

ЛИТЕРАТУРА

1. Гейдон А., Герл П. Ударная труба в химической физике высоких температур.— М.: Мир, 1966.
2. Британ А. Б. Методы исследования теплопроводности газов в ударных трубах // Отчет № 2691 Ин-та механики МГУ.— 1983.
3. Sturtevant B., Slachmuylders E. End wall heat-transfer effects on the trajectory of a reflected shock wave // Phys. Fluids.— 1964.— V. 7, N 8.
4. Goldworthy F. A. The structure of a contact region, with application to the reflection of a shock from a heat conducting wall // J. Fluid Mech.— 1959.— V. 5, pt 2.
5. Baganoff D. Experiment on wall-pressure history in shock — reflexion process // J. Fluid Mech.— 1965.— V. 23, pt 2.
6. Johannesen N. H., Bird G. A., Zienkiewicz H. K. Theoretical and experimental investigations of the reflexion of normal shock waves with vibrational relaxation // J. Fluid Mech.— 1967.— V. 30, pt 1.
7. Присли, Хэнсон. Численный метод расчета полей течения за отраженной ударной волной в газе с неравновесными химическими реакциями // РТК.— 1969.— Т. 7, № 12.
8. Hanson R. K., Baganoff D. Shock-tube study of nitrogen dissociation rates using pressure measurements.— N. Y., 1971.— (Paper/AIAA; N 620).
9. Hanson R. K., Presley L. L., Williams E. V. Numerical solutions of several reflected shock-wave flow fields with nonequilibrium chemical reactions.— Washington, 1972.— (Techn. Note/NASA; D — 6885).
10. Агафонов В. П., Вертушкин В. К., Гладков А. А., Полянский О. Ю. Неравновесные процессы в аэродинамике.— М.: Машиностроение, 1972.
11. Провоторов В. П., Рябов В. В. Исследование неравновесного гиперзвукового вязкого ударного слоя // Тр. ЦАГИ.— 1981.— Вып. 2111.
12. Lin S. Ch., Teare J. D. Rate of ionization behind shock waves in air. Pt II. Theoretical interpretations // Phys. Fluids.— 1963.— V. 6, N 3.
13. Ермаков В. В., Калиткин Н. И. Оптимальный шаг и регуляризация метода Ньютона // ЖВММФ.— 1983.— Т. 21, № 2.
14. Хэншелл Б. Д. Некоторые аспекты использования ударных труб в аэродинамических исследованиях. Ударные трубы.— М.: ИЛ, 1962.
15. Рябов В. В. Приближенный метод расчета коэффициентов переноса в многокомпонентных смесях // ИФЖ.— 1982.— Т. 44, № 2.
16. Денисенко О. В., Провоторов В. П. Исследование течений вязкого газа при умеренных числах Рейнольдса // Тр. ЦАГИ.— 1985.— Вып. 2269.
17. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений.— М.: Наука, 1978.
18. Баженова Т. В., Гвоздева Л. Г., Лобастов Ю. Ф. и др. Ударные волны в реальных газах.— М.: Наука, 1968.

Поступила 12/V 1986 г.

УДК 532.5 + 523.4

КОНВЕКТИВНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И ВИХРИ НА ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СФЕРЕ

Т. Д. Кузнецова, Л. С. Соловьев
(Москва)

Одна из интереснейших проблем газодинамики — возникновение и длительное существование упорядоченных вихревых структур в течениях, обладающих в начальный момент более высокой симметрией или даже образующихся из состояния покоя. Считая эту проблему термодинамической, авторы [1] констатируют: «Классическая термодинамика, в сущности, — теория «разрушения структуры», и ее необходимо дополнить отсутствующей в ней теорией «создания структуры». Появление вихревых структур в первоначально ламинарном потоке, коль скоро исходное стационарное течение также удовлетворяет условиям баланса сил, связано с развитием некоторой неустойчивости, которая и переводит систему в новое, уже устойчивое стационарное состояние. В возникшей вихревой структуре течения потери кинетической энергии за счет диссипативных сил, очевидно, должны компенсироваться притоком соответствующей «внешней» энергии.

Классический объект исследования эффекта образования вихревой структуры — задача Бенара, в которой переход к новому стационарному состоянию обусловлен развитием конвективной неустойчивости. Применение к этой проблеме теории гидродинамической устойчивости, основанной на анализе нормальных мод, дано, в частности, в [2]. Линейная теория устойчивости [2, 3] позволяет найти минимальный перепад температур, при котором возникает стационарный баланс между вязкой диссипацией кинетической энергии и производством внутренней энергии за счет архимедовых

сил выталкивания. С аналогичных позиций, по-видимому, надо рассматривать образование стационарных вихревых структур во многих явлениях природы, а также в задачах об обтекании газом движущихся тел.

Настоящая работа посвящена рассмотрению крупномасштабных вихрей в атмосфере вращающихся планет. В качестве причины возникновения стационарных вихрей и широтных течений предполагается развитие конвективной неустойчивости в поле центробежной силы. Для получения возможных стационарных конфигураций, непрерывно заполняющих всю сферу, исследуется динамика вихревой структуры течений в целом на поверхности равномерно вращающегося шара. В полученном в приближении «тонкой атмосферы» решении отдельные вихри оказываются ограниченными сепаратрисами. Источником энергии, необходимой для длительного существования стационарной структуры вращающихся вихрей вместе с соответствующими широтными течениями, по-видимому, служит энергия вращения планеты.

Одна из конкретных проблем — возникновение и длительное существование Большого Красного Пятна Юпитера, которое представляет собой вихрь в атмосфере Юпитера. В отличие от предпосылок и результатов предшествующих работ [4—6], посвященных этой проблеме, причиной образования Пятна Юпитера считается развитие конвективной неустойчивости, а его резкие очертания объясняются тем, что оно ограничено сепаратрисой от окружающих широтных течений.

Для получения аналитических решений используются два основных предположения о возможности пренебрежения возмущениями гравитационного поля и перпендикулярными к поверхности планеты компонентами скоростей.

1. Конвективная и центробежная неустойчивость в цилиндрической геометрии. При рассмотрении линейной теории волн во вращающемся цилиндре выявляются две классические неустойчивости — в общем случае конвективная [3], а также центробежная (неустойчивость Рэля — Тейлора [7]), когда возмущения аксиально-симметричны $\partial/\partial\varphi = 0$ и лежат в меридиональной плоскости r, z . Физический смысл развития обеих неустойчивостей одинаков и заключается во всплывании замороженных функций — энтропии S при конвективной неустойчивости и момента вращения $I = rv_\varphi$ при центробежной неустойчивости. Локальные критерии устойчивости выражаются через производные от замороженных функций S и I .

