

УДК 532.516.5+519.63

## МЕТОД РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ МНОГОФРОНТОВОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА \*

А. С. Овчарова

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,  
630090 Новосибирск

В данной работе предлагается метод решения термоконвективной задачи в многослойной среде с криволинейными и в общем случае подвижными границами раздела. Такая ситуация может возникнуть при необходимости расчета поля температур в многослойной среде (например, нефть, грунт, вода) с разной теплопроводностью слоев или в задачах, связанных с кристаллизацией (плавлением). Идея метода основана на декомпозиции сложной системы на унитарные элементы (модули) при некотором наборе правил их сцепления друг с другом. Каждый из модулей представляет собой однотипную локальную модель с организацией расчета в ней независимо от других модулей системы, в то время как набор правил, определяющий, например, общие границы между модулями и функциональные зависимости на них, соединяет эти модули в исходную систему. Задача решается при следующих предположениях: 1) теплофизические свойства веществ в каждой среде постоянны; 2) скачком плотности при фазовом переходе пренебрегаем.

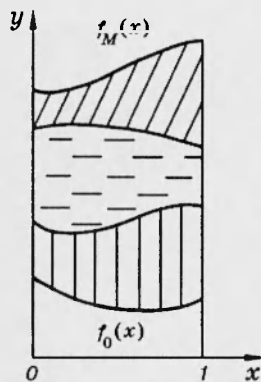


Рис. 1

1. Математическая модель. Пусть область  $G$  с твердыми стенками  $0 \leq x \leq 1$ ,  $f_0(x) \leq y \leq f_M(x)$  занимает  $M$  веществ, разделенных криволинейными и в общем случае подвижными границами  $f_m(t, x)$  ( $m = 1, \dots, M - 1$ ) (рис. 1). Будем считать, что в каждой из подобластей, заполненных жидкой фазой вещества, имеет место конвективное движение жидкости. В приближении Обербека — Буссинеска [1] оно описывается системой уравнений, которая в безразмерной форме может быть представлена в виде [2]

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \omega \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \omega \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \Delta \omega + Gr \frac{\partial T}{\partial x}; \quad (1.1)$$

$$\Delta \psi + \omega = 0; \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( T \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{1}{Pr} \Delta T. \quad (1.3)$$

В каждой из подобластей, занятых твердой фазой, выполняется уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{Pr} \Delta T. \quad (1.4)$$

Здесь  $Gr = g \beta \theta x_0^3 / \nu^2$  — число Грасгофа ( $x_0$  — размер по  $x$ );

\* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-012-497).

$Pr = \nu/\chi$  — число Прандтля;  $g$  — ускорение силы тяжести (вектор силы тяжести параллелен оси  $y$  и направлен вниз); функция тока  $\psi$  введена соотношениями

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (1.5)$$

Искомые функции — вихрь скорости  $\omega(t, x, y)$ , функция тока  $\psi(t, x, y)$ , температура  $T(t, x, y)$ , а также границы раздела фаз  $f_m(t, x)$ , если имеет место процесс кристаллизации или плавления. Будем считать, что начальные условия для функций  $\omega, \psi, T, f_m$  определены.

Граничные условия для температуры на внешних сторонах области  $G$  ( $x = 0, x = 1, y = f_0(x), y = f_M(x)$ ) могут быть заданы в виде

$$\alpha T + \beta \frac{\partial T}{\partial n} = \gamma(t) \quad (1.6)$$

( $\alpha$  и  $\beta$  принимают значения 0 и 1).

На всех внутренних границах, т. е. на кривых  $f_m(t, x)$  ( $m = 1, \dots, M-1$ ), выполнены условия сопряжения

$$T^m(x, f_m(t, x)) = T^{m+1}(x, f_m(t, x)); \quad (1.7)$$

$$V_m^n = k_m \frac{\partial T^m}{\partial n} - k_{m+1} \frac{\partial T^{m+1}}{\partial n}, \quad (1.8)$$

где  $\mathbf{n}$  — вектор нормали к кривой  $f_m(t, x)$  в точке  $x$ ;  $k_m, T^m$  и  $k_{m+1}, T^{m+1}$  — безразмерные коэффициенты теплопроводности и температура для веществ, занимающих подобласти  $m$  и  $m+1$  соответственно;  $V_m^n$  — скорость движения границы  $f_m(t, x)$  в направлении нормали к ней. Здесь и далее индексом  $m$  (вверху или внизу) обозначена принадлежность функции или оператора к подобласти  $m$ , ограниченной сверху кривой  $f_{m+1}$ , снизу кривой  $f_m$  ( $m = 0, \dots, M-1$ ).

