

О СКОРОСТИ ГОРЕНИЯ ПОРОХА ПРИ ПЕРЕМЕННОМ ДАВЛЕНИИ<sup>1</sup>

Я. Б. Зельдович

(Москва)

При горении пороха в твердой фазе образуется прогретый слой; толщина слоя зависит от скорости горения, в свою очередь скорость горения связана с профилем температуры в прогретом слое. Можно предвидеть, что при быстром изменении давления прогретый слой не успеет перестроиться и скорость горения окажется зависящей не только от мгновенного давления, но и от кривой его изменения. Проследим зависимость скорости горения от давления при быстрых изменениях давления для некоторых случаев.

В теории горения пороха, развиваемой с 1942 г. [1], было показано, что время релаксации процессов, протекающих в газе, весьма мало по сравнению со временем релаксации (временем изменения) распределения тепла в порохе. Поэтому, если ограничиться рассмотрением промежутков времени, значительных по сравнению со временем релаксации процессов в газе, можно считать, что состояние ближайшего к поверхности слоя газа, в котором сосредоточена химическая реакция, каждый момент находится в соответствии с тепловым состоянием ближайшего к поверхности раздела тонкого слоя  $k$ -фазы (пороха), распределение температуры в более глубоких слоях прямого влияния на процесс, происходящий у поверхности, не оказывает. Если, кроме того, предположить, что зона газификации твердого вещества очень узкая и газификация происходит при постоянной температуре (это соответствует реакции с очень большой энергией активации), то временем релаксации зоны газификации пороха также можно пренебречь и отнести зону газификации к слою газа над поверхностью пороха. Тепловое состояние ближайшей к поверхности пороха части прогретого слоя при этом должно полностью определяться лишь одной величиной — градиентом температуры у поверхности. Эта величина характеризует отвод тепла из газа и зоны газификации в прогретый слой пороха. Таким образом, в каждый момент скорость горения определяется мгновенным значением давления над поверхностью пороха и величиной градиента температуры у поверхности  $\varphi$

$$u = u(p, \varphi) \quad (0.1)$$

Величина  $\varphi$ , так же как и все распределение температуры в порохе, зависит от тех воздействий, которые порох испытал до рассматриваемого момента: это распределение найдем, решая задачу теплопроводности для тела, протяженного в одном направлении и ограниченного с другого направления поверхностью заданной температуры  $T_k$  (температура газификации), движущейся по заданному закону

$$x = x(t), \quad dx/dt = u(t) \quad (0.2)$$

§ 1. Стационарный режим и предел. В частном, наиболее важном случае, когда скорость горения поддерживается постоянной в течение длительного промежутка времени, величина  $\varphi$  стремится к определенному пределу, зависящему от скорости горения и начальной температуры пороха  $T_0$

$$\varphi_c = \varphi_c(u, T_0) = \frac{u}{\kappa} (T_k - T_0) \quad (1.1)$$

где  $\kappa$  — температуропроводность пороха.

Подставляя это выражение для  $\varphi$  в (0.1), получим выражение для определения того единственного значения скорости при данном давлении и начальной температуре, которое должно осуществляться при длительном

<sup>1</sup> Публикуется по материалам отчета ИХФ АН СССР за 1944 г.

поддержании данного давления: это состояние горения назовем стационарным режимом и отметим относящиеся к нему величины индексом  $c$

$$u_c = u [p, \varphi_c(u, T_0)] \quad (1.2)$$

$$u_c = u_c(p, T_0) \quad (1.3)$$

Стационарный режим подчиняется простым соотношениям, следующим из уравнений сохранения, поэтому  $u_c(p, T_0)$  может быть непосредственно выражено через  $p$  и  $T_0$ , тепловые и кинетические свойства пороха и продуктов его газификации без помощи уравнений (0.1), (1.1), (1.2).

Зависимость (1.3) в дальнейшем будем считать установленной соответствующими опытами, в которых скорость горения измерялась при постоянном или достаточно медленно меняющемся давлении и при различных  $T_0$ . Воспользуемся этой зависимостью  $u$  от  $p$  и  $T_0$ , установленной на опыте, для того, чтобы определить зависимость скорости  $u$  от давления и градиента температуры  $\varphi$  (см. формулу (0.1)); температуру газификации  $T_k$  считаем известной и постоянной.

В действительности измерение или вычисление  $T_k$  представляет трудную задачу. Для ее решения необходимо исследовать термическое разложение пороха при высокой температуре, когда это разложение идет с большой скоростью. Постоянство  $T_k$  также, строго говоря, не имеет места. Величина  $T_k$  должна быть такой, чтобы обеспечить скорость газификации, равную скорости горения. Однако, благодаря весьма сильной зависимости скорости газификации от температуры при больших энергиях активации (изменение скорости вдвое при изменении  $T_k$  на  $\sim 5^\circ$ ), значительное изменение скорости горения вызывает лишь малое изменение  $T_k$ , благодаря чему и можно считать  $T_k$  постоянной величиной.

Имея таблицу измеренных величин  $u_c(p, T_0)$  при различных  $p$  и  $T_0$ , по формуле (1.1) подсчитываем для каждой пары значений  $p$  и  $T_0$  величину градиента  $\varphi$ ; сопоставляя относящиеся к этому опыту величины  $u$ ,  $p$  и  $\varphi$ , получим таблицу, выражающую зависимость (0.1).

При  $T_0$ , близком к  $T_k$ , скорость горения стремится к определенному пределу  $u_k$ , величина  $\varphi_c$  согласно (1.1) при этом близка к нулю.

Прямое наблюдение  $u_k$  затруднено вследствие быстрого разложения пороха при температуре, близкой к  $T_k$ ; величина  $u_k$  может быть найдена экстраполяцией к  $T_k$  зависимости  $u$  от  $T_0$ , измеренной при более низких температурах. Как теоретические соображения, так и опытный материал показывают, что скорость горения не возрастает неограниченно при подходе  $T_0$  к  $T_k$ .

