Таким образом, трещина будет распространяться по радиусу. Величина параметра нагрузки, соответствующего началу распространения трещины, определяется из уравнения (1.6).

Поступила 19 I 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Ершов Л. В., Ивлев Д. Д. Об условиях квазихрупкого разрушения. ПММ, 1967, т. 31, вып. 3.
2. Irwin G. R. Fracture. Handbuch der Physik. Bd6, Springer. Berlin, 1958, S. 551—590.
3. Sih G. C. Strenght of stress singularities at crack tips for flexural and torsional Trans. ASME, Ser. E, problems. J. Appl. Mech., 1963, vol. 30, No. 3, pp. 419—425. (Русск. перев.: Тр. Америк. о-ва инж.- механ., Прикл. механ., 1963, № 3.)
4. Ширяев Е. А. О кручении круглого бруса с трещиной по окружности или по радиусу. ПММ, 1956, т. 20, вып. 4.
5. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.

О ПРЕДЕЛЬНОМ РАВНОВЕСИИ ПЛАСТИНЫ, ОСЛАБЛЕННОЙ ДВУМЯ ТРЕЩИНАМИ

Н. В. Пальцун

(Днепропетровск)

В плоской постановке задача о бесконечном теле, ослабленном двумя трещинами одинаковой длины (для случая достаточно большого расстояния между ними), была решена Смитом [1] методом, использующим дислокационное описание трещин. Осесимметричный случай рассматривался Я. С. Уфляндом [2], В. Д. Коллинзом [3], Ю. Н. Кузьминым [4]. Последний исследовал равновесное состояние неограниченного пространства, содержащего две соосные щели разных радиусов. Ниже рассматривается аналогичная плоская задача.

Пусть неограниченная изотропная упругая пластина ослаблена двумя сквозными параллельными трещинами неравной длины ($2a$ и $2b$, $a < b$). Трещины одна от другой расположены на расстоянии h и имеют общую ось симметрии. Ось x направим вдоль меньшей из трещин, ось y — перпендикулярно к плоскости этой трещины в сторону, противоположную расположению другой трещины. Предположим, что на поверхностях трещин заданы произвольные разрывающие нормальные $\sigma_a(x)$, $\sigma_b(x)$ и касательные $\tau_a(x)$, $\tau_b(x)$ напряжения. На бесконечности нагрузка отсутствует. Требуется найти зависимость между нагрузкой и параметрами трещин, если известны все упругие константы материала пластины.

Таким образом, задача сводится к интегрированию уравнений теории упругости при граничных условиях

$$\begin{aligned} &\sigma_y = -\sigma_a(x), \quad \tau_{xy} = \tau_a(x) \quad (y = 0,\ |x| < a) \\ &\sigma_y = -\sigma_b(x) \quad \tau_{xy} = \tau_b(x) \quad (y = -h,\ |x| < b) \end{aligned} \tag{1}$$

Для решения поставленной задачи будем пользоваться бигармонической функцией Эри $U(x, y)$ и интегральным косинус-преобразованием ее $G(\xi, y)$.

Напряжения и упругие перемещения выражаются через $G(\xi, y)$ формулами [5]

$$\sigma_y = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \xi^2 G(\xi, y)\cos\xi x d\xi, \qquad \tau_{xy} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \xi\frac{\partial G}{\partial y}\sin\xi x d\xi \tag{2}$$

$$v = \frac{2(1+\nu)}{\pi E}\int_0^\infty\left[(1-\nu)\frac{\partial^3 G}{\partial y^3} - (2-\nu)\xi^2\frac{\partial G}{\partial y}\right]\frac{\cos\xi x}{\xi^2}d\xi$$

$$u = \frac{2(1+\nu)}{\pi E}\int_0^\infty\left[(1-\nu)\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + \nu\xi^2 G\right]\frac{\sin\xi x}{\xi}d\xi$$

Все пространство естественно разбить на три области: $-\infty < y < -h$, $-h < y < 0$, $0 < y < \infty$; и в дальнейшем индексы у компонент напряжения и перемещения, у функций U и G будут указывать, в какой из областей — первой, второй или третьей — определена соответствующая переменная. На участках разбиения, очевидно, должны быть непрерывны напряжения и перемещения. Вследствие этого приходим к следующим граничным условиям:

при $y = 0$

$$\sigma_{1y} = \sigma_{2y}, \qquad \tau_{1xy} = \tau_{2xy}, \qquad \sigma_{1y} = -\sigma_a(x) \quad (|x| < a)$$

$$\tau_{1y} = \tau_a(x) \quad (|x| < a), \qquad u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2 \quad (|x| > a) \tag{3}$$

$$\sigma_{2y} = \sigma_{3y}, \quad \tau_{2xy} = \tau_{3xy}, \quad \sigma_{3y} = -\sigma_b(x) \quad (|x| < b)$$

$$\tau_{3xy} = \tau_b(x) \quad (|x| < b), \qquad u_2 = u_3, \quad v_2 = v_3 \quad (|x| > b)$$

Функции Эри в соответствующих областях выбираем в виде

$$U_1(x, y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty [(A + B\xi y)e^{-\xi y} + (K + L\xi y)e^{\xi y}]\cos \xi x d\xi \tag{4}$$

$$U_2(x, y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty [(C + E\xi y)\,\mathrm{sh}\,\xi y + (D + F\xi y)\,\mathrm{ch}\,\xi y]\cos x\xi d\xi$$

$$U_3(x, y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty [(R + H\xi y)e^{-\xi y} + (M + N\xi y)e^{\xi y}]\cos \xi x d\xi$$

Исходя из поведения компонент напряжения и перемещения на бесконечности полагаем $K(\xi) = L(\xi) = R(\xi) = H(\xi) = 0$. Восемь оставшихся неизвестных функций определяются из граничных условий (3), которые с учетом (2) и (4) приводят к системе четырех парных интегральных уравнений

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \xi^2 A \cos \xi x\, d\xi = \sigma_a(x)$$

$$(0 < x < a) \tag{5}$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \xi^2 (B - A)\sin \xi x\, d\xi = \tau_a(x)$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \xi^2 (M - N\mu)e^{-\mu}\cos \xi x d\xi = \sigma_b(x)$$

$$(0 < x < b)$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \xi^2 [M + N(1 - \mu)]e^{-\mu}\sin \xi x d\xi = \tau_b(x)$$

$$\int_0^\infty \xi (B + E)\sin \xi x d\xi = 0, \qquad \int_0^\infty \xi (B - F)\cos \xi x d\xi \qquad (a < x < \infty)$$

$$\int_0^\infty (F\,\mathrm{sh}\,\mu - E\,\mathrm{ch}\,\mu + Ne^{-\mu})\xi \sin \xi x d\xi = 0 \qquad (b < x < \infty)$$

$$\int_0^\infty (F\,\mathrm{ch}\,\mu - E\,\mathrm{sh}\,\mu - Ne^{-\mu})\xi \cos \xi x d\xi = 0$$

$$(\mu = \xi h)$$

Будем опираться на более простую систему уравнений, которая получается и предыдущим интегрированием первого и третьего уравнений от 0 до x и дифференцированием пятого и седьмого уравнений по x

$$\int_0^\infty \lambda A \sin \lambda x_1 d\lambda = \frac{\pi}{2} a^2 \int_0^{x_1} \sigma_a (a x_1)\, dx_1 = 2G_a (x_1) \tag{6}$$

$$\int_0^\infty \lambda^2 (B - A) \sin \lambda x_1 d\lambda = a^3 \tau_a (a x_1) = 2Q_a (x_1) \qquad (0 < x_1 < 1)$$

$$\int_0^\infty \lambda (M - N\eta) e^{-\eta} \sin \lambda x_1 d\lambda = \frac{\pi}{2} b^2 \int_0^\infty \sigma_b (b x_1)\, dx_1 = 2G_b (x_1)$$

$$\int_0^\infty \lambda^2 [M + N(1 - \eta)] e^{-\eta} \sin \lambda x_1 d\lambda = b^3 \tau_b (b x_1) = 2Q_b (x_1)$$