Граничные условия для функции тока и вихря скорости заданы в виде условий вязкого прилипания, т. е.

$$\mathbf{v}|_{\Gamma} = 0 \quad (1.9)$$

( $\Gamma$  — граница подобласти  $m$ ).

**2. Метод решения.** Прежде всего отметим, что уравнения (1.1)–(1.4) в рамках модели Обербека — Буссинеска одного типа. Это утверждение относится также и к уравнению (1.2), которое далее будет решаться методом итераций и вводом итерационного параметра может быть подведено под общий тип.

Отобразим каждую из подобластей  $m$  вида  $0 \leq x \leq 1, f_m(t, x) \leq y \leq f_{m+1}(t, x)$  ( $m = 0, \dots, M-1$ ) в квадрат со сторонами  $0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1$  с помощью преобразования

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{y - f_m(t, x)}{f_{m+1}(t, x) - f_m(t, x)}. \quad (2.1)$$

Тогда каждое из уравнений (1.1)–(1.4) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{1}{B_m I_m} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \bar{B}_{11}^m \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \bar{B}_{12}^m \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} - A_1^m \Phi \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \bar{B}_{12}^m \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \bar{B}_{22}^m \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + A_1^m \Phi \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) \right] + \bar{R}_1^m \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + R_2^m. \quad (2.2) \end{aligned}$$

Здесь

$$I_m = f_{m+1}(t, \xi) - f_m(t, \xi), \quad R_1^m = \frac{1}{I_m} \left( \frac{\partial I_m}{\partial t} \eta + \frac{\partial f_m}{\partial i} \right),$$

$$B_{11}^m = I_m, \quad B_{12}^m = - \left( \frac{\partial I_m}{\partial \xi} \eta + \frac{\partial f_m}{\partial \xi} \right), \quad B_{22}^m = \frac{1 + (B_{12}^m)^2}{I_m}. \quad (2.3)$$

Отсюда следует

$$B_{11}^m B_{22}^m - (B_{12}^m)^2 = 1. \quad (2.4)$$

Если рассматривается подобласть, занятая жидкой фазой, то для  $\Phi = \omega$

$$B_m = 1, \quad A_1^m = 1, \quad R_2^m = \frac{Gr_m}{I_m} \left( B_{11}^m \frac{\partial T}{\partial \xi} + B_{12}^m \frac{\partial T}{\partial \eta} \right),$$

для  $\Phi = T$

$$R_m = A_1^m = Pr_m,$$

для  $\Phi = \psi$

$$B_m = \frac{1}{\lambda}, \quad A_1^m = 0, \quad R_1^m = 0, \quad R_2 = \omega \lambda$$

( $Gr_m, Pr_m$  — числа Грасгофа и Прандтля,  $\lambda$  — итерационный параметр).

Если рассматривается подобласть, занятая твердой фазой, то для  $\Phi = T$

$$B_m = Pr_m, \quad A_1^m = 0, \quad R_2^m = 0.$$

Введем следующие обозначения:

$$U(\Phi) = B_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + B_{12} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} - A_1 \Phi \frac{\partial \psi}{\partial \eta},$$

$$V(\Phi) = B_{12} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + B_{22} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + A_1 \Phi \frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \quad (2.5)$$

а с использованием соотношения (2.4) имеем [3]

$$U(\Phi) = \frac{1}{B_{22}} [\Phi_\xi + B_{12} V(\Phi) - B_1 A_1 \Phi],$$

$$V(\Phi) = \frac{1}{B_{11}} [\Phi_\eta + B_{12} U(\Phi) + B_2 A_1 \Phi], \quad (2.6)$$

где

$$R_1 = B_{12} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + B_{22} \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad R_2 = B_{11} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + B_{12} \frac{\partial \psi}{\partial \eta}.$$

Тогда для каждого  $m$  уравнение (2.2) примет вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{1}{R_1} [U_\xi(\Phi) + V_\eta(\Phi)] + R_1 \Phi_\eta + R_2. \quad (2.7)$$

Уравнение (2.7) получено в форме законов сохранения, что особенно важно при расчете температуры.

