ПМТФ, № 4, 1965

О ВЛИЯНИИ ВЗВЕШЕННЫХ В ЖИДКОСТИ ЧАСТИЦ НА ВЫРОЖДЕНИЕ ИЗОТРОПНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Ю. А. Буевич, Ю. П. Гупало

(Москва)

В предлагаемой работе получены динамические уравнения для двуточечных двойных корреляций пульсационных скоростей жидкости и взвешенных в ней частиц при малой объемной концентрации твердой фазы. Эти уравнения значительно упрощаются в случае однородной изотропной турбулентности. Подробно рассмотрен конечный период вырождения изотропной турбулентности. На этом этапе в случае высокоинерционных частиц турбулентность неоднородной жидкости оказывается подобной турбулентности однородной жидкости (без частиц) в том смысле, что наличие частиц влияет лишь на энергию пульсаций, но оставляет неизменными пространственные масштабы турбулентности и функцию трехмерного энергетического спектра. Взвешенные частицы обусловливают экспоненциальное затухание турбулентных пульсаций.

Теоретических сведений о гидродинамике взвеси мелких частиц в жидкости или газе при турбулентном движении мало. В основном они относятся к исследованию поведения отдельных частиц в заданном поле турбулентности [1]. Задача о турбулентном движении смеси в целом была рассмотрена Г. И. Баренблаттом [2], который вывел уравнения движения смеси и использовал для их замыкания гипотезу А.Н. Колмогорова. Выводом уравнений для турбулентных пульсаций смеси занимался также Хинце [3]. Однако, как показал Мюррей [4], уравнения Хинце противоречат третьему закону Ньютона.

Влияние взвешенных частиц на турбулентность двухфазного потока обусловлено несовпадением локальных скоростей частиц и среды. Силы сопротивления движению частиц относительно жидкости приводят к дополнительной диссипации энергии пульсаций и гашению турбулентности [2]. С другой стороны, при несовпадении усредненных скоростей частиц и среды взвешенные частицы могут оказывать также дестабилизирующее влияние [5,6], способствуя переносу энергии от усредненного движения к пульсационному. Ниже рассмотрен случай, когда усредненные скорости обеих фаз совпадают, т. е. имеет место только первый из указанных эффектов.

1. Постановка задачи. Следуя Г. И. Баренблатту [2], запишем уравнения движения жидкости и взвешенных в ней частиц в виде

$$d_1(1-\rho)\left(\frac{\partial}{\partial t}+v_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)v_i=-\frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_i}+\frac{\partial \tau_{ji}^{(1)}}{\partial x_j}-d_1(1-\rho)g_i-f_i$$

$$d_2\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}+w_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)w_i=-\frac{\partial p^{(2)}}{\partial x_i}+\frac{\partial \tau_{ji}^{(2)}}{\partial x_j}-d_2\rho g_i+f_i \qquad (1.1)$$

Здесь v_i и w_i — скорости жидкости и частиц, d_1 и d_2 — плотности жидкости и вещества частиц, ρ — объемная концентрация частиц, g_i — компоненты гравитационного ускорения, $p^{(1)}$, $p^{(2)}$ и $\tau_{ji}^{(1)}$, $\tau_{ji}^{(2)}$ — давления и тензоры вязких напряжений для жидкости и частиц соответственно, f_i — сила взаимодействия между частицами и жидкостью, нормированная на единицу объема смеси.

Будем считать, что $d_1 = \mathrm{const}$ (жидкость несжимаема), $d_2 = \mathrm{const}$, концентрация $\rho \ll 1$. Последнее позволяет положить в первом из уравнений (1.1) величину $d_1(1-\rho) \approx d_1$. Ввиду малости ρ можно пренебречь также влиянием взаимодействия частиц, т. е. считать $\tau_{ji}^{(2)}$ и $p^{(2)}$ равными нулю. Полагая

$$\tau_{ij}^{(1)} = \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right), \qquad p^{(1)} = p$$

где μ — вязкость жидкости, имеем вместо (1.1)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right) v_i = -\frac{1}{d_1}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} - g_i - \frac{f_i}{d_1}, \qquad \nu = \frac{\mu}{d_1}$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + w_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right) w_i = \frac{\varkappa}{d_1 \rho} f_i - g_i, \qquad \varkappa = \frac{d_1}{d_2} \tag{1.2}$$

Уравнение неразрывности для жидкости и уравнение баланса массы для частиц при сделанном выше допущении $\rho \ll 1$ принимают вид

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho w_j}{\partial x_j} = 0 \tag{1.3}$$

Как обычно, считаем турбулентность однородной в том смысле, что во-первых, усредненные характеристики движения в рассматриваемой области не зависят от координат и времени, а во-вторых, все двуточечные корреляции зависят лишь от вектора расстояния между точками, но не от местоположения этих точек.