В силу отсутствия зависимости исходной стационарной конфигурации от φ и z собственные функции линейной задачи имеют вид

$$v_r \sim \sin(m\varphi + \omega t) \sin kz, \quad \tilde{v}_\varphi, \tilde{\rho}, \tilde{p} \sim \cos(m\varphi + \omega t) \sin kz, \\ \tilde{v}_z \sim \sin(m\varphi + \omega t) \cos kz,$$

где коэффициенты — искомые функции от r .

Используемая система уравнений бездиссипативной газодинамики:

$$(1.1) \quad \partial\rho/\partial t + \operatorname{div} \rho v = 0, \quad \rho dv/dt = -\nabla p - \rho \nabla \Phi, \quad dN/dt = 0.$$

Здесь ρ — плотность; p — давление; Φ — гравитационный потенциал; $N = p\rho^{-\gamma}$; γ — показатель адиабаты. Соответствующая линеаризованная система для исходной стационарной конфигурации, в которой $v_r = 0$, $v_z = 0$ и выполняется условие равновесия сил $v_\varphi^2/r = p'/\rho + \Phi'$, в пренебрежении возмущениями Φ сводится к одному уравнению для $f(r)$ ($f = rv_r/y$, $y = \omega + mv_\varphi/r$)

$$\left(\frac{\gamma p y^2}{rs} f' \right)' - \left\{ \frac{\rho y^2}{r} - \frac{2\rho v_\varphi}{r^3} \left[(rv_\varphi)' - \frac{2m^2 \gamma p v_\varphi}{\rho s r^2} \right] - \frac{p'}{\rho r} \left(\rho' - \frac{m^2 \beta p'}{s r^2} \right) - \right. \\ \left. - \left[\frac{y^2}{rs} \left(p' - \frac{2m \gamma p v_\varphi}{y r^2} \right) \right]' \right\} f = 0,$$

где $s = \gamma p m^2 \beta / \rho r^2 - y^2$; $\beta = 1 + k^2 r^2 / m^2$; штрихи означают дифференцирование по r . При $y \rightarrow 0$ оно приводится к виду

$$(1.2) \quad \left(\frac{\rho y^2}{\beta m^2} f' \right)' - \left\{ \frac{\rho y^2}{r} - \frac{k^2 p (r^2)'}{m^2 \beta r^2} - \frac{p'}{\rho r} \left(\rho' - \frac{p'}{c^2} \right) \right\} f = 0$$

($c = \sqrt{\gamma p / \rho}$ — скорость звука). Отсюда следует локальное необходимое условие устойчивости

$$(1.3) \quad k^2 \rho (I^2)' / \beta m^2 r - p' N' / \gamma N > 0.$$

Для аксиальной симметрии ($m = 0$) из (1.3) вытекает критерий устойчивости [8] $\rho(I^2)/r^3 - p'N'/\gamma N > 0$, описывающий как конвективную, так и центробежную неустойчивость.

Для азимутальных возмущений, лежащих в плоскости r, φ , при $k \rightarrow 0$ получаем условие устойчивости $-p'N' > 0$. В этом случае осталась только конвективная неустойчивость.

В модели вращающегося диска, когда скорости лежат в плоскости r, φ , а центробежная сила уравновешивается в стационарном состоянии градиентом давления, уравнение (1.2) можно представить в форме

$$(1.4) \quad (\rho r y^2 f')' - m^2 (\rho y^2 / r - \rho' v_\varphi^2 + \rho r v_\varphi^4 / c^2) f = 0 \quad (v_\varphi = v_\varphi / r).$$

При этом критерий конвективной устойчивости $v_\varphi^2 (\rho' - \rho r v_\varphi^2 / c^2) > 0$ указывает на неустойчивость также и однородной вращающейся жидкости $\rho' = 0$, если не переходить к пределу $c^2 \rightarrow \infty$.

Для оценки величины инкремента развития неустойчивости положим $\rho = \text{const}$, $v_\varphi = \text{const}$, $c^2 = \text{const}$. Тогда решением (1.4), удовлетворяющим граничному условию $f(R) = 0$, будет бесселева функция $J_m(x_{mn} r / R)$ (x_{mn} — корни $J_m(x)$). Отсюда находим выражение для собственной частоты $\omega = -m v_\varphi \pm i m R v_\varphi^2 / c x_{mn}$. Следовательно, инкремент растет с m , убывает с n и пропорционален v_φ^2 .

2. Устойчивость вращающегося аксиально-симметричного слоя. Пусть в стационарном состоянии имеется вращающийся слой газа, ограниченный двумя аксиально-симметричными поверхностями произвольной формы и находящийся под действием гравитационной силы $\nabla\Phi$. В пренебрежении диссипативными процессами возмущенное движение газа описывается системой (1.1). Примем ось вращения за ось z цилиндрической системы координат r, φ, z и введем ортогональные криволинейные координаты s, φ, n , где расстояния n и s отсчитываются по нормали к слою и в сечении меридиональной плоскостью. При этом

$$dn = dz \cos \alpha - dr \sin \alpha, \quad ds = dz \sin \alpha + dr \cos \alpha, \quad dr^2 = ds^2 + r^2 d\varphi^2 + dn^2$$

(α — угол между единичными векторами e_s и e_r , так что $dr/ds = \cos \alpha$). Если в исходном стационарном состоянии скорость имеет только одну составляющую $v_\varphi(\alpha)$ и удовлетворяется уравнение равновесия сил

$$(2.1) \quad \partial p / \partial s + \rho \partial \Phi / \partial s = (\rho / r) v_\varphi^2 \cos \alpha,$$

