

## О ПРИБЛИЖЕНИИ САМОСОГЛАСОВАННОГО ПОЛЯ ДЛЯ УПРУГОЙ КОМПОЗИТНОЙ СРЕДЫ

С. К. Канаун

(Ленинград)

При решении задачи об определении эффективных упругих свойств неоднородных и композитных сред метод самосогласованного поля позволяет получать замкнутые и непротиворечивые решения даже в случае сильной неоднородности свойств и большой концентрации включений. Такая возможность наряду с простотой и физической наглядностью основных допущений метода самосогласованного поля привлекла к нему внимание целого ряда исследователей [1—3]. В работах [4—6] идея самосогласования при решении задачи для среды, содержащей поля эллипсоидальных неоднородностей, использовалась неявно.

В указанных работах метод самосогласованного поля применялся к исследованию композитной среды, содержащей изотропные случайные поля дефектов (макроизотропная среда). В действительности метод самосогласованного поля может применяться при рассмотрении сильно коррелированных и даже регулярных структур [7, 8]. Однако серьезным препятствием использования самосогласованных решений является отсутствие каких-либо оценок погрешности данного метода при исследовании систем типа упругой композитной среды.

В связи с этим прямое сравнение самосогласованных решений с точными приобретает важное значение как критерий применимости метода самосогласованного поля в механике композитных сред.

В данной работе исследуется композитная среда, содержащая произвольное случайное поле эллипсоидальных неоднородностей. Для изотропного поля включений и случая, когда включения образуют регулярную решетку, построены тензоры эффективных упругих свойств среды. Приводятся результаты численных расчетов для кубической решетки изотропных сферических включений в изотропной среде. Анализ плоской задачи позволяет сравнить решение методом самосогласованного поля с точными решениями, полученными в [9] для регулярных решеток включений.

1. Рассмотрим бесконечную упругую однородную среду (основную среду), свойства которой определяет тензор модулей упругости  $\mathbf{L}$ , содержащую однородное случайное поле эллипсоидальных включений с упругими модулями  $\mathbf{L} + \mathbf{L}_1$ ,  $\mathbf{L}_1$  — случайный тензор, постоянный в пределах каждого включения.

Как известно (см., например, [6, 10]), тензор деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon}$  в среде с неоднородностями при приложении внешнего поля  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$  удовлетворяет уравнению

$$(1.1) \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}) + \int \mathbf{K}(\mathbf{R}) \cdot \mathbf{L}_1(\mathbf{r}') \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}') \Theta(\mathbf{r}') dV' = \boldsymbol{\varepsilon}_0, \quad \mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}',$$

где  $\Theta(\mathbf{r})$  — характеристическая функция области  $V$ , занятой включениями (если  $s$  — точка среды с радиусом-вектором  $\mathbf{r}$ , то  $\Theta(\mathbf{r}) = 1$  при  $s \in V$  и  $\Theta(\mathbf{r}) = 0$  при  $s \notin V$ ); точкой обозначено свертывание тензоров по двум индексам.

Ядро интегрального оператора  $\mathbf{K}(\mathbf{R})$  в (1.1) связано со вторыми производными функции Грина  $\mathbf{U}$  основной среды соотношением

$$(1.2) \quad K_{i\hat{j}kl}(\mathbf{R}) = -[\nabla_k \nabla_l U_{ij}(\mathbf{R})]_{(ik)(jl)}$$

(круглые скобки указывают на симметризацию по соответствующим индексам).

Отметим некоторые свойства оператора  $\mathbf{K}$ .

1. На непрерывных двухвалентных тензор-функциях  $\Phi$  таких, что

$$\int_{|\mathbf{R}|>1} \mathbf{K}(\mathbf{R}) \cdot \Phi(\mathbf{r}') dV' < \infty,$$

этот оператор может быть определен следующей формулой [10, 11]:

$$(1.3) \quad \int \mathbf{K}(\mathbf{R}) \cdot \Phi(\mathbf{r}') dV' = \int \mathbf{K}(\mathbf{C}^{-1}\xi - \mathbf{r}) \cdot \Phi(\mathbf{C}^{-1}\xi) \det \mathbf{C}^{-1} dV_\xi + \\ + \mathbf{A} \cdot \Phi(\mathbf{r}), \quad \xi = \mathbf{C}\mathbf{r}',$$

где  $\mathbf{C}$  — тензор, определяющий некоторое невырожденное аффинное преобразование трехмерного пространства. Постоянный тензор  $\mathbf{A}$  равен

$$(1.4) \quad \mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \int_{(\Gamma_1)} \tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{C}\mathbf{k}) d\Gamma,$$

где  $\tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{k})$  — преобразование Фурье-ядра  $\mathbf{K}(\mathbf{R})$ ;  $\Gamma_1$  — поверхность единичной сферы в  $\mathbf{k}$ -пространстве. Интеграл в правой части (1.3) понимается в смысле главного значения по Коши.

2. На постоянных тензорах действие оператора  $\mathbf{K}$  выражается интегралом, расходящимся в нуле и на бесконечности. Можно показать, что этот интеграл не допускает однозначной естественной регуляризации и его значение определяется тем смыслом, который он имеет в рассматриваемой задаче.