Введем пульсации скоростей, давления и концентрации частиц

$$v_i = \langle v_i \rangle + v_i', \quad w_i = \langle w_i \rangle + w_i', \quad p = \langle p \rangle + p', \quad \rho = \langle \rho \rangle + \rho'$$

Знак $\langle\rangle$ означает усреднение по времени или по малому физическому объему. В соответствии с обычным методом [7], допускаем, что эти временные или пространственные средние тождественны с вероятностными средними.

Наконец, будем считать, что для усредненного движения сила $\langle f_i \rangle$ отсутствует, т. е. $\langle v_i \rangle = \langle w_i \rangle$. Это предположение является, в частности, необходимым при рассмотрении изотропной турбулентности. С физической точки зрения, оно, вообще говоря, равносильно допущению, что силы тяжести малы по сравнению с вязкими и инерционными силами.

2. Динамические уравнения для корреляций. Легко видеть, что для пульсаций v_i' справедливо первое из уравнений (1.3); из второго уравнения (1.3) следует

$$\langle \rho \rangle \frac{\partial w_j'}{\partial x_j} = -\frac{\partial \rho'}{\partial t} - \langle w_j \rangle \frac{\partial \rho'}{\partial x_j} - \frac{\partial \rho' w_j'}{\partial x_j}$$

Пренебрежение ρ в первом уравнении (1.1) и в уравнении неразрывности для жидкости означает по существу допущение о малости корреляций вида

$$\langle \rho' v_i' v_j' \rangle, \quad \langle \rho' v_i' v_j' v_k' \rangle, \quad \langle \rho' w_i' v_j' \rangle \text{ и т. д.}$$

по сравнению с корреляциями того же порядка от скоростей v_i' и w_i'. Однако такие же корреляции, в которых вместо ρ' используется $\sigma = \rho' / \langle \rho \rangle$, необязательно малы. Поэтому в общем случае

$$w_j' \frac{\partial w_i'}{\partial x_j} = \frac{\partial w_i' w_j'}{\partial x_j} - w_i' \frac{\partial w_j'}{\partial x_j} = \frac{\partial w_i' w_j'}{\partial x_j} + w_i' \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \langle w_j \rangle w_i' \frac{\partial \sigma}{\partial x_j} + w_i' \frac{\partial \sigma w_j'}{\partial x_j} \tag{2.1}$$

и такое же соотношение для соответствующих усредненных величин. Это соотношение более точное, чем использованное в [2]

$$\left\langle w_i' \frac{\partial w_j'}{\partial x_j} \right\rangle = 0, \qquad \left\langle w_j' \frac{\partial w_i'}{\partial x_j} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial w_i' w_j'}{\partial x} \right\rangle$$

Уравнения для пульсаций скоростей, соответствующие уравнениям потока (1.2), в точке A пространства имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(v_i)_A + [\langle v_j\rangle + (v_j)_A]\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_A (v_i)_A = -\frac{1}{d_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_A p_A + \nu\left(\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j}\right)_A (v_i)_A -$$

$$-\frac{1}{d_1}(f_i)_A, \qquad \frac{\partial}{\partial t}(w_i)_A + [\langle w_j\rangle + (w_j)_A]\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_A (w_i)_A = \frac{\varkappa}{d_1}\left(\frac{f_i}{\langle\rho\rangle}\right)_A$$

Здесь и в дальнейшем штрих в обозначениях пульсаций отброшен; средние величины по-прежнему обозначены через $\langle v_i\rangle$, $\langle w_i\rangle$ и т. д.