то при условии, что возмущенные скорости не имеют нормальной компоненты $\mathbf{v} = (v_s, v_\varphi)$, а гравитационное поле не возмущается, линеаризованные уравнения движения для возмущений $\tilde{v}_s \sim \sin(m\varphi + \omega t)$, $\tilde{v}_\varphi, \tilde{p}, \tilde{\rho} \sim \cos(m\varphi + \omega t)$ сводятся к одному уравнению для $f = r v_s$:

$$(2.2) \quad \left(\frac{\tilde{p} r c^2}{s} f' \right)' - \left\{ \frac{\rho}{r} - \frac{2 v_\varphi \cos \alpha}{s} \left(\frac{p'}{y} - \rho I' \right) + \frac{r p'}{\tilde{p} s} \left(\rho' - \frac{\rho I'}{y r^2} \right) + \frac{1}{y} \left(\frac{r^2 y p' - \rho c^2 I'}{r s} \right)' + \frac{p'}{y^2} \frac{p' - c^2 \rho'}{\rho r s} \right\} f = 0.$$

Здесь $y = \omega / m + v_\varphi$; $s = m^2 (c^2 - r^2 y^2)$; $v_\varphi = v_\varphi / r$; $I = r v_\varphi$. При $y \rightarrow 0$ из (2.2) следует

$$(2.3) \quad (\rho r f')' - \left\{ \frac{m^2 \rho}{r} + \frac{p'}{y^2} \frac{p' / c^2 - \rho'}{\rho r} \right\} f = 0.$$

Отсюда видно, что при выполнении локального условия

$$(2.4) \quad p' (p' / c^2 - \rho') > 0$$

развивается конвективная неустойчивость, приводящая к образованию вихревой структуры внутри слоя вращающегося газа. Физический смысл неустойчивости заключается во всплывании энтропии в поле силы $\mathbf{F} = r v_\varphi^2 \cos \alpha e_r - \Phi'(s) e_s$ при $\mathbf{F} \nabla (p \rho^{-\gamma}) > 0$.

Для тонкого сферического слоя, в котором гравитационная сила направлена к центру сферы ($\alpha = \pi/2 - \theta$, $s = R\theta$, $r = R \sin \theta$, θ — широтный угол), уравнение (2.1) записывается в виде

$$(2.5) \quad p'(\theta) = \rho v_{\Phi}^2 \operatorname{ctg} \theta = \rho \Omega^2 R^2 \sin \theta \cos \theta.$$

Это уравнение можно проинтегрировать, принимая зависимость $p \sim \rho^{\gamma_0}$ (см. приложение). Полагая $\Omega = \text{const}$, $p = (k/m)\rho T$, находим широтное распределение температуры в атмосфере планеты

$$(2.6) \quad T(\theta) = T(\pi/4) - \frac{1 - 1/\gamma_0}{4k/m} \Omega^2 R^2 \cos 2\theta,$$

которое оказывается зависящим от скорости вращения атмосферы на экваторе ΩR , от эффективной молекулярной массы m и показателя политропы γ_0 . Параметры γ_0 и m можно исключить, если известен закон понижения температуры с высотой. Действительно, из уравнения равновесия по высоте на экваторе $\Omega^2 R = g + (1 - 1/\gamma_0)^{-1} k T' / m$ при $\Omega^2 R \ll g$ следует

$$(2.6a) \quad T' = -(1 - 1/\gamma_0) m g / k, \quad T(\theta) = T(\pi/4) + \Delta T \cos 2\theta, \\ \Delta T = \Omega^2 R^2 T' / g.$$

Полученные формулы применимы в тропосфере, где плотность газа еще достаточно велика. Для Земли ($m = 29m_p$, $g = 9,8$ м/с²) и для Венеры ($m = 44m_p$, $g = 8,9$ м/с²) первая формула (2.6a) дает правильные экспериментально измеренные градиенты температур $T' = -6,5$ и -8 град/км при одинаковом параметре $\gamma_0 = 1,235$, описывающем «стандартную атмосферу» Земли. Используя это значение γ_0 и подставляя в (2.6a) характеристики вращающихся атмосфер различных планет, получим $-T' = 8; 6,5; 3,5; 1,4$ град/км и $-\Delta T = 3; 35; 15; 200^\circ$ соответственно для Венеры, Земли, Марса, Юпитера. Отсюда видно, что среднее широтное распределение температур в тропосфере Земли удовлетворительно описывается второй формулой (2.6a). Аномально большой перепад температуры $T(\theta)$ на Юпитере обусловлен большой скоростью его вращения.

Необходимый критерий устойчивости вращающейся сферической атмосферы, согласно (2.4), $v_{\Phi}^2 [\operatorname{ctg} \theta v_{\Phi}^2 / c^2 - \rho'(\theta) / \rho] < 0$ совпадает с условием отсутствия конвекции в поле центробежной силы. Полагая $p \sim \rho^{\gamma_0}$, $v_{\Phi} = \Omega R \sin \theta$ и произведя замену аргумента θ на $x = \cos \theta$, представим уравнение (2.3) как

$$\frac{d}{dx} \left[\rho (1 - x^2) \frac{df}{dx} \right] - \left\{ \frac{m^2 \rho}{1 - x^2} + \frac{\rho \Omega^2 R^2 x^2}{y^2 c^2} \left(1 - \frac{\gamma}{\gamma_0} \right) \right\} f = 0.$$

Применяя для оценки инкремента вариационный метод и используя в качестве пробных функций полиномы Лежандра $P_n^m(x)$, в пренебрежении изменением ρ и Ω найдем

$$\omega = m\Omega \pm i \sqrt{\frac{1 - \gamma/\gamma_0}{n(n+1)} \frac{mR\Omega^2}{c} x} \quad (\bar{x} \sim 1).$$

Таким образом, инкремент развития неустойчивости $\delta \sim \sqrt{1 - \gamma/\gamma_0}$ растет с номером азимутальной моды m , уменьшается с номером широтной моды n и пропорционален квадрату угловой скорости вращения атмосферы планеты Ω .