Выбор математической модели и метода решения перенес все трудности решения задачи в целом на особенность решения уравнения параболического типа в «хорошей» области, но имеющего переменные коэффициенты и смешанные производные. Причем коэффициенты дифференциального

уравнения зависят в конечном счете от самого решения. При решении такого типа задач хорошие результаты дает метод расщепления по физическим процессам [4], который приводит в дальнейшем к разделению задачи на эволюционную и краевую. В эволюционной задаче на каждом шаге по времени с помощью подходящей разностной схемы отыскивается решение уравнения (2.7) с коэффициентами  $B_{11}^s(t_k)$ ,  $B_{12}^s(t_k)$ ,  $B_{22}^s(t_k)$ , взятыми с предыдущего итерационного шага  $s$ . В краевой задаче определяется матрица коэффициентов уравнения (2.7), т. е.  $B_{11}^s(t_k)$ ,  $B_{12}^s(t_k)$ ,  $B_{22}^s(t_k)$ , по решению этого уравнения. В качестве начальной итерации берется решение, полученное на предыдущем шаге по времени.

Решение уравнения (2.7) на каждом временном шаге будем искать по схеме стабилизирующей поправки [5], взятой в форме

$$\begin{aligned} \frac{\Phi^{k+1/2} - \Phi^k}{\tau} &= \frac{1}{BI} \left[ U_{\xi}^k(\Phi) + V_{\eta}^{k+1/2}(\Phi) \right] + R_1 \Phi_{\eta}^{k+1/2} + R_2^{k+1/2}, \\ \frac{\Phi^{k+1} - \Phi^{k+1/2}}{\tau} &= \frac{1}{BI} \left[ U_{\xi}^{k+1}(\Phi) - U_{\xi}^k(\Phi) \right]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Здесь

$$\begin{aligned} V(\Phi)^{k+1/2} &= \frac{1}{B_{11}} \left[ \Phi_{\eta}^{k+1/2} + B_{12} U^k(\Phi) + B_2 A_1 \Phi^{k+1/2} \right], \\ U^{k+1}(\Phi) &= \frac{1}{B_{22}} \left[ \Phi_{\xi}^{k+1} + B_{12} V^{k+1/2}(\Phi) - B_1 A_1 \Phi^{k+1} \right]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Схема стабилизирующей поправки относится к классу экономичных разностных схем с дробными шагами, где первый дробный шаг дает полную аппроксимацию уравнения, следующий является поправочным и служит цели улучшения устойчивости.

Для реализации схемы (2.8), (2.9) в каждом из квадратов, соответствующих подобластям  $m$ , строится прямоугольная расчетная сетка стандартным образом:

$$\begin{aligned} \xi_i &= (i-1)\Delta\xi, \quad \Delta\xi = 1/L, \quad i = 1, \dots, LL, \quad LL = L+1, \\ \eta_j &= (j-1)\Delta\eta, \quad \Delta\eta = 1/J, \quad j = 1, \dots, JJ, \quad JJ = J+1. \end{aligned}$$

Дифференциальные выражения типа  $(a_{11}\Phi_{\xi})_{\xi}$ ,  $(a_{22}\Phi_{\eta})_{\eta}$ ,  $\Phi_{\xi}$ ,  $\Phi_{\eta}$  аппроксимируем со вторым порядком точности конечно-разностными аналогами  $\Lambda_{11}$ ,  $\Lambda_{22}$ ,  $\Lambda_1$ ,  $\Lambda_2$  соответственно, которые имеют традиционное представление [5, 6]. Для аппроксимации смешанной производной, например  $(a_{12}\Phi_{\xi})_{\eta}$ , согласно [5, 7], использован оператор

$$\Lambda_{12}\Phi = \frac{(a_{12})_{i,j+1}(\Phi_{i+1,j+1} - \Phi_{i+1,j-1}) - (a_{12})_{i,j-1}(\Phi_{i-1,j+1} - \Phi_{i-1,j-1})}{4\Delta\xi\Delta\eta}.$$

Оператор  $\Lambda_{21}\Phi$  определяется аналогично. Тогда схема (2.8), (2.9) будет аппроксимировать (2.7) с учетом граничных условий типа (1.6) с точностью  $O(\tau + h^2)$ . Она абсолютно устойчива и сходится к решению (2.7) при  $\tau \rightarrow 0$  [5]. Стоит отметить тот факт, что представления для  $U(\Phi)$  и  $V(\Phi)$ , взятые в форме (2.6), в отличие от (2.5), усиливают устойчивость схемы при  $B_{12} > 1$  за счет коэффициента  $1/B_{22}$  [3].