Пусть  $\mathbf{L}_1$  в (1.4) — постоянный тензор, поле напряжений в среде также постоянно и равно внешнему полю  $\sigma_0 = \mathbf{L} \cdot \varepsilon_0$ . Очевидно, что тензор деформаций среды в этом случае

$$\varepsilon = (\mathbf{L} + \mathbf{L}_1)^{-1} \cdot \sigma_0.$$

С другой стороны, решение уравнения (1.4) будет иметь именно такой вид, если регуляризацию интеграла, выражающего действие оператора  $\mathbf{K}$  на постоянных двухвалентных тензорах  $\Phi_0$ , определить соотношением

$$(1.5) \quad \int \mathbf{K}(\mathbf{R}) \cdot \Phi_0 dV = \mathbf{G} \cdot \Phi_0, \quad \mathbf{G} = \mathbf{L}^{-1}.$$

Эта регуляризация в соответствии с указанным ей смыслом и будет использована в дальнейшем.

Для поля деформаций  $\varepsilon$  внутри включений (в области  $V$ ) имеем уравнение, являющееся следствием (1.4)

$$(1.6) \quad \Theta(\mathbf{r})\varepsilon(\mathbf{r}) + \int \mathbf{K}(\mathbf{R}) \cdot \mathbf{L}_1(\mathbf{r}') \cdot \varepsilon(\mathbf{r}') \Theta(\mathbf{r}') \Theta(\mathbf{r}) dV' = \Theta(\mathbf{r}) \varepsilon_0.$$

Заметим, что в область  $\bar{V}$  (дополнение  $V$  до всего пространства) решение продолжается при известном  $\varepsilon$  внутри  $V$  единственным образом, что следует непосредственно из (1.4).

2. Пусть внешнее поле  $\varepsilon_0$  однородное (постоянное).

Предположения метода самосогласованного поля применительно к рассматриваемой задаче могут быть сформулированы следующим образом: 1) каждое из включений любой конкретной реализации случайного поля неоднородностей будет рассматриваться как изолированное эллипсоидальное включение в основной среде; 2) поле деформаций  $\varepsilon$ , в котором находится каждое из включений, складывается из внешнего поля  $\varepsilon_0$  и поля, наведенного окружающими неоднородностями. Это поле предполагается одинаковым для всех включений; 3) необходимо задаться той или иной аппроксимацией эквивалентного поля  $\hat{\varepsilon}$ . Будем считать, что поле  $\hat{\varepsilon}$  постоянно. Это справедливо, когда в пределах объема, занятого типич-

ным включением, суммарное поле от всех окружающих неоднородностей меняется незначительно\*.

Если  $\hat{\varepsilon}$  постоянно, то в рамках метода самосогласованного поля поле деформации внутри любого включения (как следует из результатов работы [10]) имеет вид

$$(2.1) \quad \varepsilon = (\mathbf{I} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{L}_1)^{-1} \cdot \hat{\varepsilon},$$

где  $\mathbf{I}$  — единичный четырехвалентный тензор. Тензор  $\mathbf{A}$  имеет вид (1.4), причем тензор  $\mathbf{C}$ , входящий в определение  $\mathbf{A}$ , определяет аффинное преобразование, переводящее эллипсоидальную область, занятую включением, в единичный шар.

Уравнение для эквивалентного поля  $\hat{\varepsilon}$  получим, подставляя (2.1) в (1.6) и осредняя результат по ансамблю полей включений,

$$(2.2) \quad \left\{ \langle \Theta(\mathbf{r}) [\mathbf{I} + \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{L}_1(\mathbf{r})]^{-1} \rangle + \int \mathbf{K}(\mathbf{R}) \cdot \langle \mathbf{L}_1(\mathbf{r}') \cdot [\mathbf{I} + \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{L}_1(\mathbf{r}')]^{-1} \Theta(\mathbf{r}') \Theta(\mathbf{r}) \rangle dV' \right\} \cdot \hat{\varepsilon} = p \varepsilon_0,$$

где  $p = \langle \Theta(\mathbf{r}) \rangle$  — концентрация включений.

Рассмотрим среднее, входящее под знак интеграла в (2.2),

$$\langle \mathbf{L}_1(\mathbf{r}') \cdot [\mathbf{I} + \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{L}_1(\mathbf{r}')]^{-1} \Theta(\mathbf{r}') \Theta(\mathbf{r}) \rangle.$$

При усреднении по ансамблю полей включений вклад в это среднее дают лишь те реализации, для которых  $\Theta(\mathbf{r})\Theta(\mathbf{r}') = 1$ , т. е. точки  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  должны одновременно попадать внутрь области  $V$ , занятой включениями. Искомое среднее для однородных полей включений можно представить в виде суммы

$$(2.3) \quad \langle \mathbf{L}_1(\mathbf{r}') \cdot [\mathbf{I} + \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{L}_1(\mathbf{r}')]^{-1} \Theta(\mathbf{r}') \Theta(\mathbf{r}) \rangle = \Psi_0(\mathbf{R}) + \Psi(\mathbf{R}),$$

где  $\Psi_0(\mathbf{R})$  — часть, связанная с попаданием точек  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  внутрь одного и того же включения, а  $\Psi(\mathbf{R})$  — часть, связанная с попаданием точек в разные включения.