Умножая первое из этих уравнений на значение пульсаций j-й компоненты скорости в точке B пространства и складывая результат с таким же уравнением для j-й компоненты скорости в точке B, умноженным на $(v_i)_A$, получим с учетом первого уравнения (1.3) и того факта, что дифференцирование в точке A не распространяется на $(v_j)_B$, и наоборот

$$\frac{\partial}{\partial t}(v_i)_A(v_j)_B + \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_A (v_i)_A(v_k)_A(v_j)_B + \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_B (v_i)_A(v_k)_B(v_j)_B =$$

$$= -\frac{1}{d_1}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_A p_A(v_j)_B + \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_B p_B(v_i)_A\right] + \nu\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k}\right)_A (v_i)_A(v_j)_B +\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k}\right)_B (v_i)_A(v_j)_B\right] - \frac{1}{d_1}[(f_i)_A(v_j)_B + (f_j)_B(v_i)_A] \tag{2.2}$$

При $f_i = 0$ это уравнение совпадает с обычно используемым [1].

Вводя обозначения корреляций (2.3)

$$(V_{i,j})_{A,B} = \langle(v_i)_A\ (v_j)_B\rangle, \quad (K_{i,p}^{(v)})_{A,B} = \langle(v_i)_A p_B\rangle, \quad (K_{p,j}^{(v)})_{A,B} = \langle p_A(v_j)_B\rangle$$

$$(S_{ik,j}^{(v)})_{A,B} = \langle(v_i)_A(v_k)_A(v_j)_B\rangle, \qquad (S_{i,kj}^{(v)})_{A,B} = \langle(v_i)_A(v_k)_B(v_j)_B\rangle$$

$$(\Phi_{i,j}^{(v)})_{A,B} = \frac{1}{d_1}[\langle(f_i)_A(v_j)_B\rangle + \langle(f_j)_B(v_i)_A\rangle]$$

и расстояние $\xi_i = (x_i)_B - (x_i)_A$ между A и B получим в результате усреднения уравнения (2.2)

$$\frac{\partial}{\partial t}V_{i,j} + \frac{\partial}{\partial \xi_k}(S_{i,kj}^{(v)} - S_{ik,j}^{(v)}) =$$

$$= \frac{1}{d_1}\left(\frac{\partial}{\partial \xi_i}K_{p,j}^{(v)} - \frac{\partial}{\partial \xi_j}K_{i,p}^{(v)}\right) + 2\nu\frac{\partial^2}{\partial \xi_k \partial \xi_k}V_{i,j} - \Phi_{i,j}^{(v)} \tag{2.4}$$

Совершенно аналогичным путем с учетом (2.1) получаем следующее уравнение для двойной корреляции по скоростям частиц: (2.5)

$$\frac{\partial}{\partial t}W_{i,j} + \frac{\partial}{\partial \xi_k}(S_{i,kj}^{(w)} - S_{ik,j}^{(w)}) + L_{i,j}^{(w)} + \langle w_k\rangle M_{i,k,j}^{(w)} + N_{i,j}^{(w)} = \varkappa\Psi_{i,j}^{(w)}$$

Здесь

$$(W_{i,j})_{A,B} = \langle(w_i)_A(w_j)_B\rangle$$

$$(L_{i,j}^{(w)})_{A,B} = \left\langle(w_i)_A(w_j)_B\frac{\partial}{\partial t}(\sigma_A + \sigma_B)\right\rangle$$

$$(M_{i,k,j}^{(w)})_{A,B} = \left\langle(w_i)_A(w_j)_B\frac{\partial}{\partial \xi_k}(\sigma_B - \sigma_A)\right\rangle \tag{2.6}$$

$$(N_{i,j}^{(w)})_{A,B} = \left\langle(w_i)_A(w_j)_B\frac{\partial}{\partial \xi_k}[(\sigma w_k)_B - (\sigma w_k)_A]\right\rangle$$

$$(\Psi_{i,j}^{(w)})_{A,B} = \frac{1}{d_1}\left[\left\langle\left(\frac{f_i}{\langle\rho\rangle}\right)_A(w_j)_B\right\rangle + \left\langle\left(\frac{f_j}{\langle\rho\rangle}\right)_B(w_i)_A\right\rangle\right]$$

а корреляции $S^{(w)}$ выражаются через w_i так же, как $S^{(v)}$ через v_i.