После замены в (2.8) производных соответствующими конечными разностями и подстановки вместо  $V_{\eta}^{k+1/2}(\Phi)$  и  $U_{\xi}^{k+1}(\Phi)$  их разностных аналогов из (2.9) на каждом полушаге по времени  $(k+1/2, k+1)$  для всех

внутренних точек ( $i = 2, \dots, L, j = 2, \dots, J$ ) получим систему линейных разностных уравнений относительно функции  $\Phi(\xi_i, \eta_j)$ . Система имеет трехдиагональную структуру с преобладанием диагональных элементов матрицы и может быть эффективно решена методом прогонки с учетом специфики граничных условий.

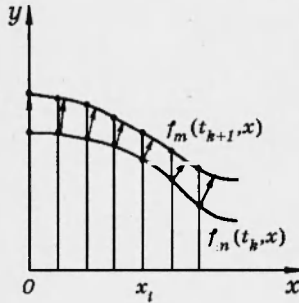


Рис. 2

Построение итерационного процесса осуществляется следующим образом. Пусть известно решение уравнения (2.7) для температуры и положение границ раздела  $f_m(t_k, x)$  в момент времени  $t = t_k$ . Определив по условию Стефана скорость движения каждой из границ  $V_m^n(t_{k+1}, x)$  в направлении нормали к ней, найдем новое положение границ раздела  $f_m(t_{k+1}, x)$  в момент времени  $t_{k+1} = t_k + \tau$  (рис. 2) для каждого  $m$ . Затем по формулам (2.3) определяется матрица коэффициентов  $B_{11}, B_{12}, B_{22}$  уравнения (2.7).

Наконец, решив это уравнение с новыми коэффициентами, получим распределение температуры в каждой из подобластей  $m$  в момент времени  $t_{k+1}$  на итерации  $s = 0$ . На каждом шаге по времени итерации проводятся до тех пор, пока не окажется выполненным условие

$$\max_{m,i} \frac{|(V_m^n(x_i))^{s+1}| - |(V_m^n(x_i))^s|}{|(V_m^n(x_i))^{s+1}|} < \varepsilon,$$

где  $s$  — номер итерации;  $\varepsilon$  — заданная точность.

Как следует из описания, итерационный процесс, организованный таким образом, не нарушает законов сохранения ни в одной из подобластей  $m$  и на каждой итерации в любой из подобластей  $m$  сохраняется эллиптический вид аппроксимирующего оператора. Эти свойства и обеспечивают сходимость итерационного процесса [4, 8].

**3. Расчет температуры.** Преобразуем граничные условия (1.6)–(1.8) к новым переменным. Тогда условие (1.6), относящееся к внешним твердым границам области  $G$ , примет следующий вид: для каждой подобласти  $m$  при  $\xi = 0$  и  $\xi = 1$

$$\alpha_m T^m \Big|_{\xi=0}^{\xi=1} + \frac{\beta_m}{I_m} U(T^m) \Big|_{\xi=0}^{\xi=1} = \gamma_m(t) \quad (3.1)$$

( $\alpha, \beta, \gamma$  принимают свои значения для каждой из сторон  $\xi = 0, \xi = 1$ ); для подобласти  $m = 1$  и  $\eta = 0$

$$\alpha_1 T^1 \Big|_{\eta=0} + \frac{\beta_1}{\sqrt{1 + (B_{12}^1)^2}} \Big|_{\eta=0} V(T^1) \Big|_{\eta=0} = \gamma_1(t); \quad (3.2)$$

для подобласти  $m = M$  и  $\eta = 1$

$$\alpha_M T^M \Big|_{\eta=1} + \frac{\beta_M}{\sqrt{1 + (B_{12}^M)^2}} \Big|_{\eta=1} V(T^M) \Big|_{\eta=1} = \gamma_M(t). \quad (3.3)$$

На внутренних границах условия сопряжения (1.7) и (1.8) примут соответственно вид

$$T^m(\xi, 1) = T^{m+1}(\xi, 0), \quad m = 1, \dots, M - 1; \quad (3.4)$$

$$V_m^n = \frac{1}{\sqrt{1 + (B_{12}^m)^2}} [k_m V(T^m)|_{\eta=1} - k_{m+1} V(T^{m+1})|_{\eta=0}]. \quad (3.5)$$

При расчете поля температур каждой из подобластей  $m$  области  $G$  возможны три случая.