Элементарное геометрическое рассмотрение позволяет представить функцию  $\Psi_0(\mathbf{R})$  в виде

$$(2.4) \quad \Psi_0(\mathbf{R}) = \langle \mathbf{L}_1 \cdot [\mathbf{I} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{L}_1]^{-1} (1/V_0) J(\mathbf{R}, c_1, c_2, c_3, \mathbf{Q}) \rangle,$$

где  $J(\mathbf{R}, c_1, c_2, c_3, \mathbf{Q})$  — объем внутри эллипсоидальной области, занятой включением с полуосями  $c_1, c_2, c_3$  (ориентацию включения в пространстве определяет ортогональный случайный тензор  $\mathbf{Q}$ ), попадание в которую точки  $\mathbf{r}'$  гарантирует попадание точки  $\mathbf{r}$  в тот же эллипсоид. Усреднение в (2.4) проводится по ансамблевым функциям распределения размеров включений и их свойств,  $V_0$  — средний объем, приходящийся на одно включение. Аффинным преобразованием  $\mathbf{C}(\xi = \mathbf{C}\mathbf{R})$ , переводящим эллипсоид в единичный шар, функция  $J(\mathbf{R}, c_1, c_2, c_3, \mathbf{Q})$  переводится в сферически-симметричную

$$J(\mathbf{C}^{-1}\xi) = J'(|\xi|).$$

Отметим, кроме того, что

$$(2.5) \quad J(0, c_1, c_2, c_3, \mathbf{Q}) = v_c \text{ и } J \rightarrow 0 \text{ при } |\mathbf{R}| \rightarrow \infty,$$

где  $v_c = (4/3)\pi c_1 c_2 c_3$  — объем эллипсоида с полуосями  $c_1, c_2, c_3$ .

\* Данная форма метода самосогласованного поля отличается от принятой, например, в [2], где каждое включение рассматривается как изолированное в среде с упругими свойствами, равными эффективным свойствам композитной среды, а поле, в котором находится любое включение, предполагается равным внешнему полю  $\varepsilon_0$ .

Вычислим интеграл

$$(2.6) \quad \int \mathbf{K}(\mathbf{R}) \cdot \Psi_0(\mathbf{R}) dV = \left\langle \frac{1}{V_0} \int \mathbf{K}(\mathbf{C}^{-1}\xi) \cdot \mathbf{L}_1 \cdot (\mathbf{I} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{L}_1)^{-1} \times \right. \\ \left. \times J'(|\xi|) \det \mathbf{C}^{-1} dV_\xi \right\rangle = \left\langle \frac{v_c}{V_0} \mathbf{A} \cdot \mathbf{L}_1 \cdot (\mathbf{I} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{L}_1)^{-1} \right\rangle.$$

Последнее равенство следует из (1.3), если учесть, что главное значение интеграла, фигурирующего в (2.6), равно нулю в случае, когда  $J'(\xi)$  — сферически-симметричная функция. Подставим (2.3) в (2.2) и, учитывая (2.5), после несложных преобразований получим уравнение для эквивалентного поля  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$  в виде

$$(2.7) \quad \left[ \mathbf{I} + \frac{1}{p} \int \mathbf{K}(\mathbf{R}) \cdot \Psi(\mathbf{R}) dV \right] \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\varepsilon}_0,$$

где использовано равенство

$$\langle \Theta(\mathbf{r}) \mathbf{L}_1(\mathbf{r}) \cdot [\mathbf{I} + \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{L}_1(\mathbf{r})]^{-1} \rangle = \left\langle \frac{v_c}{V_0} \mathbf{L}_1 \cdot (\mathbf{I} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{L}_1)^{-1} \right\rangle,$$

справедливое для однородных эргодичных полей включений. Усреднение в левой части есть усреднение по ансамблю реализаций случайного поля, а в правой части стоит среднее от случайной величины, функция распределения которой определяется ансамблевыми функциями распределения размеров включений и их свойств.

Из (2.1), (2.7) следует, что деформация внутри произвольного включения в рамках метода самосогласованного поля определяется выражением

$$(2.8) \quad \boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{I} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{L}_1)^{-1} \cdot \left[ \mathbf{I} + \frac{1}{p} \int \mathbf{K}(\mathbf{R}) \cdot \Psi(\mathbf{R}) dV \right]^{-1} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_0.$$

Далее, пусть среда находится под действием внешнего поля напряжений  $\boldsymbol{\sigma}_0$ , связанного с полем  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$  очевидным соотношением

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\sigma}_0.$$

Тогда среднюю деформацию  $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$  среды с включениями получим, подставляя (2.8) в (1.1) и осредняя результат по ансамблю реализаций,

$$(2.9) \quad \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\sigma}_0 - \int \mathbf{K}(\mathbf{R}) \cdot \left\langle \mathbf{L}_1 (\mathbf{I} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{L}_1)^{-1} \cdot \left[ \mathbf{I} + \frac{1}{p} \int \mathbf{K}(\mathbf{R}) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \Psi(\mathbf{R}) dV \right]^{-1} \Theta(\mathbf{r}') \right\rangle dV' \cdot \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\sigma}_0 - \mathbf{G} \cdot \left\langle \frac{v_c}{V_0} \mathbf{L}_1 \cdot (\mathbf{I} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{L}_1)^{-1} \right\rangle \times \\ \times \left[ \mathbf{I} + \frac{1}{p} \int \mathbf{K}(\mathbf{R}) \cdot \Psi(\mathbf{R}) dV \right]^{-1} \cdot \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\sigma}_0.$$

Последнее равенство следует из (1.5).