При понижении  $T_0$  происходит возрастание  $\varphi$  за счет увеличения  $T_k - T_0$ ; это возрастание замедляется одновременным падением скорости  $u$ . (Понижение  $T_0$  уменьшает температуру горения пороха  $T_b$ , скорость горения зависит от  $T_b$  как  $\exp(-E/2RT_b)$ ). То значение  $T_0$ , при котором  $\varphi$  достигает максимума, представляет естественный предел стационарного горения; условие это легко сформулировать математически (все производные — при постоянном давлении)

$$\frac{\partial \varphi_c}{\partial T_0} = \frac{T_k - T_0}{\alpha} \left( \frac{\partial u_c}{\partial T_0} \right)_p - \frac{u_c}{\alpha} = 0, \quad \frac{1}{u_c} \left( \frac{\partial u_c}{\partial T_0} \right)_p = \frac{1}{T_k - T_0} \quad (1.4)$$

В работе [1] теория предела была рассмотрена в определенных предположениях о виде зависимости  $u_c(p, T_0)$ , связанных с химической кинетикой реакции горения. Преимуществом формулировки (1.4) будет пользование одной лишь константой  $T_k$  сверх экспериментально изученной зависимости  $u_c(p, T_0)$ .

В дальнейшем везде будем полагать, что находимся выше предела, при таком  $T_0$ , при котором стационарное горение при постоянном давлении устойчиво и возможно, для чего должно быть выполнено неравенство

$$\frac{1}{u_c} \left( \frac{\partial u_c}{\partial T_0} \right)_p < \frac{1}{T_k - T_0} \quad (1.5)$$

Одновременно формула (1.4) позволяет определить и само максимальное значение  $\varphi$ , при котором (при данном давлении) возможно горение в газовой фазе; для этого подставляем значение  $T_0$ , найденное из (1.4), и соответствующее  $u_c$  в формулу (1.1). Это максимальное значение градиента, ранее [1] обозначенное  $\varphi_B$ , играет важную роль: для воспламенения пороха необходимо прогреть его так, чтобы при температуре поверхности  $T_k$  градиент был бы меньше  $\varphi_B$ . Напротив, если в ходе горения достигается градиент  $\varphi > \varphi_B$  (например, за счет падения давления, вызывающего уменьшение  $\varphi_B$ ), то происходит затухание пороха, горение прекращается. Выражение (1.5) является общим. Полагая постоянной производную

$$\frac{1}{u_c} \left( \frac{\partial u_c}{\partial T_0} \right)_p = \left( \frac{\partial \ln u_c}{\partial T_0} \right)_p = \beta \quad (1.6)$$

найдем зависимость  $u_c$  от  $T_0$ , интегрируя (1.6)

$$u_c(T_0) = \text{const } e^{\beta T_0} \quad (1.7)$$

Неравенство (1.5) можно будет в этом случае переписать так

$$\beta (T_k - T_0) < 1 \quad (1.8)$$

$$u_k/u_c = e^{\beta(T_k - T_0)} < e \quad (1.9)$$

$$u_c > u_k/e = 0.37u_k \quad (1.10)$$

В последнем виде условие устойчивости горения и было найдено в работе [1] в определенных предположениях о кинетике реакции горения, которые приближенно привели к зависимости вида (1.7).

Подставляя выражения  $T_0$  и  $u_c$  на пределе устойчивости в (1.1), определим критическое значение градиента

$$\varphi_B = \frac{u_k}{\beta u_c} \quad (1.11)$$

Отношение критического градиента  $\varphi_B$  к стационарному при данном давлении зависит от произведения  $\beta (T_k - T_0)$ , определяющего «запас устойчивости» горения

$$\frac{\varphi_B}{\varphi_c} = \frac{1}{\beta (T_k - T_0)} e^{[\beta (T_k - T_0) - 1]} \quad (1.12)$$

**§ 2. Весьма быстрое изменение давления.** Формула (1.3) при постоянном  $T_0$  дает зависимость скорости горения от давления при весьма медленном изменении давления и полностью происходящей перестройке слоя. В противоположном крайнем случае весьма быстрого изменения давления слой совершенно не успевает перестроиться; таким образом, искомая зависимость  $u$  от  $p$  при весьма быстрых изменениях  $p$  дается функцией  $u(p, \varphi)$  (формула (0.1)) при постоянном  $\varphi$ . Описанный в предыдущем параграфе способ перехода от  $u_c(p, T_0)$  к  $u(p, \varphi)$  в принципе полностью разрешает поставленный вопрос. Наряду с функциональной зависимостью представляет большой интерес сравнение частных производных

$$\left( \frac{\partial u_c}{\partial p} \right)_{T_0}, \quad \left( \frac{\partial u_c}{\partial p} \right)_{\varphi}$$

Составим выражение полного дифференциала (1.3) и (1.1)

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)_{T_0} dp + \left(\frac{\partial u}{\partial T_0}\right)_p dT_0 = v \frac{u}{p} dp + \beta u dT_0 \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} d\varphi &= \frac{T_k - T_0}{\kappa} du - \frac{u}{\kappa} dT_0 = \frac{\varphi}{u} du - \frac{\varphi}{T_k - T_0} dT_0 = \\ &= v \frac{\varphi}{p} dp - \left(\frac{1}{T_k - T_0} - \beta\right) \varphi dT_0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$v = \frac{p}{u} \left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)_{T_0} = \left(\frac{\partial \ln u}{\partial \ln p}\right)_{T_0} \quad (2.3)$$

$$\beta = \frac{1}{u} \left(\frac{\partial u}{\partial T_0}\right)_p = \left(\frac{\partial \ln u}{\partial T_0}\right)_p \quad (2.4)$$

Величина  $v$  представляет собой значение показателя в степенном законе горения: полагая

$$u = u_1 p^v \quad (2.5)$$

получим как раз выписанное выше уравнение для  $v$ . Однако расчет не основывается на специальном предположении о правильности степенного закона горения, так как не обязательно предположение, что  $v$  постоянно; выражение (2.3) для  $v$  можно написать для любого закона с той только разницей, что при законе горения, отличном от (2.5), показатель  $v$  — величина переменная. Так, для линейного закона найдем

$$u = a + bp, \quad v = \frac{p}{u} \frac{\partial u}{\partial p} = \frac{bp}{a + bp} \quad (2.6)$$

Величину температурного коэффициента скорости горения  $\beta$  также не считаем постоянной и, таким образом, не ограничиваемся частным случаем какой-либо определенной зависимости  $u$  от  $T_0$ .