**А.** Все границы  $f_m$  неподвижны и заранее известны, неизвестна температура на границе раздела фаз. Для определения температурного поля в области  $G$  предлагается следующая схема решения. На первом этапе решается первое уравнение системы (2.8) в направлении  $\eta$ . Тогда для всех внутренних точек ( $i = 2, \dots, L$ ,  $j = 2, \dots, J$ ) каждой из подобластей  $m$  получим систему уравнений

$$-a_j^m T_{j-1}^m + b_j^m T_j^m - c_j^m T_{j+1}^m = d_j^m. \quad (3.6)$$

Здесь и далее индексы по  $i$  для простоты записи опущены. Решение системы (3.6) будем искать с помощью метода параметрической прогонки [9]

$$T_j^m = P^m(j)T_{*}^m + Q^m(j)T_{**}^m + R^m(j), \quad m = 1, \dots, M, \quad (3.7)$$

где  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  — одномерные массивы;  $T_{*}^m$  — температура на нижней границе подобласти  $m$ ;  $T_{**}^m$  — температура на верхней ее границе. Для определения неизвестных  $T_{*}^m$  и  $T_{**}^m$  привлечем условия сопряжения (3.5), полагая  $V_m^n = 0$ :

$$k^m \left[ B_{12}^m \frac{\partial T^m}{\partial \xi} + B_{22}^m \frac{\partial T^m}{\partial \eta} \right] \Big|_{\eta=1} = k^{m+1} \left[ B_{12}^{m+1} \frac{\partial T^{m+1}}{\partial \xi} + B_{22}^{m+1} \frac{\partial T^{m+1}}{\partial \eta} \right] \Big|_{\eta=0}. \quad (3.8)$$

Подставляя в разностный аналог этого уравнения вместо значений температуры в приграничных точках их выражения через (3.7) и учитывая, что  $T_{**}^m = T_{*}^{m+1}$ , получим для определения  $T_{*}^m$  систему  $m$  уравнений с трехдиагональной структурой матрицы [10]. При большом  $M$  она может быть решена методом прогонки с учетом граничных условий (3.2), (3.3). Затем по формулам (3.7) восстанавливаем все остальные значения температуры для каждого  $m$ .

На втором этапе решается второе уравнение (2.8) для каждого  $m$  в направлении  $\xi$ . Получаемые при этом системы разностных уравнений решаются методом обычной прогонки с учетом граничных условий (3.1).

**Б.** Все внутренние границы  $f_m(t, x)$  подвижны. При этом температура на границе раздела фаз — известная величина (температура кристаллизации (плавления)). Основная сложность заключается в том, что при расчете температуры коэффициенты разностных уравнений (см. (3.6)) зависят от положения границ  $f_m(t, x)$ , которые, в свою очередь, зависят от температуры. Поэтому систему уравнений (2.8) для определения температуры решаем совместно с условием (3.5) с помощью итерационного процесса, описанного в п. 2 для всех  $m$ . За начальное приближение  $V_m^n$  берется значение с нижнего временного слоя. Получаемые системы разностных уравнений решаются методом прогонки.

**В.** Подвижна только часть внутренних границ  $f_m$ . В этом случае систему уравнений (2.8) для определения температуры решаем совместно с (3.4), (3.5) методом итераций по  $V_m^n$ . Получаемые системы разностных уравнений решаются методом параметрической прогонки с привлечением того условия, что температура на подвижных границах известна.

**4. Расчет вихря скорости и функции тока.** При решении уравнений Навье — Стокса в переменных  $(\psi, \omega)$  граничные условия для  $\omega$  в явном виде, как правило, не заданы. Оба граничных условия заданы для  $\psi$ .

Далее одно из них используется для решения уравнения, определяющего функцию тока, второе — для получения соотношений, связывающих

функцию тока и вихрь скорости на границе, какими являются, например, формулы Тома, Вудса и др.