Введем тензор эффективной упругой податливости среды с включениями соотношением

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{G}_0 \cdot \boldsymbol{\sigma}_0.$$

Отсюда и из (2.9) получаем

$$(2.10) \quad \mathbf{G}_0 = \mathbf{G} - \mathbf{G} \cdot \left\langle \frac{v_c}{V_0} \mathbf{L}_1 \cdot (\mathbf{I} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{L}_1)^{-1} \right\rangle \cdot \left[ \mathbf{I} + \frac{1}{p} \int \right. \\ \left. \times \mathbf{K}(\mathbf{R}) \cdot \Psi(\mathbf{R}) dV \right]^{-1} \cdot \mathbf{G}.$$

Для построения функции  $\Psi(\mathbf{R})$  под интегралом в правой части этого выражения необходимо задаться конкретной моделью случайного поля

включений в среде. Рассмотрим два крайних случая: случайное поле включений однородно и изотропно; включения образуют регулярную решетку.

А. Для изотропного поля функция  $\Psi(\mathbf{R})$  (выражение 2.3) сферически-симметрична (зависит только от  $|\mathbf{R}|$  и на бесконечности стремится к  $p \left\langle \frac{v_c}{V_0} \mathbf{L}_1 \cdot (\mathbf{I} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{L}_1)^{-1} \right\rangle$ ). Кроме того, во всех случаях имеет место условие  $\Psi(0) = 0$ , поскольку исключена возможность покрытия одной точки двумя разными включениями (включения не пересекаются).

Вычислим интеграл в (2.10) для данного случая, используя регуляризацию (1.3), (1.5),

$$(2.11) \quad \frac{1}{p} \int \mathbf{K}(\mathbf{R}) \cdot \Psi(\mathbf{R}) dV = \frac{1}{p} \int \mathbf{K}(\mathbf{R}) \cdot \left[ \Psi(\mathbf{R}) - p \left\langle \frac{v_c}{V_0} \mathbf{L}_1 \times (\mathbf{I} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{L}_1)^{-1} \right\rangle \right] dV + \mathbf{G} \cdot \left\langle \frac{v_c}{V_0} \mathbf{L}_1 \cdot (\mathbf{I} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{L}_1)^{-1} \right\rangle = \\ = (\mathbf{G} - \mathbf{A}_0) \cdot \left\langle \frac{v_c}{V_0} \mathbf{L}_1 \cdot (\mathbf{I} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{L}_1)^{-1} \right\rangle.$$

Подставляя этот результат в (2.10), для тензора эффективной упругой податливости  $\mathbf{G}_0$  и тензора эффективных упругих модулей  $\mathbf{L}_0 = \mathbf{G}_0^{-1}$  получим

$$(2.12) \quad \mathbf{G}_0 = \mathbf{G} - \mathbf{G} \cdot \left\langle \frac{v_c}{V_0} \mathbf{L}_1 \cdot (\mathbf{I} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{L}_1)^{-1} \right\rangle \cdot \left[ \mathbf{I} + (\mathbf{G} - \mathbf{A}_0) \times \left\langle \frac{v_c}{V_0} \mathbf{L}_1 \cdot (\mathbf{I} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{L}_1)^{-1} \right\rangle \right]^{-1} \cdot \mathbf{G};$$

$$\mathbf{L}_0 = \mathbf{L} + \left\langle \frac{v_c}{V_0} \mathbf{L}_1 \cdot (\mathbf{I} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{L}_1)^{-1} \right\rangle \cdot \left[ \mathbf{I} - \mathbf{A}_0 \cdot \left\langle \frac{v_c}{V_0} \mathbf{L}_1 \cdot (\mathbf{I} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{L}_1)^{-1} \right\rangle \right]^{-1}.$$

Тензор  $\mathbf{A}_0$  в (2.11), (2.12) определяется соотношением (1.4) при  $\mathbf{C} = \mathbf{1}$  ( $\mathbf{1}$  — единичный двухвалентный тензор).

Аналогичный результат получен в работе [6]. Если включения имеют сферическую форму, то выражения (2.12) для  $\mathbf{L}_0$  и  $\mathbf{G}_0$  совпадают с выражениями, полученными в работе [5].

Б. Рассмотрим теперь случай, когда идентичные включения образуют регулярную решетку. Для простоты возьмем изотропную основную среду и сферические изотропные включения. В этом случае соотношения (2.12) принимают вид

$$(2.13) \quad \mathbf{G}_0 = \mathbf{G} - p\mathbf{G} \cdot \mathbf{L}_1 \cdot \left( \mathbf{I} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{L}_1 + \frac{1}{p} \int \mathbf{K}(\mathbf{R}) S(\mathbf{R}) dV \cdot \mathbf{L}_1 \right)^{-1};$$

$$\mathbf{L}_0 = \mathbf{L} + p\mathbf{L}_1 \cdot \left( \mathbf{I} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{L}_1 - p\mathbf{G} \cdot \mathbf{L}_1 + \frac{1}{p} \int \mathbf{K}(\mathbf{R}) S(\mathbf{R}) dV \cdot \mathbf{L}_1 \right)^{-1}.$$