С учетом (1.3) и (2.1) нетрудно получить также уравнение, определяющее динамику изменения смешанной корреляции $\langle (v_i)_A (w_j)_B \rangle$. Складывая его с уравнением, полученным из него перестановкой пар индексов i, j и A, B, имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} T_{i,j} + \frac{\partial}{\partial \xi_k} (S_{i,kj}^{(w,vv)} - S_{ik,j}^{(vv,w)}) + \frac{\partial}{\partial \xi_k} (S_{i,kj}^{(v,ww)} - S_{ik,j}^{(ww,v)}) +$$
$$+ L_{i,j}^{(v,w)} + \langle w_k \rangle M_{i,k,j}^{(v,w)} + N_{i,j}^{(v,w)} = \frac{1}{d_1} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_i} K_{p,j}^{(w)} - \frac{\partial}{\partial \xi_j} K_{i,p}^{(w)} \right) +$$
$$+ \nu \frac{\partial^2}{\partial \xi_k \partial \xi_k} T_{i,j} - \Phi_{i,j}^{(w)} + \varkappa \Psi_{i,j}^{(v)} \tag{2.7}$$

Здесь

$$(T_{i,j})_{A,B} = \langle (v_i)_A (w_j)_B \rangle + \langle (v_j)_B (w_i)_A \rangle$$
$$(S_{i,kj}^{(w,vv)})_{A,B} = \langle (w_i)_A (v_k)_B (v_j)_B \rangle, \qquad (S_{ik,j}^{(vv,w)})_{A,B} = \langle (v_i)_A (v_k)_A (w_j)_B \rangle$$
$$(L_{i,j}^{(v,w)})_{A,B} = \left\langle (v_i)_A (w_j)_B \frac{\partial \sigma_B}{\partial t} \right\rangle + \left\langle (v_j)_B (w_i)_A \frac{\partial \sigma_A}{\partial t} \right\rangle$$
$$(M_{i,k,j}^{(v,w)})_{A,B} = \left\langle (v_i)_A (w_j)_B \frac{\partial \sigma_B}{\partial \xi_k} \right\rangle - \left\langle (v_j)_B (w_i)_A \frac{\partial \sigma_A}{\partial \xi_k} \right\rangle \tag{2.8}$$
$$(N_{i,j}^{(v,w)})_{A,B} = \left\langle (v_i)_A (w_j)_B \frac{\partial}{\partial \xi_k} (\sigma w_k)_B \right\rangle - \left\langle (v_j)_B (w_i)_A \frac{\partial (\sigma w_k) A}{\partial \xi_k} \right\rangle$$

Корреляции $K_{p,j}^{(w)}$, $K_{i,p}^{(w)}$, $\Phi_{i,j}^{(w)}$ (или $\Psi_{i,j}^{(v)}$) выражаются через w_i (или v_i) аналогично тому, как $K_{p,j}^{(v)}$, $K_{i,p}^{(v)}$, $\Phi_{i,j}^{(v)}$ (или $\Psi_{i,j}^{(w)}$) выражаются через v_i (или w_i).

Для определенности выписанных выше уравнений необходимо найти представление корреляций, в которые входит сила f_i, через корреляции по скоростям жидкости и частиц и концентрации ρ. Для этого нужно использовать выражение f_i через $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ и ρ ($\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ представляют векторы полных скоростей жидкости и частиц). К сожалению, аналитическое выражение для силы, действующей со стороны жидкости на одну частицу, можно дать лишь в случае, если скорость жидкости мало меняется на расстояниях, больших по сравнению с размерами частицы, т. е. пространственные микромасштабы турбулентности должны быть намного больше размеров частиц.

Здесь предположим, что сила $\mathbf{F}$, действующая на одну частицу со стороны жидкости, определяется формулой Стокса. Тогда для силы f_i получим

$$f_i = \frac{\rho}{\theta} F_i = c d_1 \rho (v_i - w_i), \qquad c = \frac{9\nu}{2a^2} \tag{2.9}$$

где θ — объем, a — радиус частицы.