Пусть подобласть  $m$  ограничена снизу кривой  $f_m(t, x)$  (что соответствует  $\eta = 0$ ), сверху — кривой  $f_{m+1}(t, x)$  ( $\eta = 1$ ). Нет необходимости проводить рассуждения для обеих границ, достаточно провести для одной, допустим  $f_m(t, x)$ . Из соотношений (2.5), записанных для функции тока, и (1.9) следует, что при  $\eta = 0$

$$U(\psi)|_{\eta=0} = 0, \quad V(\psi)|_{\eta=0} = 0. \quad (4.1)$$

Для вывода соотношения, связывающего на границе вихрь скорости и функцию тока, обратимся к уравнению (1.2), считая, что оно выполнено всюду, вплоть до границы. В новых переменных  $(\xi, \eta)$  (1.2) примет вид

$$\omega = -\frac{1}{I_{n+1}} \left[ \frac{\partial U(\psi)}{\partial \xi} + \frac{\partial V(\psi)}{\partial \eta} \right] \quad (4.2)$$

с условиями (4.1) при  $\eta = 0$ .

Если разложить  $V_{i,2}(\psi)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $(i, 1)$ , лежащей на линии  $\eta = 0$  в направлении  $\eta$ , то получим

$$V_{i,2}(\psi) = V_{i,1}(\psi) + \left. \frac{\partial V(\psi)}{\partial \eta} \right|_{i,1} \Delta\eta + O(\Delta\eta^2). \quad (4.3)$$

Тогда (4.2) вместе с (4.1) и (4.3) дает условие для  $\omega$  — аналог условия Тома на линии  $\eta = 0$  (соответствующей подвижной или неподвижной границе  $f_m$ ):

$$\omega_{i,1} = -\frac{1}{I_m} \left[ \frac{V_{i,2}(\psi)}{\Delta\eta} \right]. \quad (4.4)$$

Действительно, если подобласть  $m$  является прямоугольником, то

$$\omega_{i,1} = -\frac{1}{\Delta\eta} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right)_{i,2} = -\frac{\psi_{i,3}}{2(\Delta\eta)^2}.$$

С другой стороны, используя трехточечную аппроксимацию второго порядка точности для производной  $\partial\psi/\partial\eta = 0$  при  $\eta = 0$  и  $\psi = 0$ , получим [11]  $\psi_{i,3} = 4\psi_{i,2}$ . Отсюда следует классическое условие Тома

$$\omega_{i,1} = -\frac{2}{(\Delta\eta)^2} \psi_{i,2}.$$

Для расчета вихря скорости и функции тока предлагается следующая схема. На первом этапе решается уравнение (2.7) для вихря скорости по формулам (2.8). Граничное условие для него берется с нижнего временного слоя. На втором этапе решается уравнение для функции тока по тем же формулам с граничными условиями (4.1) методом итераций. Для связи вихря скорости и функции тока используется формула (4.4). Итерационный процесс на каждом шаге по времени считается завершенным при достижении условия

$$\max_{i,j} \frac{|\omega_{i,j}^{s+1} - \omega_{i,j}^s|}{|\omega_{i,j}^{s+1}|} < \varepsilon.$$

На этом заканчивается расчет одного шага по времени вихря скорости и функции тока. Далее процесс повторяется.

**З а м е ч а н и е.** Задача Стефана с конвекцией часто исследуется с помощью метода сквозного счета уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами, предложенного в [12]. Как показано в [2], основная

трудность при этом связана с аппроксимацией рассчитываемых функций вблизи фронта кристаллизации. При использовании сглаженной теплоемкости в области раздела фаз возникают пульсации температуры, которые автоматически вызывают пульсации функции тока. Чтобы получить гладкое решение, для температуры вводились весовые множители, а для функции тока — специальные аппроксимации, перестраивающиеся по мере продвижения фронта кристаллизации.