$$\int_0^\infty \lambda^2 (B + E) \cos \lambda x_1 d\lambda = 0, \qquad \int_0^\infty \lambda (B - F) \cos \lambda x_1 d\lambda = 0$$

$$\int_0^\infty \lambda^2 (F \operatorname{sh} \eta - E \operatorname{ch} \eta + N e^{-\eta}) \cos \lambda x_1 d\lambda = 0 \qquad (1 < x_1 < \infty)$$

$$\int_0^\infty \lambda (F \operatorname{ch} \eta - E \operatorname{sh} \eta - N e^{-\eta}) \cos \lambda x_1 d\lambda = 0$$

($\xi = \lambda / a = \lambda / b,\ x = a x_1 = b x_1,\ h = b\delta,\ \eta = \lambda\delta$)

В дальнейшем индекс у x опущен.)

Интегральная подстановка [6]

$$B + E = \frac{1}{\lambda^2} \int_0^1 f'(t) J_0 (\lambda t)\, dt, \qquad B - F = \frac{1}{\lambda} \int_0^1 \varphi'(t) J_0 (\lambda t)\, dt$$

$$F \operatorname{sh} \eta + N e^{-\eta} - E \operatorname{ch} \eta = \frac{1}{\lambda^2} \int_0^1 \psi'(t) J_0 (\lambda t)\, dt \tag{7}$$

$$F \operatorname{ch} \eta - N e^{-\eta} - E \operatorname{sh} \eta = \frac{1}{\lambda} \int_0^1 \zeta'(t) J_0 (\lambda t)\, dt$$

приводит систему интегральных уравнений (6) к системе четырех уравнений Фредгольма второго рода

$$\Phi (x) + \frac{2}{\pi} \int_0^1 K_1 (x, v, \delta) \Psi (v)\, dv + \frac{2}{\pi} \int_0^1 K_2 (x, v, \delta) Z (v)\, dv =$$
$$= G_a (x) - \psi (1) A_1 - \xi (1) A_2 \tag{8}$$

$$F (x) - \frac{2}{\pi} \int_0^1 K_3 (x, v, \delta) \Psi (v)\, dv + \frac{2}{\pi} \int_0^1 K_4 (x, v, \delta) Z (v)\, dv =$$
$$= Q_a (x) - \psi (1) A_3 - \xi (1) A_4$$

$$Z (x) + \frac{2}{\pi} \int_0^1 K_5 (x, v, \delta) F (v)\, dv + \frac{2}{\pi} \int_0^1 K_6 (x, v, \delta) \Phi (v)\, dv =$$
$$= G_b (x) - f (1) A_5 - \varphi (1) A_6$$

$$-\Psi (x) + \frac{2}{\pi} \int_v^1 K_7 (x, v, \delta) F (v)\, dv + \frac{2}{\pi} \int_0^1 K_8 (x, v, \delta) \Phi (v)\, dv =$$
$$= Q_b (x) - f (1) A_7 - \varphi (1) A_8$$

Здесь

$$K_i = \frac{2}{\pi} v \int_0^1 \frac{dt}{t\sqrt{t^2 - v^2}} \int_0^t \sqrt{t^2 - u^2} du \int_0^\infty \lambda^2 \varphi_i(\lambda\delta) \sin \lambda x \cos \lambda u d\lambda$$

$$A_i(x, \delta) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} \int_0^\infty \varphi_i(\lambda\delta) \sin \lambda x \cos \lambda u d\lambda \qquad (i = 1, \ldots, 8)$$

$$\varphi_1 = \varphi_5 = -\delta e^{-\eta}, \qquad \varphi_2 = \varphi_6 = e^{-\eta}(1 + \eta)$$

$$\varphi_3 = -\varphi_7 = e^{-\eta}(\eta - 1), \qquad \varphi_4 = -\varphi_8 = -\lambda\eta e^{-\eta}$$

Функции $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\zeta(t)$ связаны с формулами $F(v)$, $\Phi(v)$, $\Psi(v)$, $Z(v)$ соотношениями