Компоненты тензоров  $\mathbf{K}(\mathbf{R})$  и  $\mathbf{A}$  в данном случае определяются соотношениями

$$K_{ijkl}(\mathbf{R}) = -\frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)R^3} \left[ 2(2\nu-1)(\delta_{ij}\delta_{kl} - 3\delta_{ij}\frac{R_kR_l}{R^2}) + \right. \\ \left. + (\delta_{il}\delta_{jk} - 3\delta_{jk}\frac{R_iR_l}{R^2}) - \frac{3}{R^2}(\delta_{il}R_jR_k + \delta_{jl}R_iR_k + \delta_{kl}R_iR_j) + \right. \\ \left. + 15\frac{R_iR_jR_kR_l}{R^4} \right]_{(ij)(kl)}, \quad R = |\mathbf{R}|;$$

$$A_{ijkl} = \frac{1}{3\mu} \left[ \delta_{ij}\delta_{kl} - \frac{1}{10(1-\nu)}(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \right],$$

где  $\mu$  — модуль сдвига;  $\nu$  — коэффициент Пуассона основной среды. Функция  $S(\mathbf{R})$  в (2.13) имеет вид

$$S(\mathbf{R}) = \langle \Theta(\mathbf{r}) \Theta(\mathbf{r}') \rangle',$$

где штрих над средним означает, что следует учитывать лишь те реализации, для которых точки  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  попадают в разные включения. Пусть  $\mathbf{a}^{(1)}$ ,  $\mathbf{a}^{(2)}$ ,  $\mathbf{a}^{(3)}$  — тройка векторов, задающих элементарную ячейку Браве решетки, узлы которой являются центрами включений. Несложное геометрическое рассмотрение позволяет получить следующее выражение для  $S(\mathbf{R})$ :

$$(2.14) \quad S(\mathbf{R}) = \sum'_{k,m,n=-\infty}^{\infty} J(\mathbf{R} - k\mathbf{a}^{(1)} - m\mathbf{a}^{(2)} - n\mathbf{a}^{(3)})$$

(штрих над суммой означает пропуск слагаемого  $k = m = n = 0$ ), а

$$(2.15) \quad \frac{1}{p} J(\mathbf{R}) = \begin{cases} \left(1 - \frac{R}{2r_0}\right)^2 \left(1 + \frac{R}{12r_0}\right) & \text{при } R \leq 2r_0 \\ 0 & \text{при } R > 2r_0, \end{cases}$$

где  $r_0$  — радиус включений;  $J(\mathbf{R})$  имеет тот же смысл, что и в (2.4). Используя регуляризацию (1.3), (1.5), интеграл в (2.13) можно представить в виде

$$\frac{1}{p} \int \mathbf{K}(\mathbf{R}) S(\mathbf{R}) dV = \frac{1}{p} \int \mathbf{K}(\mathbf{R}) [S(\mathbf{R}) - p^2] dV + p\mathbf{G} = p(\mathbf{G} - \mathbf{A}) + \frac{1}{p} \int \mathbf{K}(\mathbf{R}) [S(\mathbf{R}) - p^2] dV,$$

где последний интеграл понимается в смысле главного значения по Коши и сходится для  $S(\mathbf{R})$  в форме (2.14), (2.15). Если включения образуют кубическую решетку, то интеграл в (2.13) оказывается равным

$$(2.16) \quad \frac{1}{p} \int \mathbf{K}(\mathbf{R}) S(\mathbf{R}) dV = p(\mathbf{G} - \mathbf{A}) + \alpha(p)\mathbf{M}.$$

Компоненты тензора  $\mathbf{M}$  имеют вид

$$(2.17) \quad \mu(1 - \nu) M_{ijkl} = \delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} - 5a^{-4} \sum_{n=1}^3 \times \\ \times a_i^{(n)} a_j^{(n)} a_k^{(n)} a_l^{(n)}, \quad a = |\mathbf{a}^{(n)}|, \quad n = 1, 2, 3,$$

а скалярный коэффициент  $\alpha$  представляется в виде интеграла

$$\alpha(p) = \frac{1}{16\pi p} \int [S(\mathbf{R}) - p^2] \left( \frac{1}{R^3} - \frac{R_1^2 R_2^2 + R_1^2 R_3^2 + R_2^2 R_3^2}{R^7} \right) dV,$$

понимаемого в смысле главного значения по Коши.

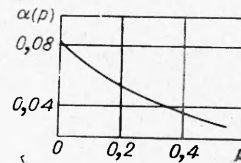
Для функции  $S(\mathbf{R})$  в форме (2.14), (2.15) этот интеграл подсчитан численно. Зависимость коэффициента  $\alpha$  от концентрации включений  $p$  приведена на фиг. 1.

Подставляя (2.16) в (2.13), получим, что тензоры упругих свойств среды, содержащей кубическую решетку включений, имеют вид

$$\mathbf{G}_0 = \mathbf{G} - p\mathbf{G} \cdot \mathbf{L}_1 \cdot [\mathbf{I} + p\mathbf{G} \cdot \mathbf{L}_1 + (1 - p)\mathbf{A} \cdot \mathbf{L}_1 + \alpha(p)\mathbf{M}]^{-1} \cdot \mathbf{G};$$

$$\mathbf{L}_0 = \mathbf{L} + p\mathbf{L}_1 \cdot [\mathbf{I} + (1 - p)\mathbf{A} \cdot \mathbf{L}_1 + \alpha(p)\mathbf{M}]^{-1}.$$

Очевидно, что группа симметрии этих тензоров совпадает с группой симметрии куба, поскольку



Фиг. 1



последняя есть группа симметрии тензора  $\mathbf{M}$  (выражение (2.17)).