При помощи (2.2) выразим  $dT_0$  через  $dp$  и  $d\varphi$  и подставим в (2.1). Найдем после простых преобразований

$$du = \frac{v}{1 - \beta(T_k - T_0)} \frac{u}{p} dp - \frac{\beta(T_k - T_0)}{1 - \beta(T_k - T_0)} \frac{u}{\varphi} d\varphi \quad (2.7)$$

Сопоставляя (2.7) с выражением полного дифференциала

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)_\varphi dp + \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)_p d\varphi \quad (2.8)$$

найдем

$$\left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)_\varphi = \frac{v}{1 - \beta(T_k - T_0)} \frac{u}{p} \quad (2.9)$$

или

$$\left(\frac{\partial \ln u}{\partial \ln p}\right)_\varphi = \frac{p}{u} \left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)_\varphi = \frac{v}{1 - \beta(T_k - T_0)} \quad (2.10)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)_p = -\frac{\beta(T_k - T_0)}{1 - \beta(T_k - T_0)} \frac{u}{\varphi} \quad (2.11)$$

Формулы (2.9) и (2.10) отвечают на вопрос о законе изменения скорости горения при весьма быстром изменении давления: в этом случае, при постоянном  $\varphi$ , производная скорости по давлению оказывается больше в отношении  $1 / [1 - \beta(T_k - T_0)]$  по сравнению с производной скорости по давлению при медленном изменении давления. В том же отношении увеличивается и эффективное значение показателя в степенном законе при быстром изменении давления. Как видно из формул, величина  $\beta(T_k - T_0)$ ,

с которой сталкиваемся в теории предела устойчивости горения (формулы (1.5) — (1.8)), играет роль и здесь. Чем ближе к пределу находится система — условие предела  $\beta(T_k - T_0) = 1$  — тем она лабильнее, тем большие изменения скорости вызывает быстрое изменение давления.

Как известно, во внутренней баллистике реактивных систем значение показателя закона горения имеет важнейшее значение; для возможности устойчивого горения в полужамкнутом объеме необходимо  $\nu < 1$ . Из сказанного видно, что порох, удовлетворяющий этому условию при медленном изменении давления, может при быстром изменении давления дать эффективный показатель больше единицы.

В полужамкнутом объеме в условиях, допускающих быстрое изменение давления, можно ожидать неустойчивого горения. Устойчивость режима горения пороха в камере реактивного снаряда была подробно рассмотрена автором методом малых возмущений [2]. В этой работе были также получены формулы (2.7) — (2.11).

Наконец в предположении постоянных температурного коэффициента скорости горения  $\beta$  и показателя  $\nu$  найдем, во сколько раз должно мгновенно упасть давление для того, чтобы произошло затухание.

Для этого поставим такое условие: градиент  $\varphi(p_1)$ , который отвечает стационарному горению при начальном давлении  $p_1$ , должен быть равен или больше критического  $\varphi_B(p_2)$ , вызывающего затухание при давлении  $p_2$ . Пользуясь (1.12), (1.1) и (2.5), найдем

$$\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^\nu = \frac{1}{\beta(T_k - T_0)} e^{\beta(T_k - T_0) - 1} \quad (2.12)$$

Приводим отношение  $p_1/p_2$ , вычисленное в предположении  $\nu = 2/3$ , для различных значений  $\beta(T_k - T_0)$

$\beta(T_k - T_0)$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$(p_1/p_2)^\nu$	$\infty$	2.25	1.38	1.12	1.025	1.0
$p_1/p_2$	$\infty$	3.40	1.62	1.18	1.04	1.0

**§ 3. Графическое представление соотношений предыдущих параграфов.** Введенные выше соотношения могут быть иллюстрированы схемами, облегчающими понимание качественной стороны дела.

На фиг. 1 изображено распределение температуры у поверхности пороха. Градиент температуры  $\varphi$  зависит от угла наклона  $\alpha$  касательной, проведенной к кривой в точке  $A$  ( $x = 0, T = T_k, \varphi = \text{tg } \alpha$ ). На этой же фигуре показаны два способа определения толщины слоя. Строго говоря, температура лишь асимптотически стремится к  $T_0$  при увеличении  $x$ , так что даже в далекой от поверхности точке  $E$  температура, хотя и незначительно, но отличается от  $T_0$ ; поэтому о толщине слоя можно говорить лишь условно. Первый способ определения условной толщины заключается в том, что в точке  $A$  проводится касательная и находится точка пересечения ее  $C$  с линией  $BCE$ , на которой  $T = T_0$  ( $\Delta x_1 = (T_k - T_0)/\varphi$ ). Вторым способом заключается в построении прямоугольника  $ABCD$ , такого, чтобы его площадь была равна площади  $ABCE$ , ограниченной кривой  $T(x)$  и линией  $T = T_0$

$$\Delta x_2 = \int_0^\infty \frac{(T - T_0)}{T_k - T_0} dx$$

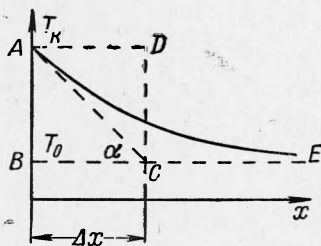
В рассматриваемом случае при распределении температуры (4.1) оба определения  $\Delta x$  совпадают и дают  $\Delta x = \kappa/u$ .