Для тонкого параболического слоя в поле силы тяжести $\nabla\Phi = g e_z$ уравнение (2.1) имеет вид $p'(s)/\rho = r v_p^2 \cos \alpha - g \sin \alpha$, а (2.2) для несжимаемой жидкости ($c^2 \rightarrow \infty$) дает

$$(2.5a) \quad (\rho r f')' - \left\{ \frac{m^2 \rho}{r} + \frac{2v_{\Phi}}{y} (\rho \cos \alpha)' - \frac{\rho' v_{\Phi}^2 \cos \alpha}{y^2} \left(1 - \frac{g \operatorname{tg} \alpha}{r v_{\Phi}^2} \right) \right\} f = 0.$$

Пусть уравнение параболического слоя $z = \kappa_0 r^2$, тогда $\operatorname{tg} \alpha = 2\kappa_0 r$. При постоянной угловой скорости ($v_{\Phi} = \text{const}$) поверхности постоянного

давления ($p = \text{const}$) лежат на параболах $z = \kappa r^2 + \text{const}$, где $\kappa = v_\varphi^2/2g$, отсюда $g \text{tg } \alpha/zv_\varphi^2 = \kappa_0/\kappa$. Пренебрегая величинами $\sim \alpha^2$, получим

$$(2.6a) \quad (\rho r f')' - \left\{ \frac{m^2 \rho}{r} + \rho' \left[\frac{2v_\varphi}{y} - \frac{v_\varphi^2}{y^2} \left(1 - \frac{\kappa_0}{\kappa} \right) \right] \right\} f = 0$$

$(\kappa_0/\kappa = \text{const}, y = \text{const}).$

Если свободная поверхность $s = s_R$ удерживается в исходном стационарном состоянии атмосферным давлением газа с плотностью $\rho_e \ll \rho$, то (2.6a) и граничное условие при $s = s_R$

$$(2.7) \quad r \frac{f'}{f} = \frac{2v_\varphi}{y} - \left(1 - \frac{\kappa_0}{\kappa} \right) \frac{v_\varphi^2}{y^2}$$

удовлетворяются функцией $f \sim s^m$ при произвольной зависимости $\rho(s)$, что приводит к дисперсионному соотношению

$$(2.8) \quad \omega/v_\varphi = 1 - m \pm \sqrt{1 - m(1 - \kappa_0/\kappa)}.$$

При $\kappa > \kappa_0$, когда угловая скорость вращения v_φ превышает $\sqrt{g \text{tg } \alpha/r}$, развивается неустойчивость с инкрементом, растущим с номером азимутальной моды m .

Аналогичная неустойчивость азимутальных возмущений вращающегося плазменного цилиндра, удерживаемого в равновесии магнитным полем, рассматривалась в [8—10]. Уравнения для соответствующей МГД задачи получаются из (2.6a)—(2.8), если положить $\kappa_0 = 0$. Рассмотренная здесь в грубой модели параболического слоя постоянной толщины «граничная» неустойчивость может привести к возникновению системы вихрей, наблюдаемых в опытах [4].

Для оценки стабилизирующего действия вязкости рассмотрим несжимаемое вращение жидкости внутри квадрата $0 < x < l$, $0 < z < l$, описываемое функцией тока $\Psi = A \cos \pi x/l \cdot \cos \pi z/l$. Из уравнения $\partial \mathbf{v} / \partial t = \nu \Delta \mathbf{v}$ (ν — кинематический коэффициент вязкости) следует, что декремент затухания $\delta_1 = \pi^2 \nu / l^2$. Полагая $\delta = R \Omega^2 / c$, $R \sim l$, получим, что стабилизация становится существенной, когда $\delta_1 > \delta$, т. е. $\Lambda = \Omega^2 l^3 / \nu c < \pi^2$. Безразмерное число Λ равно произведению чисел Маха M и Рейнольдса Re . В частности, для воды из полученной оценки вытекает, что для развития неустойчивости требуется $2\pi \Omega > 70 l^{-3/2}$. Следует, однако, иметь в виду, что неучтенные факторы (надкритичность и пр.) могут привести к увеличению необходимой для развития неустойчивости Ω .

3. Стационарные вихри во вращающемся газе. Проблема существования стационарных вихрей представляет большой интерес для широкого класса задач газодинамики. В последнее время появился ряд работ, в которых эта проблема рассматривается в связи с построением динамических моделей Большого Красного Пятна Юпитера [5, 6] на основе представления о его солитонном строении (Солитон Россби). В настоящей работе рассматривается решение общей задачи о возможных конфигурациях вихрей и соответствующих им широтных течений в атмосфере вращающейся планеты с гладкой аксиально-симметричной поверхностью на основе теории «нормальных мод». Использование симметрии и приближения «тонкой атмосферы» позволяет значительно упростить задачу и свести ее к решению одного уравнения для Ψ , содержащего произвольную функцию $\mathcal{P}'(\Psi)$. При подходящем выборе $\mathcal{P}'(\Psi)$ это уравнение становится линейным, что приводит к некоторому классу аналитических точных решений.

Систему уравнений газодинамики в отсутствие диссипации во вращающейся с постоянной Ω системе координат можно представить в виде

$$(3.1) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + [\text{rot } \mathbf{v} + 2\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{v}] = - \frac{\nabla \rho}{\rho} - \nabla \left(\Phi + \frac{v^2}{2} - \frac{1}{2} [\boldsymbol{\Omega} \mathbf{r}]^2 \right),$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{v} = 0, \quad \frac{dS}{dt} = 0.$$

Если воспользоваться термодинамическим тождеством $dW = dp/\rho + TdS$, то для стационарного движения ($\partial/\partial t = 0$) получим

$$(3.2) \quad [\text{rot } \mathbf{v} + 2\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{v}] = -\nabla \mathcal{P} + T\nabla S, \quad \text{div } \rho \mathbf{v} = 0, \\ \mathcal{P} = W + \Phi + v^2/2 - [\boldsymbol{\Omega} \mathbf{r}]^2/2.$$

Поскольку, согласно (3.1), $\mathbf{v}\nabla S = 0$, то из (3.2) следует $\mathbf{v}\nabla \mathcal{P} = 0$, т. е. функция \mathcal{P} постоянна вдоль линий тока жидкости.

Введем ортогональную систему координат x^i , $dr^2 = g_{ik}dx^i dx^k$ так, чтобы линии x^1 и x^2 лежали на рассматриваемой поверхности Σ , а координата x^3 отсчитывалась по нормали \mathbf{n} к этой поверхности. Тогда в предположении, что $\mathbf{v}\mathbf{n} = 0$ и глубина слоя жидкости (или газа) на поверхности Σ мала, имеем $v^3 = 0$, $\rho \sqrt{g}v^1 = -\partial\Psi/\partial x^2$, $\rho \sqrt{g}v^2 = \partial\Psi/\partial x^1$, $\text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{e}_3 \text{div } \nabla \Psi/\rho$, где g — детерминант метрического тензора g_{ik} . Условие баланса тангенциальных сил приводит к уравнению

$$(3.3) \quad \frac{1}{\rho} \text{div } \frac{\nabla \Psi}{\rho} + 2 \frac{\boldsymbol{\Omega} \mathbf{e}^3}{\rho} = \mathcal{P}'(\Psi) - TS'(\Psi).$$