3. Рассмотрим плоскую задачу. В этом случае все построения проводятся аналогично трехмерной ситуации. Для изотропной среды, содержащей изотропные круговые включения, тензоры эффективных упругих свойств имеют вид (2.13). Однако компоненты тензоров  $\mathbf{K}(\mathbf{R})$  и  $\mathbf{A}$  в случае плоского напряженного состояния имеют вид

$$(3.1) \quad K_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{(1+\nu)}{8\pi\mu R^2} \left[ \frac{(3-\nu)}{(1+\nu)} \left( \delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} - 2\delta_{\alpha\beta} \frac{R_\gamma R_\delta}{R^2} \right) - \nabla_\alpha \nabla_\beta \left( \frac{R_\gamma R_\delta}{R^2} \right) \right]_{(\alpha\gamma)(\beta\delta)};$$

$$(3.2) \quad A_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{16\mu} [8I_{\alpha\beta\gamma\delta} - (1+\nu)(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + 2I_{\alpha\beta\gamma\delta})],$$

где греческие индексы принимают значения 1, 2;  $\mathbf{I}$  — единичный четырехвалентный тензор в двумерном пространстве. Регуляризации интегралов, аналогичных (1.3), (1.5), имеют тот же вид, что и в трехмерном случае с тензором  $\mathbf{A}$  в форме (3.2). Рассмотрим некоторые частные случаи:

I. Случайное поле включений однородно и изотропно. Проводя такие же рассуждения, как и в трехмерной ситуации, получим следующие выражения для тензоров эффективных упругих свойств:

$$(3.3) \quad \mathbf{G}_0 = \mathbf{G} - p\mathbf{G} \cdot \mathbf{L}_1 \cdot [\mathbf{I} + p\mathbf{G} \cdot \mathbf{L}_1 + (1-p)\mathbf{A} \cdot \mathbf{L}_1]^{-1} \cdot \mathbf{G};$$

$$\mathbf{L}_0 = \mathbf{L} + p\mathbf{L}_1 \cdot [\mathbf{I} + (1-p)\mathbf{A} \cdot \mathbf{L}_1]^{-1}.$$

Здесь тензор  $\mathbf{A}$  имеет вид (3.2).

II. Включения образуют правильную треугольную решетку. Очевидно, что группа симметрии функции  $S(\mathbf{R}) = \langle \Theta(\mathbf{r})\Theta(\mathbf{r}') \rangle'$  в этом случае совпадает с группой симметрии треугольной решетки. Регуляризация интеграла в (2.13) принимает вид (интегрирование проводится по всей плоскости)

$$(3.4) \quad \frac{1}{p} \int \mathbf{K}(\mathbf{R}) S(\mathbf{R}) d\Omega = p(\mathbf{G} - \mathbf{A}) + \frac{1}{p} \int \mathbf{K}(\mathbf{R}) [S(\mathbf{R}) - p^2] d\Omega.$$

Интеграл справа понимается в смысле главного значения по Коши и при этом сходится в нуле и на бесконечности. Группа симметрии этого интеграла должна совпадать с группой симметрии функции  $S(\mathbf{R})$ . Известно [12], что базис четырехвалентных тензоров, обладающих симметрией треугольной решетки, состоит только из изотропных тензоров. Учитывая, кроме того, симметрию тензора  $\mathbf{K}(\mathbf{R})$  по соответствующим индексам, можно записать

$$\int K_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathbf{R}) [S(\mathbf{R}) - p^2] d\Omega = \beta (\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + 2I_{\alpha\beta\gamma\delta}).$$

Коэффициент  $\beta$  получим, сворачивая обе части этого равенства по всем индексам,

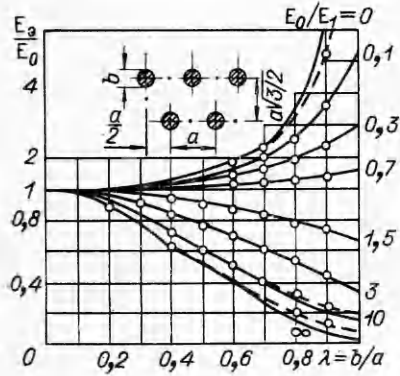
$$\beta = \frac{1}{8} \int K_{\alpha\alpha\gamma\gamma}(\mathbf{R}) [S(\mathbf{R}) - p^2] d\Omega.$$

Однако из (3.1) непосредственно следует

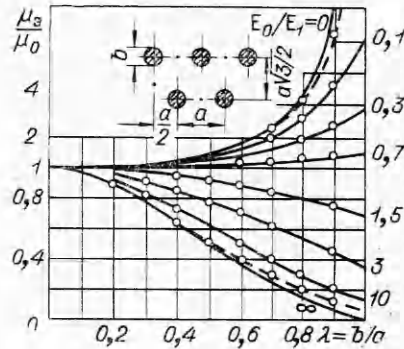
$$K_{\alpha\alpha\gamma\gamma}(\mathbf{R}) = 0.$$

В силу этого соотношения интеграл справа в (3.4) равен нулю. Подставляя теперь в (2.13) регуляризованное значение интеграла (3.4), получим, что в случае правильной треугольной решетки включений выражение для тензора эффективных упругих свойств совпадает с его выражением, когда поле включений однородно и изотропно (3.3).