В общем случае для $\mathbf{F}$ предложено выражение [8]

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} d_1 \theta \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \nabla \right) (\mathbf{v} - \mathbf{w}) - \theta \nabla p -$$
$$-6\pi\mu a \left[\mathbf{w} - \mathbf{v} + a \left(\frac{d_1}{\pi\mu} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{t} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \nabla \right) (\mathbf{w} - \mathbf{v}) \frac{d\tau}{\sqrt{t - \tau}} \right] \tag{2.10}$$

Первый член в правой части есть сила избыточной инерции при ускоренном относительном движении частицы, второй — сила избыточного перепада давления; третий — сила линейного сопротивления с учетом нестационарного эффекта.

Первым и вторым членами можно пренебречь при $d_2 \gg d_1$. Интегральным членом можно пренебречь, если размеры частиц достаточно малы.

Допущение (2.9) о пропорциональности силы f_i относительной скорости $v_i - w_i$ эквивалентно следующим предположениям, являющимся основными в данной работе:

$$\rho \ll 1, \quad \varkappa = d_1 / d_2 \ll 1, \quad a \ll \lambda \tag{2.11}$$

где λ — внутренний масштаб турбулентности.

Из определения корреляций $\Phi_{i,j}$ и $\Psi_{i,j}$ имеем с учетом (2.9)

$$\begin{gathered}
(\Phi_{i,j}^{(v)})_{A,B} = c\langle\rho\rangle[2(V_{i,j})_{A,B} - (T_{i,j})_{A,B}] + cO_1(\langle\rho v w\rangle) \\
(\Phi_{i,j}^{(w)})_{A,B} = -c\langle\rho\rangle[2(W_{i,j})_{A,B} - (T_{i,j})_{A,B}] + cO_2(\langle\rho v w\rangle) \\
(\Psi_{i,j}^{(v)})_{A,B} = c[2(V_{i,j})_{A,B} - (T_{i,j})_{A,B}] \\
(\Psi_{i,j}^{(w)})_{A,B} = -c[2(W_{i,j})_{A,B} - (T_{i,j})_{A,B}]
\end{gathered} \tag{2.12}$$

Подставляя (2.12) в уравнения (2.4), (2.5) и (2.7), получаем систему

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial t}V_{i,j} + \frac{\partial}{\partial\xi_k}(S_{i,kj}^{(v)} - S_{ik,j}^{(v)}) = \frac{1}{d_1}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_i}K_{p,j}^{(v)} - \frac{\partial}{\partial\xi_j}K_{i,p}^{(v)}\right) + \\
+ 2\nu\frac{\partial^2}{\partial\xi_k\partial\xi_k}V_{i,j} - c\langle\rho\rangle(2V_{i,j} - T_{i,j}) \\
\frac{\partial}{\partial t}W_{i,j} + \frac{\partial}{\partial\xi_k}(S_{i,kj}^{(w)} - S_{ik,j}^{(w)}) + L_{i,j}^{(w)} + \langle w_k\rangle M_{i,k,j}^{(w)} + N_{i,j}^{(w)} = \\
= -c\varkappa(2W_{i,j} - T_{i,j}) \\
\frac{\partial}{\partial t}T_{i,j} + \frac{\partial}{\partial\xi_k}(S_{i,kj}^{(w,vv)} + S_{i,kj}^{(v,ww)} - S_{ik,j}^{(vv,w)} - S_{ik,j}^{(ww,v)}) + L_{i,j}^{(v,w)} + \\
+ \langle w_k\rangle M_{i,k,j}^{(v,w)} + N_{i,j}^{(v,w)} = \frac{1}{d_1}\left(\frac{1}{\partial\xi_i}K_{p,j}^{(w)} - \frac{\partial}{\partial\xi_j}K_{i,p}^{(w)}\right) + \\
+ \nu\frac{\partial^2}{\partial\xi_k\partial\xi_k}T_{i,j} + 2c(\langle\rho\rangle W_{i,j} + \varkappa V_{i,j}) - c(\langle\rho\rangle + \varkappa)T_{i,j}
\end{gathered} \tag{2.13}$$

Таким образом, единственное уравнение для корреляции $(V_{i,j})_{A,B}$ по скоростям однородной жидкости в случае неоднородной жидкости заменяется на три уравнения для трех двойных корреляций $(V_{i,j})_{A,B}$, $(W_{i,j})_{A,B}$ и $(T_{i,j})_{A,B}$.

