— 1976.— № 6.
8. Kedrinskii V. K. Peculiarities of bubble spectrum behavior in cavitation zone // Proc. Intern. Symp. «Ultrasonic-85», London, UK, 1985.
9. Gasenko V. G., Izergin V. L. Nonlinear waves stochasticisation in a polydisperse gas-liquid mixture// Тр. XI Междунар. симпоз. по нелинейной акустике.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1987.— Ч. II.
10. Matsumoto Y., Nishikawa I., Ohashi I. Numerical simulation of wave phenomena in bubbly liquid // Proc. XVII ICTAM, Grenoble, France, 1985.
11. Изергин В. Л. Уединенные волны сложной структуры в полидисперсных газожидкостных смесях // Изв. АН СССР. Сер. техн. наук.— 1989.— № 1.
12. Гаврилюк С. Л. Существование, единственность и устойчивость по Лаксу бегущих волн в полидисперсной пузырьковой среде с диссипацией // Дифференциальные уравнения с частными производными: Сб. науч. тр.— Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1989.
13. Гаврилюк С. Л., Филько С. А. Ударные волны в полидисперсных пузырьковых средах с диссипацией // ПМТФ.— 1991.— № 5.
14. Кедринский В. К. Распространение возмущений в жидкости, содержащей пузырьки газа // ПМТФ.— 1968.— № 4.
15. Рютов Д. Д. Аналог затухания Ландау в задаче о распространении звуковой волны в жидкости с пузырьками газа // Письма в ЖЭТФ.— 1975.— Т. 22, № 9.
16. Котельников И. А., Ступаков Г. В. Нелинейные эффекты при распространении звуковой волны в жидкости с пузырьками газа // ЖЭТФ.— 1983.— Т. 84, № 3.
17. Максимов А. О. Нелинейное затухание звуковой волны в жидкости с пузырьками газа // ЖТФ.— 1986.— Т. 56, вып. 1.
18. Гумеров И. А. Уравнения, описывающие распространение длинных волн в полидисперсных газовзвесях и пузырьковых жидкостях без фазовых переходов.— М., 1991.— Деп. в ВИНИТИ 1991, № 02.9.10004824.
19. Гаврилюк С. Л. Асимптотика решения задачи Коши для уравнений распространения линейных волн в пузырьковой жидкости с непрерывным распределением пузырьков по размерам.— Новосибирск, 1991.— (Препр./АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики; № 1).
20. Malykh N. V., Ogorodnikov I. A. Structure of pressure pulses // J. Phys.— 1979.— V. 40, N 11.
21. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1987.
22. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны.— М.: Мир, 1977.