На фиг. 2, 3 приведены графики зависимости относительной величины эффективных модулей упругости  $E_0/E$  и модулей сдвига  $\mu_0/\mu$  среды, содержащей правильную треугольную решетку включений, от concentra-



Фиг. 2



Фиг. 3

ции включений при разных значениях их параметров упругости, вычисленные по формулам (3.3) ( $E_1$  — модуль упругости включений). Коэффициент Пуассона среды и включений  $\nu = 0,3$ . Здесь же приведены графики указанных величин, которые подсчитаны точно методами, развитыми в работе [9] для решения плоской двоякопериодической задачи теории упругости (сплошные кривые — точное решение, штриховые с кружками — решение по методу самосогласованного поля).

III. Включения образуют квадратную решетку. Регуляризуя интеграл в (2.13) по (3.4), рассмотрим главное значение интеграла

$$\frac{1}{p} \int \mathbf{K}(\mathbf{R}) [S(\mathbf{R}) - p^2] d\Omega$$

для данного случая. Очевидно, что группа симметрии этого интеграла совпадает с группой симметрии функции  $S(\mathbf{R})$  и, следовательно, с группой симметрии квадрата. Разложив этот интеграл по базису четырехвалентных тензоров соответствующей симметрии [12] и вычислив коэффициенты разложения, получим

$$(3.5) \quad \frac{1}{p} \int \mathbf{K}(\mathbf{R}) [S(\mathbf{R}) - p^2] d\Omega = \alpha \mathbf{M}.$$

Компоненты тензора  $\mathbf{M}$  имеют вид

$$(3.6) \quad \frac{1}{1+\nu} M_{\alpha\beta\gamma\delta} = \delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + 2I_{\alpha\beta\gamma\delta} - 4a^{-4} \sum_{i=1}^2 a_{\alpha}^{(i)} a_{\beta}^{(i)} a_{\gamma}^{(i)} a_{\delta}^{(i)},$$

где  $\mathbf{a}^{(1)}$  и  $\mathbf{a}^{(2)}$  — векторы, совпадающие со сторонами квадрата,  $a = |\mathbf{a}^{(i)}|$ .

Коэффициент  $\alpha$  представляется в виде интеграла в смысле главного значения

$$(3.7) \quad \alpha = \frac{1}{8\pi p} \int [S(\mathbf{R}) - p^2] \left( \frac{1}{R^2} - 8 \frac{R_1^2 R_2^2}{R^6} \right) d\Omega.$$

Выражение для функции  $S(\mathbf{R})$  в данном случае имеет вид

$$(3.8) \quad S(\mathbf{R}) = \sum'_{h,m=-\infty}^{\infty} j(\mathbf{R} - h\mathbf{a}^{(1)} - m\mathbf{a}^{(2)}),$$



где штрих означает пропуск слагаемого  $k = m = 0$ ,

$$\frac{1}{p} J(\mathbf{R}) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left[ \arctg \left( \frac{2r_0}{R} \sqrt{1 - \frac{R}{2r_0}} \right) - \frac{R}{2r_0} \sqrt{1 - \left( \frac{R}{2r_0} \right)^2} \right] & \text{при } R \leq 2r_0 \\ 0 & \text{при } R > 2r_0 \end{cases} \quad (3.9)$$

( $r_0$  — радиус включений).

Зависимость  $\alpha(p)$ , полученная численным интегрированием (3.7) при  $S(\mathbf{R})$  в форме (3.8), (3.9), представлена на фиг. 4. Подставляя теперь (3.5) в (3.4), а результат — в выражение для тензоров эффективных свойств (2.13), будем иметь

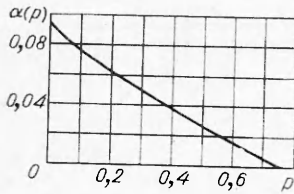
$$(3.10) \quad \mathbf{G}_3 = \mathbf{G} - p\mathbf{G} \cdot \mathbf{L}_1 \cdot [\mathbf{I} + p\mathbf{G} \cdot \mathbf{L}_1 + (1-p) \times \\ \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{L}_1 + \alpha(p)\mathbf{M}]^{-1} \cdot \mathbf{G}; \\ \mathbf{L}_3 = \mathbf{L} + p\mathbf{L}_1 \cdot [\mathbf{I} + (1-p)\mathbf{A} \cdot \mathbf{L}_1 + \alpha(p)\mathbf{M}],$$

где тензор  $\mathbf{A}$  имеет вид (3.2), а тензор  $\mathbf{M}$  и коэффициент  $\alpha$  определяются соотношениями (3.6), (3.7).

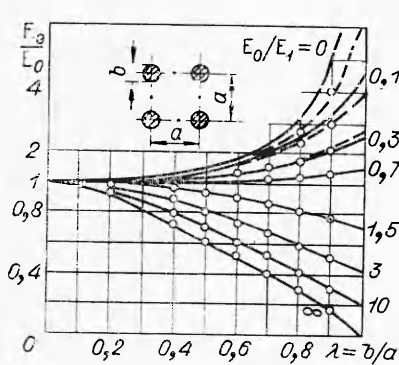
На фиг. 5—7 приведены графики относительных величин эффективных параметров упругости для квадратной решетки включений, подсчитанные по формуле (3.10). Здесь же приведены точные зависимости, данные в [9] (сплошные кривые — точное решение, штриховые с кружками — решения по методу самосогласованного поля).