Рассматривая далее жидкость как несжимаемую при $\rho = \text{const}$ и переопределяя Ψ так, чтобы в нее не входило ρ , находим

$$(3.4) \quad \sqrt{g}v^1 = -\partial\Psi/\partial x^2, \quad \sqrt{g}v^2 = \partial\Psi/\partial x^1, \\ \Delta\Psi + 2\boldsymbol{\Omega} \mathbf{e}^3 = \mathcal{F}'(\Psi), \quad \mathcal{F}'(\Psi) = p/\rho + \Phi + v^2/2 - [\boldsymbol{\Omega} \mathbf{r}]^2/2$$

($\mathcal{P}(\Psi)$ — произвольная функция). Эти уравнения становятся точными, если $\partial/\partial x^3 = 0$, например, для цилиндрического диска, когда $\mathbf{e}^3 = \mathbf{e}_z$ и $\partial/\partial z = 0$. При линейной функции $\mathcal{P}'(\Psi)$ уравнение для Ψ линейно. Функция $\boldsymbol{\Omega}$ является угловой скоростью системы координат, в которой рассматриваемое течение стационарно ($\partial/\partial t = 0$).

Для вращающегося диска ($x^1 = r$, $x^2 = \varphi$, $x^3 = z$, $\mathbf{e}^3 = \mathbf{e}_z$, $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}_z$) уравнения (3.4) следующие:

$$rv_z = -\partial\Psi/\partial\varphi, \quad v_\varphi = \partial\Psi/\partial r, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} = \mathcal{P}'(\Psi) - 2\Omega, \quad \mathcal{P}'(\Psi) = \frac{p}{\rho} + \Phi + \frac{v^2}{2} - \frac{\Omega^2 r^2}{2}.$$

При линейной функции $\mathcal{P}'(\Psi) = A + B\Psi$ имеем

$$(3.5) \quad \Delta\Psi - B\Psi = A - 2\Omega.$$

Решения уравнения (3.5) ищем в виде $\Psi = F(r) + f(r) \cos m\varphi$, что приводит к системе $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dF}{dr} - BF = A - 2\Omega$, $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{df}{dr} - \left(\frac{m^2}{r^2} + B\right) f = 0$.

Если определить B из граничного условия $f(R) = 0$, то $B = -k^2 = -x_{mn}^2/R^2$ (x_{mn} — корни бесселевой функции $J_m(x)$). В результате находим ограниченное при $r < R$ решение, выражающееся через бесселевы функции, $\Psi = (A - 2\Omega)/k^2 + aJ_0(kr) + \lambda J_m(kr) \cos m\varphi$, где a и λ — произвольные постоянные, характеризующие амплитуды «широтных» течений и вихрей. В рассматриваемом случае решение во вращающейся системе координат отличается от решения в неподвижной системе [8] только добавлением константы к Ψ .

Для вращающейся сферы в сферических координатах $x^1 = \theta$, $x^2 = \varphi$, $x^3 = r$, $\mathbf{e}^3 = \mathbf{e}_r$ при $r \simeq R$ имеем $v_\varphi = \partial\Psi/\partial\theta$, $\sin\theta v_\theta = -\partial\Psi/\partial\varphi$,

$$(3.6) \quad \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \sin\theta \frac{\partial\Psi}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2} + 2\Omega R \cos\theta = \mathcal{P}'(\Psi).$$

Для получения картины распределения стационарных вихрей на поверхности сферы следует решить уравнение (3.6). Некоторый класс аналитических точных решений (3.6) можно получить при линейной функции $\mathcal{P}'(\Psi) = A + B\Psi$. При этом

$$(3.7) \quad \Psi = F(\theta) + f(\theta) \cos m\varphi.$$

Здесь F и f — решения системы уравнений

$$(3.8) \quad \frac{d}{dx} (1-x^2) \frac{dF}{dx} - BF = A - 2\Omega R x, \quad \frac{d}{dx} (1-x^2) \frac{df}{dx} - \left(\frac{m^2}{1-x^2} + B \right) f = 0,$$

а $x = \cos \theta$. Функция $F(\theta)$ описывает широтные течения, в то время как $f(\theta)$ пропорциональна угловой скорости вихря в его центре, т. е. в эллиптической особой точке семейства линий тока $\Psi = \text{const}$. Решения системы (3.8), существенно зависящие от φ и являющиеся непрерывными и однозначными, существуют, когда $B = -n(n+1)$, $n = 1, 2, 3, \dots$. При $n = 1$ решение первого уравнения оказывается сингулярным, и, следовательно, регулярные решения на всей поверхности сферы имеются только для $n \geq 2$. Тогда

$$(3.9) \quad \Psi = \frac{A}{n(n+1)} + \frac{2\Omega R \cos \theta}{2-n(n+1)} + aP_n(\cos \theta) + \lambda P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi,$$

где P_n и P_n^m — полиномы и присоединенные функции Лежандра; a и λ — произвольные постоянные, определяющие соответственно амплитуды зональных течений и вихрей. В отличие от плоского диска здесь появился член $\sim \cos \theta$ с коэффициентом, зависящим от ΩR и n .

Пусть центр вихря расположен в точке $\varphi = \varphi_0$, $\theta = \theta_0$, тогда в окрестности φ_0, θ_0 $\Psi = k[\sin^2 \theta_0 (\varphi - \varphi_0)^2 + \eta^2 (\theta - \theta_0)^2]$ ($\eta = l_\varphi/l_\theta$ — эллиптичность вихря). Поскольку $d\varphi/dt = \partial\Psi/\partial\theta$, имеем $R \sin \theta_0 d\varphi/dt = 2k\eta^2 (\theta - \theta_0)^2$, $\eta^2 (\theta - \theta_0)^2 = \Psi/k - \sin^2 \theta_0 (\varphi - \varphi_0)^2$. Отсюда $R \sin \theta_0 d\varphi/dt = 2k\eta \sqrt{\Psi/k - \sin^2 \theta_0 (\varphi - \varphi_0)^2}$. Полагая $x = R \sin \theta_0 (\varphi - \varphi_0)$, $y = R(\theta - \theta_0)$, получаем уравнение эллипса $x^2/l_\varphi^2 + y^2/l_\theta^2 = R^2\Psi/k l_\varphi^2 = 1$, подставляя которое в уравнение для $d\varphi/dt$ и интегрируя, находим период

$$T = \frac{2R}{k\eta} \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} - \frac{\pi R}{k\eta}.$$

Отсюда угловая скорость вихря в окрестности его оси $v_* = 2\pi/T = 2k\eta/R$ или, поскольку $2k \sin^2 \theta = \partial^2\Psi/\partial\varphi^2$,

$$(3.10) \quad v_* = -\frac{\eta}{R} \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \lambda P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi.$$

Здесь у θ и φ опущены индексы 0. Во вращающейся системе координат угловая скорость центра вихря равна нулю, а в неподвижной системе Ω .