3. Вырождение изотропной турбулентности. Как известно [1], для изотропной турбулентности в несжимаемой жидкости корреляции типа $\langle g v_i\rangle$ (где g — любая скалярная величина) тождественно равны нулю. В частности, $K_{i,p}^{(v)} \equiv K_{p,j}^{(v)} \equiv 0$. Для сжимаемой жидкости из условия инвариантности относительно пространственных вращений следует

$$K_{i,p}^{(w)} = K_{p,i}^{(w)} = K(r)\,\xi_i$$

где r — скалярное расстояние между точками A и B. Поэтому, как легко видеть,

$$\frac{\partial}{\partial\xi_i}K_{p,j}^{(w)} - \frac{\partial}{\partial\xi_j}K_{i,p}^{(w)} = 0$$

Легко показать также, что

$$M_{i,k,j}^{(w)} \equiv M_{i,k,j}^{(v,w)} \equiv 0$$

(это видно уже непосредственно из уравнений (2.13): члены с $M_{i,k,j}$, содержащие «неизотропные» множители $\langle w_k\rangle$, должны исчезать при описании изотропной турбулентности). Кроме того, для двойных и тройных корреляций в (2.13) из общеинвариантных соображений следуют известные соотношения, позволяющие представить эти корреляции через небольшое число скалярных функций от r и времени [1]. Все это позволяет значительно упростить (2.13).

Ниже подробно рассмотрен лишь случай, когда влияние вязких сил и сил взаимодействия частиц с жидкостью становится преобладающим по сравнению с инерционными силами («конечный период вырождения» — по терминологии Бэтчелора и Таунсенда [9]). Тогда по общему принципу можно пренебречь тройными корреляциями в (2.13). Свертывая (2.13), получим в этом случае следующую систему для следов корреляционных тензоров:

$$\frac{\partial}{\partial t} V_{i,i} = 2\nu \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} V_{i,i}\right) - c\langle\rho\rangle(2V_{i,i} - T_{i,i})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} W_{i,i} = -c\varkappa(2W_{i,i} - T_{i,i}) \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} T_{i,i} = \nu \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} T_{i,i}\right) - c(\langle\rho\rangle + \varkappa) T_{i,i} + 2c(\langle\rho\rangle W_{i,i} + \varkappa V_{i,i})$$

Рассмотрим сначала случай высокоинерционных частиц: $\varkappa \to 0$. Из второго уравнения (3.1) следует $W_0 = W_{i,i} = W(r)$. Физический смысл в данном случае имеют лишь затухающие решения системы (3.1), поэтому $W_0 = 0$. Таким образом, в последнем уравнении (3.1) остается лишь одна неизвестная $T_{i,i}$. Однако решать это уравнение нет необходимости. Действительно, W_0 при $r = 0$ должна равняться $3w_0^2$, где

$$w_0^2 = \langle w_1'^2\rangle \equiv \langle w_2'^2\rangle \equiv \langle w_3'^2\rangle$$

Поскольку везде $W_0 \equiv 0$, величина $w_0 \equiv 0$ и пульсации $w_i' \equiv 0$. Отсюда и из определения $T_0 = T_{i,i}$ следует, что T_0 тождественно равна нулю. (Физический смысл этого обстоятельства очевиден: параметру $\varkappa = 0$ соответствует бесконечная плотность частиц, так что пульсационные движения жидкости не влияют на скорость частиц, которая во все моменты времени равна своему среднему. В пределах одной пульсации ситуация напоминает движение жидкости в разреженном пористом теле.) Разумеется, к этому же выводу можно прийти и непосредственно из рассмотрения уравнений движения при $\varkappa \to 0$.

Для $V_0 = V_{i,i}$ получаем, следовательно, уравнение

$$\frac{\partial V_0}{\partial t} = 2\nu \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} V_0\right) - 2c\langle\rho\rangle V_0 \tag{3.2}$$

Как известно [7], в случае однородной турбулентности граничные условия, налагаемые на решения соответствующих уравнений (в частности, уравнения (3.2)), определяются существованием статистической однородности движения в пространстве и не нуждаются в дальнейшем рассмотрении. Начальные условия заключаются в том, что в некоторый определенный момент времени скорость есть случайная функция точки. Практически вид этой функции неизвестен, и задаются лишь средние величины, характеризующие поле турбулентности в начальный момент [7].