Распределение температуры (фиг. 1) получается при длительном поддержании постоянного давления и при заданной постоянной температуре

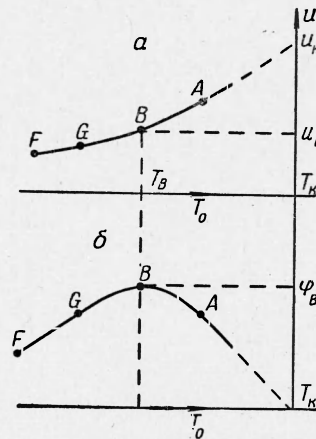


в глубине пороха  $T_0$ . При том же давлении, но при другой температуре  $T_0'$ , порох будет гореть с другой скоростью, иным будет распределение температуры и величина градиента  $\varphi$ . На фиг. 2 кривые (а) и (б) дают соответственно зависимости  $u(T_0)$  и  $\varphi(T_0)$  при постоянном давлении, отвечающие стационарному горению.

Довести  $T_0$  до  $T_k$  практически невозможно вследствие того, что порох быстро разлагается уже при более низкой температуре, поэтому соответствующие части кривых показаны пунктиром<sup>1</sup>.



Фиг. 1



Фиг. 2

Экстраполированное к  $T_k$  значение скорости обозначено  $u_k$ .

Кривая  $\varphi_c(T_0)$  проходит через максимум с координатами  $T_B$ ,  $\varphi_B$ . Соответствующее  $T_B$  значение скорости обозначено  $u_B = u_c(T_B)$ .

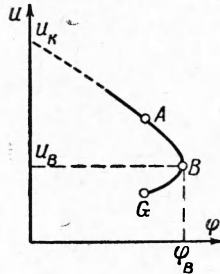
Построим график  $u$  в зависимости от  $\varphi$  при данном давлении (фиг. 3): для этого задаемся различными значениями  $T_0$  и откладываем в плоскости  $u\varphi$  соответствующие  $u(T_0)$  и  $\varphi(T_0)$ . Процесс этот легко проследить по точкам  $A, G, B$ . Общие соображения теории показывают, что зависимость  $u$  от  $\varphi$  при данном давлении должна быть одной и той же, независимо от того, является ли процесс в целом стационарным, т. е. независимо от распределения температуры в более глубоких слоях пороха и независимо от того, будет ли в ходе горения сохраняться постоянная величина  $\varphi$ . Фиг. 3 наглядно показывает: 1) при  $\varphi > \varphi_B$  нет никакой соответствующей скорости, т. е. горение невозможно и 2) при  $\varphi < \varphi_B$  каждому  $\varphi$  отвечают две возможные скорости горения (см., например, точки  $A$  и  $G$ ). Отрезок  $BG$  кривой фиг. 3 в действительности не осуществляется и должен быть отброшен. Следовательно, невозможно и стационарное горение при температуре  $T_0 < T_B$  (на фиг. 2 соответствующие части кривых  $BGF$  получены экстраполяцией или расчетом). Как представить себе эту невозможность?

На фиг. 4 и 5 сплошными линиями даны распределения температуры, отвечающие точкам  $A$  и  $G$ , в которых  $\varphi$  одинаковы при различных  $T_0$  и  $u$ .

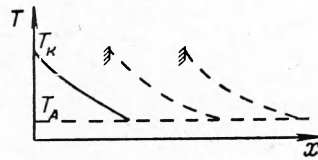
В режиме  $A$ , которому отвечает фигура 4, стационарное горение устойчиво; с течением времени распределение как целое перемещается в глубь пороха, причем сохраняются без изменения и ширина теплового слоя, и градиент  $\varphi$  — см. пунктирные кривые фиг. 4. В режиме  $G$  стационарное горение было бы возможно, если бы оно происходило с малой скоростью. Но градиенту  $\varphi$  в этом режиме отвечает и вторая возможная скорость — такая же, как в режиме  $A$ , так как градиенты одинаковы. Осуществится именно эта, большая скорость; но распределение температуры не находит-

<sup>1</sup> К температуре  $T_k$  удастся ближе подойти при изучении горения легкокипящих вторичных взрывчатых веществ, например, метилнитрата.

ся в соответствии с большей скоростью, по мере горения глубокие слои не успевают прогреться, распределение становится более крутым и градиент  $\varphi$  растет. Когда он достигает  $\varphi_B$ , горение прекращается. Таким образом, если подготовить порох весьма низкой температуры  $T_G$  к соответствующему медленному горению, создав для этого весьма глубокий прогретый слой



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

(фиг. 5), то на деле вместо медленного горения произойдет быстрая вспышка, прогретый слой окажется израсходованным и порох затухнет.

Нанесем на одном графике кривые зависимости  $u(\varphi)$ , относящиеся к различным давлениям (фиг. 6); при этом изображаем лишь реально осуществляемую верхнюю часть каждой кривой.

Считая  $T_k$  постоянным, как мы это делали во всех расчетах, заметим, что точки, описывающие стационарное горение при различных давлениях,

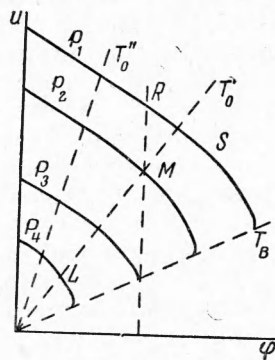
но при одной и той же начальной температуре пороха  $T_0$  располагаются на прямых, выходящих из начала координат: из (1.1) следует, что отношение

$$\frac{u_c}{\varphi_c} = \frac{\kappa}{T_k - T_0}$$

постоянно на линиях  $T_0 = \text{const}$ .