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^t \frac{vF(v)\,dv}{\sqrt{t^2 - v^2}}, \qquad \varphi(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^t \frac{v\Phi(v)\,dv}{\sqrt{t^2 - v^2}} \tag{9}$$

$$\psi(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^t \frac{v\Psi(v)\,dv}{\sqrt{t^2 - v^2}}, \qquad \zeta(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^t \frac{vZ(v)\,dv}{\sqrt{t^2 - v^2}}$$

Таким образом, если найдено решение системы (8), то напряженно-деформированное состояние полосы, ослабленной двумя трещинами, дается формулами (9), (7), (4)-(2). Для вычисления ряда важных характеристик нет необходимости, как это часто бывает при применении метода парных уравнений, вычислять все коэффициенты в формулах (4), ибо эти характеристики легко выражаются через решения уравнений Фредгольма (8). Например, нормальные смещения точек поверхностей трещин, определяющие их ширину, имеют вид

$$(v_1 - v_2)|_{y=0} = \frac{4(1 - \nu^2)}{\pi E a} \int_x^1 \frac{\varphi'(t)\,dt}{\sqrt{t^2 - x^2}}, \qquad (v_2 - v_3)|_{y=-h} = \frac{4(1 - \nu^2)}{\pi E b} \int_x^1 \frac{\zeta'(t)\,dt}{\sqrt{t^2 - x^2}}$$

Если параметр $\delta^{-1} = b / h$ мал (случай, когда расстояние между щелями велико по сравнению с их размерами), решение системы (8) можно провести методом разложения в ряды по этому параметру. Расчеты, выполненные для случая $\sigma_a(x) = \sigma_b(x) = P$ и $\tau_a(x) = \tau_b(x) = 0$, дали следующие формулы смещения точек поверхностей трещин:

$$(v_1 - v_2)|_{h=0} = \frac{4Pa(1 - \nu^2)}{E} \sqrt{1 - x^2} \left[\Delta_1(x, \delta) - \frac{a^2}{b^2} \nabla_1(x, \delta)\right]$$

$$(v_2 - v_3)|_{y=-h} = \frac{4Pb(1 - \nu^2)}{E} \sqrt{1 - x^2} \left[\Delta_2(x, \delta) - \frac{b^2}{a^2} \nabla_2(x, \delta)\right]$$

где

$$\Delta_i(x, \delta) = 1 - c_1^i \delta^{-4} - \delta^{-6}[(1/3 + 2/3 x^2) c_2^i + c_3^i] + \ldots$$

$$\nabla_i(x, \delta) = c_4^i \delta^{-2} - [c_5^i(1/3 + 2/3 x^2) + c_6^i]\delta^{-4} - [c_7^i(1/5 + 4/5 x^2 + {}$$
$$+ 8/15 x^4) + c_8^i(1/3 + 2/3 x^2) - c_9^i]\delta^{-6} + \ldots \qquad (i = 1, 2)$$

$$c_1^1 = 3.75, \quad c_2^1 = 2.25, \quad c_3^1 = 7.875, \quad c_4^1 = 1.5, \quad c_5^1 = 3.75$$

$$c_1^2 = 3.75, \quad c_2^2 = 7.875, \quad c_3^2 = 13.5, \quad c_4^2 = 1.5, \quad c_5^2 = 3.75$$

$$c_6^1 = 1.875, \quad c_7^1 = 6.5, \quad c_8^1 = 6.5, \quad c_9^1 = 13.425$$

$$c_6^2 = 1.875, \quad c_7^2 = 6.5, \quad c_8^2 = 13.125, \quad c_9^2 = 3.438$$

Решение задачи проводилось без учета сил молекулярного сцепления. Для нахождения длин $2a$ и $2b$ равновесных трещин потребуем плавности смыкания их противоположных поверхностей вблизи концов. Эти длины могут быть определены из соотношений [7], записанных в безразмерной форме [8]

$$\lim_{x \to 1} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} (v_1 - v_2)|_{y=0}\right] \sqrt{1 - x} = \frac{2K(1 - \nu^2)\sqrt{a}}{\pi E}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} (v_2 - v_3)|_{y=-h}\right] \sqrt{1 - x} = \frac{2K(1 - \nu^2)\sqrt{b}}{\pi E}$$