Формула (3.9) позволяет выразить параметры λ и a через заданные координаты центра вихря φ_0, θ_0 и его эллиптичность η . Используя определение особой точки $\partial\Psi/\partial\varphi = \partial\Psi/\partial\theta = 0$, получим два уравнения для вихрей, расположенных на азимутах $\sin m\varphi = 0$:

$$(3.11) \quad aP_n' + \lambda (P_n^m)' \cos m\varphi = \frac{2\Omega R \sin \theta}{2-n(n+1)},$$

$$aP_n'' + \lambda \left[(P_n^m)'' + \frac{m^2 \eta^2}{\sin^2 \theta} P_n^m \right] \cos m\varphi = \frac{2\Omega R \cos \theta}{2-n(n+1)}$$

(штрихи означают производные по θ и опущены индексы 0). Решение системы (3.11) имеет вид

$$\lambda \cos m\varphi = \frac{2\Omega R/D}{2-n(n+1)} (P_n' \cos \theta - P_n'' \sin \theta),$$

$$a = \frac{2\Omega R/D}{2-n(n+1)} \left\{ \left[(P_n^m)'' + \frac{m^2 \eta^2}{\sin^2 \theta} P_n^m \right] \sin \theta - (P_n^m)' \cos \theta \right\},$$

где детерминант $D = [(P_n^m)'' + m^2 \eta^2 P_n^m / \sin^2 \theta] P_n' - (P_n^m)' / P_n''$. При резонансных значениях θ и η , когда $D \rightarrow 0$, λ и a стремятся к бесконечности.

Представляется интересным случай $(P_n^m)'_0 = 0$, когда $v_\varphi = \partial\Psi/\partial\theta$ обращается в нуль при $\theta = \theta_0$ по отдельности для широтных течений и для

вихря. При этом

$$(3.12) \quad \lambda \cos m\varphi = \frac{2\Omega R}{2-n(n+1)} \frac{\cos\theta - \sin\theta P_n''/P_n'}{(P_n^m)'' + m^2\eta^2 P_n^m/\sin^2\theta}, \quad a = \frac{2\Omega R \sin\theta}{2-n(n+1)} \frac{1}{P_n'}.$$

Здесь при резонансе $\lambda \rightarrow \infty$, а a остается конечным. Следует, однако, иметь в виду, что большие λ , отвечающие слишком большим амплитудам вихрей, выпадают из области применимости рассматриваемого приближения $v_r = 0$.

При наличии «фона» широтных течений с узлами $v_\varphi(\theta)$ местом образования вихрей будут, по-видимому, узлы фона [6], так как вихри могут существовать там со сколь угодно малой амплитудой (при $\eta \rightarrow \infty$). В то время как в отсутствие такого фона вихри могут зарождаться в любой точке сферы и по мере роста амплитуды вихря λ будет расти и соответствующий фон a , который составляет с вихрем единую «собственную функцию».

Если считать, что вихри образуются вместе с соответствующими широтными течениями, то скорость вращения планеты можно получить из условия $a \rightarrow 0$, $\lambda \rightarrow 0$, т. е. согласно (3.9) $v_\varphi = -2\Omega R \sin\theta/[2-n(n+1)]$, что отвечает твердотельному вращению с угловой частотой $\Omega_0 = 2\Omega/[n(n+1)-2]$ во вращающейся системе координат. Отсюда относительная угловая скорость центра вихря и планеты $-\Omega_0 = 2\Omega/[2-n(n+1)] < 0$ ($n \geq 2$). Итак, азимутально-несимметричные решения $B = -n(n+1)$ в пределе $a \rightarrow 0$, $\lambda \rightarrow 0$ содержат стационарную конфигурацию, вращающуюся как целое с угловой частотой $-\Omega_0$. Симметричное решение $B = 0$, $n = 0$ описывает невращающуюся планету с $\Omega_0 = -\Omega$.

Когда $(P_n^m)_0 = 0$, при использовании второго уравнения (3.8) для v_* и переменной части функции потока Ψ получим

$$(3.13) \quad v_* = \frac{2m^2\Omega\eta}{2-n(n+1)} \frac{\cos\theta - \sin\theta P_n''/P_n'}{n(n+1)\sin^2\theta - m^2(1+\eta^2)} \quad (\theta = \theta_0);$$

$$(3.14) \quad \Psi = \frac{2\Omega R}{2-n(n+1)} \left\{ \cos\theta + \frac{\sin\theta_0}{(P_n)_0} P_n - \frac{\cos\theta_0 - \sin\theta_0 (P_n''/P_n)_0}{n(n+1) - m^2(1+\eta^2)/\sin^2\theta_0} \frac{P_n^m}{(P_n^m)_0} \cos m\varphi \right\}.$$

При $m = 1$ $P_n^m = -P_n'$, а следовательно, в рассматриваемом «резонансном» случае $(P_n^m)_0 = 0$ и формулы (3.13), (3.14) запишутся в виде

$$(3.15) \quad v_* = \frac{2\Omega n}{2-n(n+1)} \frac{\cos\theta}{n(n+1)\sin^2\theta - 1 - \eta^2} \quad (\theta = \theta_0);$$

$$(3.16) \quad \Psi = \frac{2\Omega R}{2-n(n+1)} \left\{ \cos\theta + \frac{\sin\theta_0}{(P_n)_0} P_n - \frac{\cos\theta_0}{n(n+1) - (1-\eta^2)/\sin^2\theta_0} \frac{P_n'}{(P_n)_0} \cos\varphi \right\}.$$

Если потребовать, чтобы одна из круговых линий тока совпадала с экватором, то $n = 2, 4, 6, \dots$ Тогда картины течений в северном и южном полушариях различны, особые точки расположены в узлах $P_n''(\theta)$ при $\varphi = 0$ и π , а эллиптичности в этих точках связаны соотношением $\eta_+^2 + \eta_-^2 = 2n(n+1)\sin^2\theta_0 - 2$. Если обе точки эллиптические (вихри), то сепаратрисный угол, разделяющий два семейства вихрей, вращающихся в противоположные стороны, можно оценить из условия $\Psi'' = 0$ при $\theta = \theta_0$, откуда $\cos\varphi_S = (\eta_-^2 - \eta_+^2)/(\eta_+^2 + \eta_-^2)$. Требование $\partial v_\varphi/\partial\theta = 0$ для $\theta = \pi/2$, которое выполняется при $n = 3, 5, 7, \dots$, приводит к симметричным картинам течений в северном и южном полушариях.