Если, например, при температуре пороха  $T_0'$  давление медленно растет от  $p_2$  до  $p_1$ , то порох горит при каждом давлении стационарно. На фиг. 6 точка, изображающая режим горения, перемещается из  $M$  в  $S$  (slow — медленное изменение давления): повышение давления сопровождается ростом скорости горения и перестройкой слоя, вызывающей увеличение градиента температуры  $\varphi$ . Быстрое изменение давления сопровождается без перестройки слоя, при постоянном  $\varphi$ ; изменение скорости изображается отрезком  $MR$  (rapid — быстрое изменение давления). Как видно из фиг. 6, увеличение скорости при этом больше. При давлении  $p_1$  в первый момент порох горит так, как будто его температура выше, чем на самом деле. Различие между изменением скорости по лучу ( $T_0 = \text{const}$ ) и по вертикали ( $\varphi = \text{const}$ ) минимально при  $T_0$ , близком к  $T_k$  (луч  $T_0 = T_k$  на фиг. 6 совпадает с осью ординат) и возрастает при приближении к пределу ( $T_0 \rightarrow T_B$ ) в соответствии с формулой (2.10).

При уменьшении давления также изменение (уменьшение) скорости больше в случае быстрого процесса, чем в случае медленного. Как видно из фиг. 6, при быстром падении давления, например, от  $p_2$  (точка  $M$ ) до  $p_4$ , мы не найдем никакого решения: то  $\varphi$ , которое было стационарным при



Фиг. 6

$p_2$ , превышает максимальное  $\varphi_B$  при давлении  $p_4$ . При медленном изменении давления мы перейдем в точку  $L$ , соответствующую стационарному режиму горения при давлении  $p_4$ . Таким образом, на фиг. 6 объясняется затухание пороха при быстром падении давления.

Как видно из фигуры, чем выше начальная температура пороха, тем ниже должно быть конечное давление для достижения затухания (ср. с данными § 2).

**§ 4. Малые изменения давления.** Поставим задачу о законе изменения скорости горения при произвольных малых изменениях давления. В этом случае можно будет изменение скорости горения и изменение распределения температуры в порохе также считать малыми и ограничиваться первыми членами разложений в ряды.

При постоянной скорости горения распределение температуры в прогретом слое пороха (рассмотрение проводится в системе координат, в которой поверхность пороха перемещается с постоянной скоростью — скоростью горения  $u_0$ ) имеет вид:

$$T = T_0 + (T_k - T_0) \exp \left[ - \frac{u_0}{\kappa} (x - u_0 t) \right] \quad (4.1)$$

Найдем теперь распределение температуры, отличающееся на малое слагаемое от распределения (4.1). Добавочное малое слагаемое возьмем также в виде  $A e^{mx+nt}$ . Из уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (4.2)$$

и граничного условия  $T = T_0$  при  $x \rightarrow \infty$  находим  $n = \kappa m^2$ ,  $m < 0$ .

Задавая положение поверхности горящего пороха как поверхности, на которой  $T = T_k$ , определяем закон движения горячей поверхности ( $A$  полагаем малым):

$$x|_{T=T_k} = u_0 t + \frac{A}{T_k - T_0} \frac{\kappa}{u_0} e^{(mu_0 + \kappa m^2) t} \quad (4.3)$$

Скорость горения пороха

$$u = \frac{dx}{dt} \Big|_{T=T_k} = u_0 + (mu_0 + \kappa m^2) \frac{A}{T_k - T_0} \frac{\kappa}{u_0} e^{(mu_0 + \kappa m^2) t} \quad (4.4)$$

Градиент температуры у поверхности пороха

$$\varphi = - \frac{dT}{dx} \Big|_{T=T_k} = \frac{u_0}{\kappa} (T_k - T_0) - A \left( \frac{u_0}{\kappa} + m \right) e^{(mu_0 + \kappa m^2) t} \quad (4.5)$$

Соотношения (4.3) — (4.5) были получены также в работе [2], посвященной исследованию устойчивости горения пороха в камере ракетного двигателя.

Обозначим  $p_0$  то давление, при котором достигается

$$u = u_0 \quad \text{при} \quad \varphi = \varphi_0 = \frac{u_0}{\kappa} (T_k - T_0) \quad (4.6)$$

Тогда при помощи (2.8), (2.9), (2.11) найдем закон изменения давления, подставляя

$$du = \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)_p d\varphi + \left( \frac{\partial u}{\partial p} \right)_\varphi dp, \quad dp = \frac{du - (\partial u / \partial \varphi)_p d\varphi}{(\partial u / \partial p)_\varphi} \\ p - p_0 = \frac{u - u_0 - (\partial u / \partial \varphi)_p (\varphi - \varphi_0)}{(\partial u / \partial p)_\varphi} \quad (4.7)$$

$$p = p_0 + \frac{p_0}{u_0 v} \frac{\kappa}{T_k - T_0} \left\{ m + \frac{\kappa m^2}{u_0} [1 - \beta (T_k - T_0)] - \right. \quad (4.8) \\ \left. - \beta (T_k - T_0) \left( \frac{u_0}{\kappa} + 2m \right) \right\} A \exp [(mu_0 + \kappa m^2) t]$$



Если положить

$$p = p_0 + Pe^{\omega t} \quad (4.9)$$

и выразить  $m$  и  $A$  через  $\omega$  и  $P$ , то для скорости найдем

$$u = u_0 + \frac{\nu u_0}{p_0} \frac{Pe^{\omega t}}{1 - \beta (T_k - T_0) (2\Omega + 1 - \sqrt{1 + 4\Omega}) / 2\Omega} \quad \left( \Omega = \frac{\omega \kappa}{u_0^2} \right) \quad (4.10)$$

Формула (4.10) правильна для любых, в том числе и комплексных или чисто мнимых значений  $\Omega$ ; при этом комплексное отношение изменения скорости к изменению давления указывает на сдвиг фазы между колебаниями давления и вызванными ими колебаниями скорости горения.

Формула (4.10) включает в себе рассмотренные ранее предельные случаи

$$u - u_0 = \nu \frac{u_0}{p_0} (p - p_0) \quad \text{при } \omega \rightarrow 0 \quad (4.11)$$

$$u - u_0 = \frac{\nu u_0 (p - p_0)}{p_0 [1 - \beta (T_k - T_0)]} \quad \text{при } \omega \rightarrow \infty \quad (4.12)$$

в согласии с (2.8) — (2.11).