Анализ приведенных здесь графиков показывает, что для рассмотренных регулярных структур решение по методу самосогласования поля практически совпадает с точным решением, когда отношение модуля упругости среды к модулю упругости включений лежит в пределах  $0,1 \leq E/E_1 \leq 10$ . При  $E/E_1 > 10$  или  $E/E_1 < 0,1$ , начиная со значений концентрации включений  $p \geq 0,4$ , решения по методу самосогласованного поля дают погрешность, возрастающую с ростом концентрации.

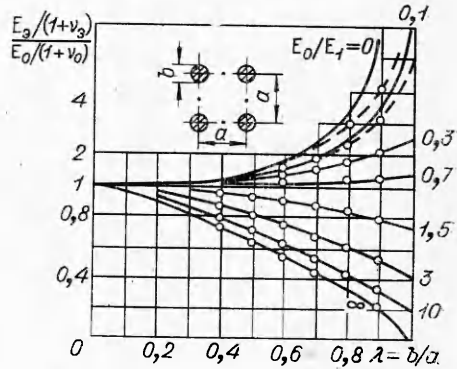
Таким образом, гипотезы метода самосогласованного поля, перечисленные в п. 2, в рассмотренных случаях выполняются достаточно хорошо. Точность выполнения этих гипотез зависит, с одной стороны, от характера взаимодействия неоднородностей в упругой среде (в частности, от констант взаимодействия  $E/E_1$  и  $p$ ), с другой стороны, от конкретного вида регулярной структуры. Есть основания предполагать, что зависимость от структуры является достаточно «гладкой» и поэтому приближенные самосогласованного поля окажется приемлемым в широком диапа-



Ф и г. 4



Ф и г. 5



Ф и г. 6

зоне различных структур, в частности, в широкой «окрестности» рассмотренных здесь ситуаций.

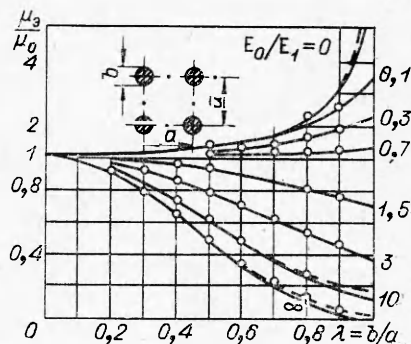
Заметим, что в случае регулярных структур предположение о том, что каждое включение находится в одном и том же эквивалентном поле  $\hat{\epsilon}$ , выполняется точно. Поэтому дальнейшие уточнения в рамках метода самосогласованного поля возможны на пути более точной аппроксимации среднего поля  $\hat{\epsilon}$ .

При рассмотрении стохастических полей включений [7] возникает проблема анализа роли флуктуаций истинных полей напряжений и деформаций в окрестности каждого включения. Известно [13], что применение метода самосогласованного поля при описании фазовых переходов тем более оправдано, что медленнее затухает на бесконечности потенциал, создаваемый отдельной частицей, и чем меньше расстояние между частицами. В частности, для частиц с потенциалом кулоновского типа  $1/R$  метод самосогласованного поля дает хорошие результаты.

В случае упругой композитной среды потенциал отдельной частицы (включения) ведет себя на бесконечности как  $1/R$  в плоском случае и как  $1/R^2$  — в пространственном. Естественно поэтому ожидать, что приближение самосогласованного поля для стохастических полей включений окажется вполне приемлемым, причем в случае плоской задачи более точным.

Автор выражает благодарность Т. М. Эльковской за помощь в вычислениях.

Поступила 5 IV 1976



Ф и г. 7

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Hill R. A self-consistent mechanics of composite materials.— «J. Mech. Phys. Solids», 1965, vol. 13, N 4.
2. Kröner E. Berechnung der elastischen Konstanten des Vielkristalls aus konstanten des Einkristall.— «Z. Physik», 1958, B. 151, N 4.
3. Чабан И. А. Метод самосогласованного поля в применении к расчету эффективных параметров неоднородных сред.— «Акуст. журн.», 1964, вып. 3, № 10.
4. Walpole L. J. On bounds for the overall elastic moduli of inhomogeneous system. I.— «J. Mech. Phys. Solids», 1966, vol. 14, N 3.
5. Walpole L. J. On bounds for the overall elastic moduli of inhomogeneous system. II.— «J. Mech. Phys. Solids», 1966, vol. 14, N 5.
6. Левин В. М. К определению эффективных упругих модулей композитных материалов.— «Докл. АН СССР», 1975, т. 220, № 5, с. 1042.
7. Канаун С. К. Метод самосогласованного поля в задаче об эффективных свойствах упругого композита.— ПМТФ, 1975, № 4.
8. Канаун С. К. Случайное поле трещин в упругой сплошной среде.— В кн.: Исследования по упругости и пластичности. Л., изд. Ленингр. ун-та, 1974, № 10.
9. Григolloк Э. И., Фильтинский Л. А. Перфорированные пластины и оболочки. М., «Наука», 1970.
10. Кунин И. А., Соснина Э. Г. Эллипсоидальная неоднородность в упругой среде.— «Докл. АН СССР», 1971, т. 199, № 3.
11. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. Вып. I. М., Физматгиз, 1958.
12. Лохин В. В., Седов Л. И. Нелинейные тензорные функции от нескольких тензорных аргументов.— ПММ, 1963, т. 27, № 3.
13. Кац М. Математические механизмы фазовых переходов.— В кн.: Устойчивость и фазовые переходы. М., «Мир», 1973.