Рис. 1

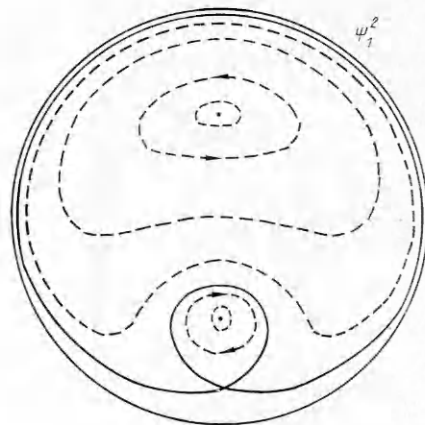


Рис. 2

На рис. 1 представлена конфигурация стационарных течений $\Psi = \text{const}$ с вихрями на поверхности вращающейся сферы, построенная по формуле (3.14) для $m = 3$, $n = 2$, $\theta_0 = 60^\circ$, $\eta = 1/\sqrt{3}$ (северное полушарие). Она содержит шесть вихрей, причем малые вихри, ограниченные сепаратрисами с гиперболической точкой, смещенной к полюсу, вращаются в ту же сторону, что и планета, а большие — в противоположную.

На рис. 2 изображены линии тока $\Psi = \text{const}$ для конфигурации (3.16) с $m = 1$, $n = 2$, $\theta_0 = 45^\circ$, $\eta = 1$ (северное полушарие). Здесь имеется один вихрь, вращающийся в сторону, противоположную вращению планеты, с $v_* = \Omega/\sqrt{8}$ в окрестности своей оси. Вторая эллиптическая особая точка представляет собой смещенный центр зональных течений.

На рис. 3 построены картины течений $\Psi = \text{const}$ (3.16) для $m = 1$, $n = 4$, $\theta_0 = 69^\circ$, $\eta = 1$ в северном (а) и южном (б) полушариях. Расположенный в южном полушарии вихрь по своему местоположению, форме, размерам и направлению вращения (против вращения планеты) похож на Большое Пятно Юпитера. Его угловая скорость вращения в окрестности оси $v_* = 0,015 \Omega$, а средняя угловая скорость на периферии $v^* \simeq 0,07 \Omega$ близка к наблюдаемой в Пятне Юпитера.

На рис. 4 показаны аналогичные рис. 3 картины течений для $m = 1$, $n = 6$, $\theta_0 = 76^\circ$. Здесь зональные течения с большим количеством узлов и имеется ограниченный сепаратрисой вихрь в южном полушарии, близкий по форме к Пятну на Юпитере и вращающийся против вращения планеты с $v_* = 0,0028 \Omega$ в окрестности своей оси и $v^* \simeq 0,03 \Omega$ на периферии. Его размеры и средняя скорость вращения приблизительно вдвое меньше, чем в Большом Вихре на Юпитере.

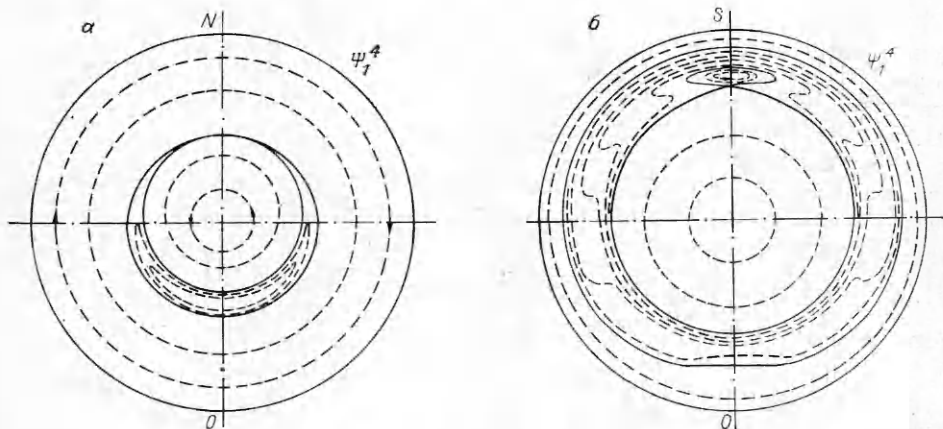
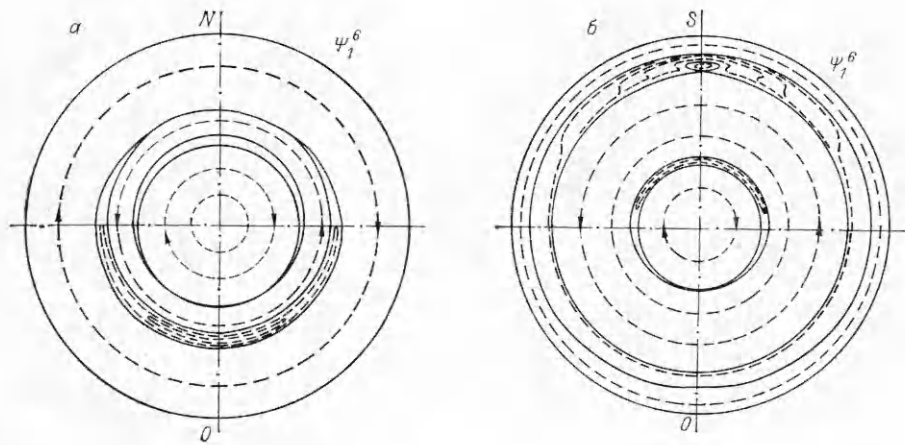


Рис. 3



Р и с. 4

Итак, все показанные на рисунках картины стационарных течений представляют собой весьма узкий класс, ограниченный требованием линейности функции $\mathcal{P}'(\Psi)$. Существование даже в этом узком классе решений, качественно описывающих такое экзотическое явление, как Большое Пятно Юпитера, по-видимому, свидетельствует об адекватности его описания в рамках рассматриваемой теории «нормальных собственных функций».