Полагая  $\omega$  малым

$$\omega \ll \frac{u_0^2}{\kappa}, \quad \Omega \ll 1 \quad (4.13)$$

разложим (4.10) в ряд и удержим член, содержащий  $\omega$ .

Найдем

$$u = u_0 + \frac{\nu u_0}{p} Pe^{\omega t} + \frac{\nu u_0}{p_0} \frac{\omega \kappa}{u_0^2} \beta (T_k - T_0) Pe^{\omega t} \quad (4.14)$$

Замечая, что

$$u_0 + \frac{\nu u_0}{p_0} Pe^{\omega t} = u_c(p), \quad \frac{\nu u_0}{p} = \left( \frac{\partial u_c}{\partial p} \right)_{T_0}, \quad \omega Pe^{\omega t} = \frac{dp}{dt} \quad (4.15)$$

перепишем (4.14) в окончательном виде

$$u = u_c(p) + \left( \frac{\partial u_c}{\partial p} \right)_{T_0} \beta (T_k - T_0) \frac{\kappa}{u_c^2} \frac{dp}{dt} \quad (4.16)$$

или, подставляя выражение  $\beta$  в виде (2.4)

$$u = u_c(p) + \left( \frac{\partial u_c}{\partial p} \right)_{T_0} \left( \frac{\partial u_c}{\partial T_0} \right)_p \frac{\kappa (T_k - T_0)}{u_c^3} \frac{dp}{dt} \quad (4.17)$$

Формулы (4.16) — (4.17) дают ответ на вопрос об отступлении скорости горения в случае переменного давления от скорости  $u_c(p)$ , достигаемой при том же давлении, если длительно поддерживать это давление постоянным. Это отступление пропорционально производной давления по времени. Легко убедиться, что формулы применимы не только для простого экспоненциального (или гармонического в случае мнимой  $\omega$ ) закона изменения давления со временем, но и для любого закона  $p(t)$ , так как его всегда можно представить в виде

$$p(t) = p_0 + \sum P_n e^{\omega_n t}$$

В силу линейности, каждое слагаемое в давлении дает соответствующее слагаемое в скорости. Напомним, однако, что все расчеты настоящего параграфа проведены в предположении, что изменения давления, скорости и других величин малы, а при выводе (4.16) — (4.17) мы ограничивались к тому же низкими частотами. Таким образом, формулы (4.16) — (4.17) применимы лишь к плавным кривым зависимости давления от времени, не содержащим высокочастотных компонентов (см. условие (4.13)).

§ 5. Горение и затухание при падающем давлении. Решение задачи о горении при переменном давлении при любом законе зависимости  $p(t)$  в предыдущем параграфе удалось найти в предположении малых изменений.

Найдем при помощи теории размерностей критерий, определяющий роль нестационарных явлений при любых изменениях давления. От этого критерия должны зависеть не только отступления скорости от ее стационарного значения, но и наличие или отсутствие затухания пороха, наступающего при достаточно быстром и глубоком падении давления. Искомый критерий должен отражать соотношение между скоростью изменения давления и тем временем, которое необходимо, чтобы после изменения давления тепловой слой успел бы перестроиться в соответствии с новыми условиями горения — т. е. временем релаксации.

Время релаксации  $\tau$  прогретого слоя пороха можно определить, зная его толщину  $\Delta x$ , либо как время, в течение которого сгорает слой такой толщины  $\tau = \Delta x / u$ , либо как время выравнивания температуры в слое данной толщины  $\tau = (\Delta x)^2 / \kappa$ . Подставляя выражение  $\Delta x = \kappa / u$ , следующее из решения тепловой задачи (4.1), можно убедиться в том, что оба определения времени релаксации  $\tau$ , данные выше, совпадают и дают

$$\tau = \frac{\kappa}{u^2} \quad (5.1)$$

Скорость изменения давления характеризуется, очевидно, производной  $dp/dt$ . Для того чтобы построить безразмерный критерий, составим относительное изменение давления за время релаксации

$$B = \frac{\tau}{p} \frac{dp}{dt} = \frac{\kappa}{u_c^2 p} \frac{dp}{dt} \quad (5.2)$$

Приняв степенной закон горения  $u_c = u_1 p^\nu$ , получим другое выражение критерия

$$B = \frac{\kappa}{u_1^2} p^{-1-2\nu} \frac{dp}{dt} = - \frac{\kappa}{2\nu} \frac{d(u_c^{-2})}{dt} \quad (5.3)$$

Этот критерий, а также безразмерные константы пороха  $\nu$  и  $\beta (T_k - T_0)$  определяют при нестационарных явлениях изменение скорости и самогорение или затухание пороха.

Выведенная выше для малых и медленных изменений давления формула (4.16) может быть записана при помощи критерия  $B$  в виде

$$\frac{u}{u_c} = 1 + \nu\beta (T_k - T_0) B, \quad |B| \ll 1 \quad (5.4)$$

Для случая падающего давления ( $B < 0$ ) решим задачу, полагая  $B$  любым (не малым). Задавшись определенным значением  $B$ , следует ожидать, что

$$\frac{u}{u_c} = \psi(B) \quad (5.5)$$

будет постоянной величиной, которую и нужно определить. Постоянное  $B$  отвечает определенному закону изменения давления, который получим интегрированием (5.3)

$$p^{-2\nu} = - \frac{2\nu u_1^2 B}{\kappa} t \quad (5.6)$$

Отсюда находим закон изменения скорости горения

$$u = u_1 p^\nu \psi = \frac{\psi}{\sqrt{-2\nu B}} \sqrt{\frac{\kappa}{t}} \quad (5.7)$$

и закон движения горячей поверхности

$$x = \int u dt = \frac{2\psi}{\sqrt{-2\nu B}} \sqrt{\kappa t} = 2C \sqrt{\kappa t} \quad \left( C \equiv \frac{\psi(B)}{\sqrt{-2\nu B}} \right) \quad (5.8)$$