Численные расчеты, проведенные по методу, предлагаемому в данной работе, с выделением разрыва и точным удовлетворением условий на нем показали, что предлагаемый метод обеспечивает в каждой из подобластей  $m$  достаточную гладкость решения. Что касается программной реализации метода для расчетов с помощью ПЭВМ, то она довольно проста, так как все искомые функции ( $T, \omega, \psi$ ) рассчитываются по одной и той же вычислительной процедуре с учетом граничных условий. Основное преимущество предлагаемого метода состоит в том, что с его помощью можно эффективно исследовать термодиффузионную задачу Стефана, т. е. кристаллизацию (или плавление) бинарной смеси, когда температура кристаллизации расплава — не постоянная известная величина, а некоторая функция от концентрации компонента примеси в расплаве. Исследование термодиффузионной задачи Стефана с помощью метода сглаживания теплоемкости весьма проблематично.

*Примеры расчета.* В рассмотренных ниже примерах расчеты в каждой из подобластей проводились на сетках размером  $21 \times 21$  для чисел Грасгофа  $Gr = 200000$  и Прандтля  $Pr = 1$ . При расчете примеров с фазовыми переходами в качестве теплофизических характеристик для жидкой и твердой фаз использовались теплофизические характеристики воды и льда.

1. Для проверки точности и эффективности численного алгоритма необходимо использовать точные решения модельных уравнений или хорошо изученные приближенные решения. Типичным и хорошо изученным примером для тестирования численного алгоритма при решении задач, связанных с тепловой конвекцией, является расчет конвективного переноса тепла при подогреве сбоку [2].

В квадратной замкнутой области с неподвижными границами решаются уравнения (1.1)–(1.3). На границе области скорость, функция тока и производная по нормали от функции тока равны нулю. Температура на боковых стенках неизменна:

$$T(t, 0, y) = 0, \quad T(t, 1, y) = 1.$$

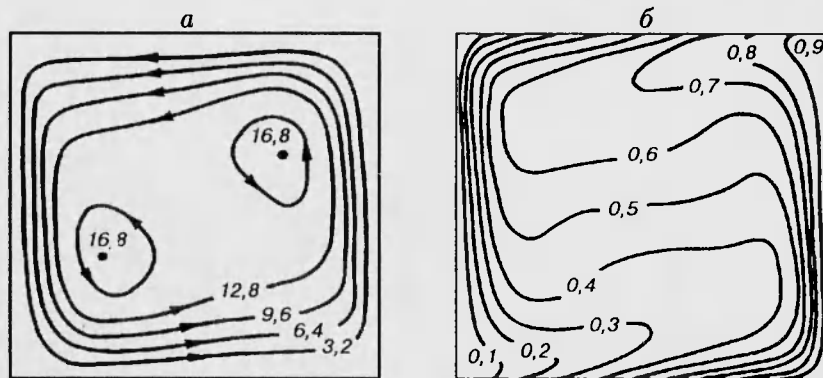


Рис. 3



На горизонтальных участках задано линейное распределение температуры

$$T(t, x, y) = x.$$

Тест заключается в получении стационарного решения до удовлетворения неравенства

$$(E^{k+1} - E^k)/E^k + (\text{Nu}^{k+1} - \text{Nu}^k)/\text{Nu}^k < \varepsilon.$$

Здесь  $E$  — кинетическая энергия;  $\text{Nu}$  — полный тепловой поток (число Нуссельта);  $\varepsilon$  — заданная погрешность;  $k$  — число шагов по времени.

Результаты расчета по предлагаемому методу приведены на рис. 3, где  $a$  — изолинии функции тока,  $b$  — изотермы. Сравнение результатов расчета с данными, приведенными в [2], показало высокую точность расчета по предложенному методу. Примечательно, что использование формулы (4.4) для связи функции тока и вихря скорости на границе дает более точный результат для функции тока (имеется в виду  $\text{max } \psi$ ), чем использование классического условия Тома. Качественная картина течения полностью совпадает с приведенной в [2].

2. В начальный момент времени область  $G$  представляет собой прямоугольник со сторонами  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$ ,  $y = 2$ , заполненный веществом в состоянии жидкой (подобласть  $I$ ) и твердой (подобласть  $II$ ) фаз с криволинейной границей раздела между ними  $f(0, x) = 1 - 0,1 \sin \pi x$  (рис. 4) и следующим распределением температуры:

$$y = 0: T = 1; \quad f(0, x): T = 0; \quad y = 2: T = -0,01.$$

Во всех внутренних точках подобластей  $I$  и  $II$  температура задается по линейному закону. Начальное состояние жидкости — состояние покоя. Граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} x = 0: \quad \frac{\partial T}{\partial n} &= 0; & x = 1: \quad \frac{\partial T}{\partial n} &= 0; \\ y = 0: \quad T &= 1; & y = 2: \quad T &= -0,01. \end{aligned}$$

На рис. 4 представлены начальное положение границы раздела (пунктирная линия), новое положение границы раздела (сплошная), изолинии функции тока ( $a$ ) и изотермы ( $b$ ) для момента времени  $t = 1,19$ . Возникшее в жидкой фазе в результате искривленности границы конвективное движение образует два вихря. Линии тока направлены по центру снизу вверх. Вихревое движение стремится выпрямить границу раздела.