Приложение. В общем случае система газодинамических уравнений, описывающих стационарное состояние, неполная, и для нахождения однозначного решения необходимо привлечение дополнительных уравнений. Для ряда задач недостающие уравнения можно получить, исходя из известных условий устойчивости.

Простейший пример — задача о равновесии плоской атмосферы, когда имеется только одно уравнение

$$(П.1) \quad p'(z) = -\rho g$$

для двух неизвестных функций давления p и плотности ρ . Добавление уравнения состояния идеального газа $p = (k/m)\rho T$ не изменяет ситуацию, поскольку при этом вводится новая функция — температура T . Для данной задачи представляется естественным использование известного условия конвективной устойчивости, заключающегося в требовании возрастания энтропии с высотой [3]

$$(П.2) \quad (p\rho^{-\gamma})' > 0.$$

Однако условие устойчивости является неравенством, а для нахождения однозначного решения требуется дополнительное уравнение, которое можно получить, воспользовавшись гипотезой Кельвина [11] о реализации равновесия на границе устойчивости. При этом неравенство (П.2) заменяется уравнением $(p\rho^{-\gamma})' = 0$, интегрируя которое приходим к условию постоянства энтропии $p\rho^{-\gamma} = \text{const}$. Более точным описанием структуры атмосферы будет при использовании вместо показателя адиабаты γ близкого к нему показателя политропы γ_0 , который, согласно (П.2), меньше γ . Тогда в качестве дополнительного уравнения имеем

$$(П.3) \quad p\rho^{-\gamma_0} = \text{const}.$$

Интегрируя систему (П.1), (П.3), находим однозначное решение $T =$

$$= T_0 - \frac{1 - 1/\gamma_0}{k/m} gz, \quad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\gamma_0}{\gamma_0 - 1}}, \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma_0 - 1}},$$

которое содержит один неизвестный постоянный параметр γ_0 .

Полученные теоретические зависимости хорошо описывают измеренные распределения температур и давлений в достаточно плотных нижних слоях атмосфер Земли и Венеры при одинаковом параметре $\gamma_0 = 1,235$.

При превышении некоторой высоты z_1 ($z_1 \approx 11$ и 60 км для Земли и Венеры) линейный спад температуры прекращается и сменяется областью постоянной температуры $T = T_1 = \text{const}$, где, как это следует из уравнения равновесия (П.1), p и ρ уменьшаются экспоненциально ($\gamma_0 = 1$): $T = T_1$, $\frac{p}{p_1} = \frac{\rho}{\rho_1} = \exp\left(-\frac{z-z_1}{p_1/g\rho_1}\right)$.

Прекращение спада температуры при $z > z_1$ объясняется тем, что атмосфера, находящаяся выше z_1 , становится эффективно прозрачной для излучения, так что ее барометрическая толщина $l_1 = p_1/\rho_1 g = kT_1/mg$ сравнивается с оптической $l = 1/\kappa\rho_1$, определяющейся средней длиной пробега фотонов на высоте z_1 . Отсюда вытекает, что при $z \approx z_1$ должно выполняться соотношение $p = g/\kappa$ (κ — коэффициент непрозрачности атмосферы [12, 13]).

Приведенное выше рассмотрение имеет достаточно общий характер и применимо также для атмосферы звезд, для которых значение граничной температуры T_1 — очень важная характеристика, определяющая их светимость $L = \pi R^2 \sigma T_1^4$. Запишем формулу для граничной температуры в виде $T_1 = Ag$, $A = ml/k$ и предположим, что оптическая длина l обратно пропорциональна эффективной молекулярной массе m , тогда $A = \text{const}$ и $T_1 \sim g$. Оказывается, что $A = 22 \text{ К} \cdot \text{с}^2/\text{м}$, соответствующая измеренным значениям $T_1 = -57$ и -75°C для Земли и Венеры, дает также близкий к действительности результат $T_1 = 6000 \text{ К}$ для эффективной поверхностной температуры Солнца.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гленсдорф П., Пригожин И. Термодинамическая теория структуры устойчивости и флуктуаций.— М.: Мир, 1973.
2. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability.— Oxford: Clarendon Press, 1961.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред.— М.: Гостехиздат, 1954.
4. Антипов С. В., Незлин М. В. и др. Солитон Россби // Письма в ЖЭТФ.— 1981.— Т. 33, вып. 7.
5. Петвиашвили В. И. Красное Пятно Юпитера и дрейфовый солитон в плазме // Письма в ЖЭТФ.— 1980.— Т. 32, вып. 11.
6. Сагдеев Р. З., Шапиро В. Д., Шевченко В. Н. Большое Красное Пятно как синоптический вихрь в юпитерианской атмосфере // Письма в астрон. журн.— 1981.— Т. 7, вып. 8.
7. Линь Цзяцзяо. Теория гидродинамической устойчивости.— М.: ИЛ, 1958.
8. Соловьев Л. С. Вопросы теории плазмы.— М.: Госатомиздат, 1963.— Вып. 3.
9. Вандакуров Ю. В. О желобковых неустойчивостях для вращающегося плазменного шнура // ЖТФ.— 1963.— Т. 33, вып. 9.
10. Rosenbluth M., Krall N., Rostoker N. Finite larmor radius stabilization of «weakly» unstable confined plasmas // Nuclear Fusion.— 1962.— Supplement part 1.
11. Чандрасекар С. Введение в учение о строении звезд.— М.: ИЛ, 1950.
12. Гибсон Э. Спокойное Солнце.— М.: Мир, 1977.
13. Соловьев Л. С., Кузнецова Т. Д. О внутреннем строении релятивистских звезд // Письма в ЖЭТФ.— 1980.— Т. 32, вып. 9.

Поступила 24/IV 1986 г.

УДК 532.526

ОБ АСИМПТОТИКЕ ТЕЧЕНИЙ МАЛОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ ДЕЙСТВИИ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ НА СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕ

В. А. Батищев

(Ростов-на-Дону)

При больших числах Рейнольдса построены формальные асимптотические разложения решения плоской нелинейной стационарной задачи со свободной границей в предположении, что поверхностные касательные напряжения заданы и имеют ко-