Таким образом, постоянное отрицательное значение  $B$  отвечает движению горячей поверхности, при котором пройденный путь пропорционален корню квадратному из времени движения. Решение уравнения теплопроводности, в котором температура зависит от отношения  $x/\sqrt{\kappa t}$  (в частности  $T = T_k$  при  $x/\sqrt{\kappa t} = 2C$ ), легко найти, подставляя  $T = T(x/\sqrt{\kappa t})$  в уравнение (4.2). При этом (4.2) превратится в обыкновенное дифференциальное уравнение. Решая последнее, найдем

$$T = T_0 + D \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} \right) \right] \quad \left( \operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\zeta^2} d\zeta \right) \quad (5.9)$$

Константу интегрирования  $D$  определим из условия

$$x = 2C\sqrt{\kappa t} \quad T = T_k = T_0 + D \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} \right) \right], \quad D = \frac{T_k - T_0}{1 - \operatorname{erf} C} \quad (5.10)$$

Для градиента температуры у поверхности получим

$$\varphi = - \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{T_k} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} D \frac{e^{-C^2}}{2\sqrt{\kappa t}} = \frac{T_k - T_0}{\sqrt{\kappa t}} \frac{e^{-C^2}}{\sqrt{\pi}(1 - \operatorname{erf} C)} \quad (5.11)$$

Три величины  $u$ ,  $p$ ,  $\varphi$  связаны между собой одним уравнением зависимости скорости горения от давления и градиента температуры (0.1). Если скорость стационарного горения пороха связана с начальной температурой  $T_0$  и давлением  $p$  по формулам (1.7) и (2.5), то для зависимости (0.1), пользуясь методом, описанным в § 1, можно получить

$$\frac{u}{u_c} = \exp \left[ \beta(T_k - T_0) \left( 1 - \frac{\varphi}{\varphi_c(p)} \frac{u_c(p)}{u} \right) \right] \quad (5.12)$$

Подставляя для  $u$ ,  $\varphi$  их выражения (5.7), (5.11), получим уравнение, решение которого дает изменение скорости  $\psi$  в зависимости от скорости падения давления, характеризуемой величиной  $B$ , и констант пороха  $\nu$ ,  $\beta(T_k - T_0)$

$$\psi = \exp \left[ \beta(T_k - T_0) \left( 1 - \frac{e^{-C^2}}{\sqrt{\pi} C (1 - \operatorname{erf} C)} \right) \right], \quad C = \frac{\Psi(B)}{\sqrt{-2\nu B}} \quad (5.13)$$

Как и следовало ожидать, при малых  $B$  решение (5.13) совпадает с выражением (5.4), выведенным ранее другим способом. Наиболее интересен вопрос о скорости падения давления, вызывающей затухание, и соответствующем значении  $B$ . Для его определения воспользуемся выражением скорости горения  $u_B$  на пределе устойчивости горения и сравним его со стационарной при данном давлении см. (1.9)–(1.10)

$$u_B = \frac{u_k}{e}, \quad u_c = u_k e^{-\beta(T_k - T_0)}, \quad \psi_B = \frac{u_B}{u_c} = e^{\beta(T_k - T_0) - 1} \quad (5.14)$$

Подставляя это выражение в (5.13), получим уравнение, решение которого дает критическое значение  $B_B$ , приводящее к затуханию:

$$\exp [\beta(T_k - T_0) - 1] = \exp \left[ \beta(T_k - T_0) \left( 1 - \frac{\exp(-C^2)}{\sqrt{\pi} C (1 - \operatorname{erf} C)} \right) \right] \quad (5.15)$$

Отсюда

$$\beta(T_k - T_0) \exp(-C^2) = \sqrt{\pi} C (1 - \operatorname{erf} C) \quad (5.16)$$

Задаваясь различными значениями вспомогательной величины  $C$ , получим соответствующие значения  $\beta(T_k - T_0)$ ,  $\psi$  и  $B$ . Вычисления дают

$C$	0	0.2	0.5	1.0	1.5	$\infty$
$\beta(T_k - T_0)$	0	0.285	0.55	0.76	0.855	1.0
$-\nu B_B$	$\infty$	3.0	0.82	0.31	0.167	0.0

Как видно из уравнений и полученных данных, для скорости горения и условия затухания существенно произведение  $vB$ ; чем больше зависимость скорости горения от давления, тем меньшая скорость падения давления  $B$  вызывает равное действие.

§ 6. Сопоставление с опытом. Одним из выводов развитой теории горения порохов и конденсированных взрывчатых веществ [1] является вывод о том, что устойчивое стационарное горение пороха возможно, если только безразмерная величина  $\beta (T_k - T_0)$  меньше или равна единице. Опыты К. К. Андреева по горению нитрогликоля при низких температурах, по-видимому, подтверждают это. Имеются, однако, экспериментальные данные, свидетельствующие о том, что критерий устойчивости горения не всегда выполняется. Приведем, например, данные по величине  $\beta (T_k - T_0)$  для пороха *H*. Для этого воспользуемся значениями температурного коэффициента скорости горения этого пороха, полученными в работе [3], и величиной температуры поверхности пороха согласно данным А. А. Зенина. Ниже в таблице сведены эти данные для разных давлений:

$P_{\text{атм}}$	10	20	50
$\beta \cdot 10^3$	5.1	8.2	8.2
$T_k - T_0$	300	360	400
$\beta (T_k - T_0)$	1.53	2.88	3.28

Расхождение теории с экспериментом свидетельствует об ограниченности теории, причина которой заключается в идеализации механизма горения пороха. В частности, в теории было использовано идеализированное представление зоны газификации пороха: предполагалось, что энергия активации реакции газификации очень велика, так что реакция происходит в узкой безынерционной зоне при постоянной температуре, не зависящей от скорости горения. В действительности, зона реакции имеет конечную толщину и инерционность; температура поверхности, хотя и мало изменяется при изменении скорости горения, может существенно влиять на градиент температуры у поверхности. Эти факторы сказываются на величине критерия устойчивости горения. Из физических соображений можно предполагать, что полный учет реакции в конденсированной фазе приведет к смягчению нестационарных эффектов и к увеличению устойчивости горения пороха.