3. Область  $G$  ( $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 3$ ) заполнена веществом в состоянии жидкой (в середине) и твердой (сверху и снизу) фаз с границами раздела

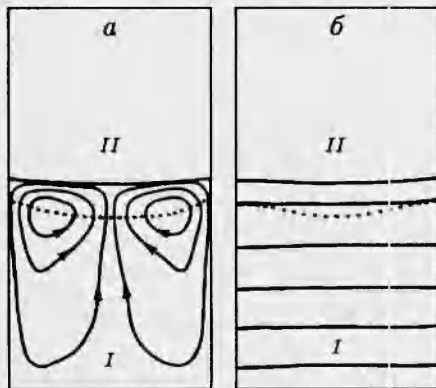


Рис. 4

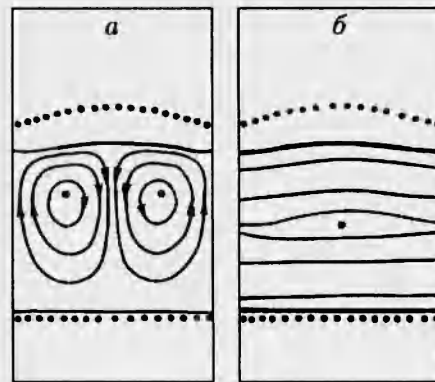


Рис. 5

между ними  $f_1(0, x) = 1$ ,  $f_2(0, x) = 2 + 0,1 \sin \pi x$  со следующим начальным распределением температуры:

на неподвижных границах

$$y = 0 \text{ и } y = 3: T = -0,01,$$

на границах раздела фаз

$$f_1 \text{ и } f_2: T = 0.$$

В твердой фазе задано линейное распределение температуры. В жидкой фазе температура от границы  $f_1$  до середины подобласти повышается от 0 до 1, затем от середины до границы  $f_2$  понижается от 1 до 0. Начальное состояние жидкости — состояние покоя. Граничные условия следующие:

$$x = 0, x = 1: \frac{\partial T}{\partial n} = 0; \quad y = 0: T = -0,01.$$

При  $y = 3$  температура сначала держится постоянной ( $T = -0,01$ ) до развития конвективного течения ( $t = 0,14$ ), затем резко понижается до  $T = -1,5$  и далее держится постоянной.

На рис. 5 представлены начальное положение границ раздела (пунктирные линии), новое положение (сплошные), изолинии функции тока (а) и изотермы (б) для момента времени  $t = 0,49$ . Линии тока направлены по центру области сверху вниз. Образовавшееся вихревое движение «втягивает» верхнюю границу раздела и слабо искривляет нижнюю.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972.
2. Тарунин Е. Л. Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1990.
3. Протопопов Б. Е. Численное моделирование поверхностных волн в канале переменной глубины // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1988. Вып. 84. С. 91–105.
4. Марчук Г. И. Методы расщепления. М.: Наука, 1988.
5. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.
6. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971.
7. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980.
8. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
9. Воеводин А. Ф., Шугрин С. М. Численные методы расчета одномерных систем. Новосибирск: Наука, 1981.
10. Павлов Н. Н. Численное интегрирование уравнения теплопроводности в многослойной среде // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1982. Вып. 56. С. 94–104.
11. Полежаев В. И., Грязнов В. Л. Метод расчета граничных условий для уравнений Навье — Стокса в переменных «вихрь, функция тока» // Докл. АН СССР. 1974. Т. 219, № 2. С. 301–304.
12. Самарский А. А., Моисеенко Б. Д. Экономичная схема сквозного счета для многомерной задачи Стефана // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1965. Т. 5, № 5. С. 816–827.

Поступила в редакцию 26/V. 1994 г.,  
в окончательном варианте — 28/VII 1994 г.