Вычисление пределов дает

$$\frac{P\sqrt{a}}{\sqrt{2}}\Delta_3(1,\delta)=\frac{K}{\pi},\qquad \frac{P\sqrt{b}}{\sqrt{2}}\Delta_4(1,\delta)=\frac{K}{\pi} \tag{10}$$

$$\Delta_3(1,\delta)=1-\frac{a^2}{b^2}1.5\delta^{-2}-\left(3.75-\frac{a^2}{b^2}5.625\right)\delta^{-4}-\left(10.125-\frac{a^2}{b^2}2.945\right)\delta^{-6}+\ldots$$

$$\Delta_4(1,\delta)=1-\frac{b^2}{a^2}1.5\delta^{-2}-\left(3.75-\frac{b^2}{a^2}5.625\right)\delta^{-4}-\left(21.375-\frac{b^2}{a^2}19.557\right)\delta^{-6}+\ldots$$

Из формул (10) следует, что при фиксированном расстоянии между трещинами, с увеличением нагрузки P большая трещина начнет распространяться первой, а вследствие неустойчивости подвижного равновесия трещин при равномерно распределенном нагружении тела на бесконечности она является магистральной трещиной.

При $a = b$ результаты исследования совпадают с результатами Смита [1]. В пределе при $h \to \infty$ формулы (10) принимают вид, совпадающий с известным решением для изолированной трещины Гриффитса в однородном теле.

Следует заметить, что принятая в данной статье гипотеза распространения трещин только в их плоскостях расположения, безусловно, дает завышенные значения разрушающих напряжений.

Поступила 30 IV 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Smith E. The opening of parallel cracks by an applied tensile stress. Internat. J. Engng. Sci., 1966, vol. 4, No. 1.
2. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., «Наука», 1967.
3. Collins W. D. Some axially summetric stress distributions in elastic solids containing penny — shaped cracs. 1. Cracks in an infinite solid and a thick plate. Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1962, vol. 266, No. 1326.
4. Кузьмин Ю. Н. Осесимметричная задача теории упругости для неограниченного тела, имеющего две соосные щели разных радиусов. Инж. ж. МТТ. 1966, № 6.
5. Снеддон И. Преобразование Фурье. М., Изд-во иностр. лит., 1955.
6. Маркузон И. А. Равновесные трещины в полосе конечной ширины. ПМТФ, 1963, № 5.
7. Irwin G. R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. J. Appl. Mech., 1957, vol. 24, No. 3.
8. Баренблатт Г. И. Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении. ПМТФ, 1961, № 4.

АНАЛИЗ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ ПО РАЗВИТИЮ УСТАЛОСТНЫХ ТРЕЩИН

Х. Халманов, Г. П. Черепанов

(Москва)

Одной из важнейших характеристик материала является вязкость разрушения, которая определяет размер дефекта, приводящего к разрушению при данном напряжении [1]. Однако при переменных нагрузках лимитирующим фактором в расчетах на прочность может оказаться скорость роста усталостной трещины, а не вязкость разрушения непосредственно. В связи с этим в последние 15 лет явление усталостного роста трещин под действием циклических нагрузок изучалось многими авторами. Ниже дается сопоставление теории роста усталостных трещин [2] с имеющимися экспериментальными данными.

1. **Феноменологическое описание процесса развития усталостных трещин.** Для объяснения развития трещин под действием циклических нагрузок была привлечена упруго-пластическая модель тела и рассмотрена тонкая структура конца трещины [2]. Применение общих соображений анализа размерностей и энергетической концепции Ирвина — Орована, обобщенной на случай нестационарного развития трещины, позволило получить следующую зависимость для скорости роста усталостной трещины:

$$\frac{dl}{dn}=-\beta\left(\frac{N_{\max}^2-N_{\min}^2}{K_c^2}+\ln\frac{K_c^2-N_{\max}^2}{K_c^2-N_{\min}^2}\right) \tag{1.1}$$