Интересны опыты по прерыванию горения пороха.

В опытах Г. А. Барского и О. И. Лейпунского, сделанных в ИХФ АН СССР в сороковых годах, заряд горел в камере с соплом, снабженной откидной заслонкой. Удар падающего груза по крюку освобождал заслонку. Давление падало от 100—200  $\text{кг/см}^2$  до атмосферного за время  $\Delta t$  меньше 0.1 сек. Скорость горения пороха при атмосферном давлении была около 0.04  $\text{см/сек}$ . Подставляя эти значения в выражение (5.6) закона изменения давления при постоянном  $B$ , найдем (примем  $\kappa = 2 \cdot 10^{-3} \text{ см}^2/\text{сек}$ )

$$-Bv = \frac{\kappa (p_{00}^{-2\nu} - p_0^{-2\nu})}{2u_1^2 \Delta t} = \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 1}{2 \cdot 0.04^2 \cdot 0.1} \approx 6 \quad (6.1)$$

Здесь  $p_0$  — начальное давление,  $p_{00}$  — конечное давление.

Согласно данным § 5, такая скорость падения давления в несколько раз превышает необходимую для затухания пороха величину (при  $\beta (T_k - T_0) = 0.5 - Bv \approx 1$ ). Этот вывод согласуется с тем фактом, что в опытах Г. А. Барского и О. И. Лейпунского действительно достигалось прекращение горения.

Некоторые сведения об экспериментах по затуханию пороха опубликованы в последнее время [4,5]. В опытах Прайса [4] было получено,

что глубина сброса давления, необходимая для затухания, растет с увеличением начального давления в камере сгорания. Этот результат согласуется с формулой (2.12). В работе Сиплача [5] изучалось прерывание горения смесового пороха ( $\nu = 0.337$ ). Скорость падения давления  $dp/dt$ , потребная для затухания, оказалась, грубо говоря, пропорциональной начальному давлению. Это также находится в качественном согласии с теорией (см. формулу (5.3)).

После затухания возможно повторное воспламенение пороха из-за контакта поверхности с горячими газами или из-за теплоподвода излучением. Если порох прогревается горячим газом путем кондуктивной теплопроводности, то легко убедиться, что разогрев поверхности пороха будет невелик. Как известно из теории теплопроводности [6] (стр. 88), температура на границе контакта двух сред 1 и 2, имевших вначале постоянные по всей массе температуры  $T_1$  и  $T_2$ , при распространении тепла остается постоянной и равняется

$$T_k = \frac{T_2 + T_1 \sqrt{(\lambda \rho c_p)_1 / (\lambda \rho c_p)_2}}{1 + \sqrt{(\lambda \rho c_p)_2 / (\lambda \rho c_p)_1}} \quad (6.2)$$

( $\lambda$ ,  $c_p$ ,  $\rho$  — соответственно теплопроводность, теплоемкость и плотность сред). Положим, что среда 1 — газ, температура газа равна температуре горения пороха  $T_1 = 2400^\circ \text{K}$ , а среда 2 — порох, температура пороха равна начальной  $T_2 = 300^\circ \text{K}$ . Отношение плотности газа к плотности пороха будем считать равной  $4 \cdot 10^{-3}$ , что соответствует давлению в камере сгорания  $\sim 50 \text{ атм}$ . Теплоемкость пороха  $c_{p_2} = 0.36 \text{ кал/г} \cdot \text{град}$ , газа  $c_{p_1} = 0.40 \text{ кал/г} \cdot \text{град}$ ; теплопроводность пороха  $\lambda_2 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ кал/см} \cdot \text{сек} \cdot \text{град}$ , газа  $\lambda_1 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ кал/см} \cdot \text{сек} \cdot \text{град}$ . В этом случае температура поверхности пороха, рассчитанная по формуле (6.2), будет равна  $377^\circ \text{K}$ , что недостаточно для воспламенения.

Однако, если имеется конвективный подвод тепла к пороху (горячие газы обдувают его поверхность) или если имеется теплопередача излучением от раскаленных частей камеры (интенсивность излучения которых слабо падает со временем), то возможно повторное воспламенение пороха.

В заключение пользуюсь случаем выразить искреннюю благодарность К. К. Андрееву, О. И. Лейпунскому, И. П. Граве, М. Е. Серебрякову и И. М. Шапиро за интерес к работе. Весьма признателен Ю. Б. Харитону, обратившему мое внимание в связи с работой [1] на явление затухания пороха в стволе артиллерийского орудия после вылета снаряда. Благодарю также В. Б. Либровича за помощь в подготовке статьи к печати.

Поступила 29 II 1964

#### ЛИТЕРАТУРА

1. З е л ь д о в и ч Я. Б. К теории горения порохов и взрывчатых веществ. Журн. эксперим. и теор. физ., 1942, т. 12, вып. 11—12.
2. З е л ь д о в и ч Я. Б. Устойчивость горения пороха в полужамкнутом объеме. ПМТФ, 1963, № 1.
3. Похил П. Ф., Нефедова О. И., Марголин А. Д. Об аномальной зависимости скорости горения пороха от начальной температуры. ДАН СССР, т. 145, № 4, 1962.
4. Price E. W. «Analysis of results of combustion instability research of solid propellants», presented at solid propellant rocket research conf., Princeton, N. J., Jan. 28—29, 1960 (ARS reprint no 1058—60).
5. Ciepluch C. C. Effect of rapid pressure decay on solid propellant combustion. ARS Journal, v. 31, N 11, 1961.
6. Carslaw H. S., Jaeger J. C. Conduction of heat in solids. Oxford Press, 1959.