Здесь примем

$$\lim_{r\to 0} V_{i,i}(r, t) = 3v_0^2 \equiv 3\langle v_1'^2\rangle \equiv 3\langle v_2'^2\rangle \equiv 3\langle v_3'^2\rangle \tag{3.3}$$

причем предполагается, как обычно, что средний квадрат скорости одномерной пульсации v_0^2 тоже должен определиться из решения (3.2).

Кроме того, из уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости при некоторых дополнительных предположениях следует [1]

$$\int_0^\infty r^2 V_{i,i}(r, t)\, dr = 0 \tag{3.4}$$

Условия (3.3) и (3.4) представляют единственные ограничения, которые общая теория позволяет наложить на решения (3.2).

Легко видеть, что

$$V_0(r, t) = \exp(-2c\langle\rho\rangle t)\, Q_{i,i}(r, t) \tag{3.5}$$

где $Q_{i,i}(r, t)$ — двойная корреляция скорости в однородной жидкости, удовлетворяющая уравнению (3.2) без последнего члена в правой части. Выбирая в качестве $Q_{i,i}(r, t)$ известное решение М. Д. Миллионщикова [10], хорошо согласующееся с экспериментом [9], имеем

$$V_0(r, t) = -4C_2 t^{-5/2}\left(3 - \frac{r^2}{4\nu t}\right)\exp\left(-\frac{r^2}{8\nu t} - 2c\langle\rho\rangle t\right) \tag{3.6}$$

Интенсивность пульсаций затухает, таким образом, по закону

$$v_0^2 \sim t^{-5/2}\exp(-2c\langle\rho\rangle t) \tag{3.7}$$

Отсюда видно, что затухание турбулентности в неоднородной жидкости весьма сильно отличается от затухания турбулентности в однородной жидкости. Характерный для однородной жидкости закон «$-5/2$» заменяется в рассматриваемом случае экспоненциальным затуханием, обусловленным диссипацией энергии пульсаций на взвешенных частицах. Для $V_{i,i}$ можно записать [1]

$$V_{i,i} = v_0^2[f(r, t) + 2g(r, t)] = \frac{v_0^2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}[r^3 f(r, t)]$$

Используя $V_{i,i}(r, t)$ из (3.6), получаем для коэффициентов продольной $f(r, t)$ и поперечной $g(r, t)$ корреляций

$$f(r, t) = \exp\left(-\frac{r^2}{8\nu t}\right), \qquad g(r, t) = \left(1 - \frac{r^2}{8\nu t}\right)\exp\left(-\frac{r^2}{8\nu t}\right) \tag{3.8}$$

Эти выражения полностью совпадают с выражениями для f и g в случае турбулентности в однородной жидкости. Более того, пространственные масштабы турбулентности, определяемые из рассмотрения корреляций, полностью определяются этими коэффициентами. Поэтому характерные размеры вихрей в рассматриваемой неоднородной жидкости при $\varkappa \to 0$ идентичны таковым в однородной жидкости.

Трехмерная спектральная функция

$$E(k, t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty kr \sin kr\, V_{i,i}(r, t)\, dr = \varepsilon^\circ(k, t)\exp(-2c\langle\rho\rangle t) \tag{3.9}$$

где $\varepsilon^\circ(k, t)$ — соответствующая спектральная функция для турбулентного движения однородной жидкости.

Таким образом, турбулентное движение взвеси высокоинерционных частиц в несжимаемой жидкости оказывается на конечном этапе вырождения турбулентности подобным по структуре турбулентному движению однородной жидкости. Отличие заключается лишь в более быстром затухании пульсаций в первом случае по сравнению со вторым (гашение турбулентности частицами), причем, как следует из (3.8) и (3.9), влияние частиц становится преобладающим при больших t.

Этот вывод не является неожиданным. Обычно принято считать [1], что поскольку добавочная диссипация пульсационной энергии обусловлена отставанием частицы от турбулентного движения жидкости, а это отставание с ростом волнового числа турбулентности увеличивается, то наличие частиц должно оказывать влияние главным образом на энергетический спектр турбулентности в области больших волновых чисел. Однако в рассмотренном частном случае частицы фактически неподвижны, т. е. их отставание от жидкости не зависит от волнового числа, вследствие чего искажения структуры энергетического спектра турбулентности не происходит.

При $\varkappa \to 0$ нетрудно получить также более общее уравнение для V_0 — с учетом тройных корреляций скорости. Полагая по-прежнему $w_0^2 \equiv 0$ и $W_0 \equiv T_0 \equiv 0$, запишем соответствующее этому случаю уравнение типа Кармана — Хауорта [11]. Для этого используем известное выражение теории изотропной турбулентности в несжимаемой жидкости [1]

$$S_{i,j} = \frac{\partial}{\partial \xi_k}\left(S_{ik,j}^{(v)} - S_{j,kj}^{(v)}\right) = v_0^3 \left[\left(-\frac{1}{2r}\frac{\partial^2 k}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial k}{\partial r} + \frac{2}{r^3}k\right)\xi_i\xi_j + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{r}{2}\frac{\partial^2 k}{\partial r^2} + 3\frac{\partial k}{\partial r} + \frac{2}{r}k\right)\delta_{ij}\right], \quad k = k(r, t)$$

Подставляя это и выражение $V_{i,j}$ через $f(r, t)$ в первое уравнение (2.13), получаем после преобразований и интегрирования по r

$$\frac{\partial}{\partial t}(v_0^2 f) - v_0^3 \frac{2}{r^4}\frac{\partial}{\partial r}(r^4 k) = 2\nu v_0^2 \frac{1}{r^4}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^4\frac{\partial f}{\partial r}\right) - 2c\langle\rho\rangle v_0^2 \frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}(r^3 f) \tag{3.10}$$

При $\langle\rho\rangle = 0$ это уравнение сводится к обычному уравнению Кармана—Хауорта.

Стабилизирующее действие взвешенных частиц и уменьшение пульсационной энергии единицы объема смеси по сравнению с пульсационной энергией однородной жидкости было установлено в работе [2] на основе баланса пульсационной энергии. Как и следовало ожидать, обратный эффект, т. е. возбуждение турбулентности взвешенными частицами, из вышеприведенного рассмотрения не обнаруживается. Это связано с принятым предположением о малости гравитационных сил и о том, что $\langle v_i\rangle \equiv \langle w_i\rangle$.

Авторы благодарят Г. И. Баренблатта за полезные советы.

Поступила 20 V 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Хинце И. О. Турбулентность. Изд. иностр. лит., 1963.
2. Баренблатт Г. И. О движении взвешенных частиц в турбулентном потоке. ПММ, 1953, т. 17, № 3, стр. 261.
3. Hinze J. O. Momentum and Mechanical Energy Balance Equation for a Flowing Homogeneous Suspension with Slip between the Two Phases. Appl. Sci. Res. A, 1962, vol. 33, No. 1, p. 33.
4. Murray C. D. On the Mathematics of Fluidization. Part 1. Fundamental Equations and Wave Propagation. J. Fluid Mech., 1965, vol. 21, No. 3, p. 465.
5. Дорожкин В. С., Желтов Ю. В., Желтов Ю. П. О движении смеси жидкости с песком в скважине и трещине при гидравлическом разрыве нефтеносного пласта. Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 11, стр. 37.
6. Гупало Ю. П. Об устойчивости ламинарного движения жидкости с тяжелой примесью. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1960, № 6, стр. 38.
7. Бэтчелор Д. К. Теория однородной турбулентности. Изд. иностр. лит., 1955.
8. Corssin S., Lumley J. On the Equation of Motion for a Particle in Turbulent Fluid. Appl. Sci. Res. A, 1956, vol. 6, No. 2—3, p. 114.
9. Batchelor G. K., Townsend A. A. Decay of Turbulence in the Final Period. Proc. Roy. Soc. A, 1948, vol. 194, p. 527.
10. Миллионщиков М. Д. Затухание пульсаций скорости в аэродинамических трубах. Докл. АН СССР, 1939, т. 22, стр. 241.
11. Karman T., Howart L. On the Statistical Theory of Isotropic Turbulence. Proc. Roy. Soc. A, 1938, vol. 164, p. 192.