

УДК 536.3+536.42

## **Моделирование радиационно-кондуктивного теплообмена в слое полупрозрачной среды в приближении классического решения однофазной задачи Стефана**

**Н.А. Рубцов, С.Д. Слепцов**

*Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск*

E-mail: sleptsov@itp.nsc.ru

Проведено численное моделирование однофазной задачи Стефана в приближении классического решения применительно к оплавлению плоского полупрозрачного образца радиационно-кондуктивным способом в широком диапазоне степеней черноты фронта фазового перехода.

**Ключевые слова:** фазовый переход, однофазная задача Стефана, радиационно-кондуктивный теплообмен, серая среда, коэффициент отражения, степень черноты, пропускательная способность.

### **ВВЕДЕНИЕ**

Однофазная задача Стефана является частным случаем двухфазной задачи Стефана, в которой температура одной из фаз тождественно равна постоянной температуре фазового перехода [1]. Очевидно, что в рамках подобного, классического, решения условие Стефана на границе фаз со стороны фазы с постоянной температурой содержит тепловой поток нулевого значения. В реальности по обе стороны границы фаз существует перенос тепловой энергии, и физические модели однофазной задачи Стефана не удовлетворяют указанным условиям. Здесь можно отметить наиболее характерные работы [2, 3], в которых численно моделируются процессы нагрева и оплавления однородных полупрозрачных пластин за счет одностороннего внешнего радиационно-конвективного (кондуктивного) подвода тепловой энергии.

В работе [2] границы пластины предполагаются абсолютно черными, а условие Стефана в явной форме не учитывает перепада тепловых потоков на границе фаз. При этом, по условиям задачи, результирующий (радиационно-кондуктивный) тепловой поток на внешней границе, со стороны расплава, предполагается заданным.

В работе [3] границы пластины в стадии нагрева предполагаются не поглощающими, частично отражающими, пропускающими. Условие Стефана в явном виде учитывает перепад результирующих тепловых потоков на границе фаз. При этом граница фазового перехода становится полупрозрачной с переменным значением

коэффициента поглощения (излучения) и постоянным значением отражательной способности. Если в первом случае, в работе [2], затруднений в численной реализации задачи не наблюдалось, то во втором, в работе [3], отмечались ограничения при решении задачи в зависимости от значений поглощательной (излучательной) способностей границы фазового перехода.

Настоящая работа, развивая идеи, представленные в [3], предлагает приближенное рассмотрение однофазной задачи Стефана, использующее ограничения классического решения задачи.

#### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается нагрев и последующее плавление бесконечного плоскопараллельного образца из полупрозрачной серой среды с коэффициентом объемного поглощения излучения  $\alpha$  и теплопроводностью  $\lambda$ . Границы плоского образца не поглощают ( $A_i = 0$ ), частично отражают ( $R_i = \text{const}$ ) и пропускают ( $D_i = 1 - R_i$ ) полусферическое излучение в процессе нагрева образца. Нагреваемая граница  $i = 2$  при достижении температуры фазового перехода трансформируется в полупрозрачную, удовлетворяющую по оптическим свойствам условию  $A_i + R_i + D_i = 1$ ,  $i = 2$  при переменных значениях  $A_2$ . При этом предполагается справедливость закона Кирхгофа  $A_2 = \varepsilon_2$ , где  $\varepsilon_2$  — степень черноты границы 2.

Решение задачи сводится к рассмотрению нестационарного радиационно-кондуктивного теплообмена в процессе нагрева плоского образца излучением и конвекцией со стороны границы 2.

При достижении нагреваемой границей образца температуры плавления  $T_f$  начинается второй этап, на протяжении которого рассматривается задача Стефана.

Уравнение сохранения энергии, записываемое в общем случае, имеет вид:

$$c_{ps} \rho_s \frac{\partial T}{\partial t} = c_{ps} \rho_s \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_s \frac{\partial T}{\partial x} - E \right), \quad (1)$$

где  $c_{ps}$ ,  $\rho_s$ ,  $\lambda_s$  — теплоемкость, плотность и коэффициент теплопроводности конденсированной среды пластины,  $E = E(x, t)$  — плотность потока результирующего излучения в сечении  $x$  в момент времени  $t$ , определяемая из решения радиационной задачи методом средних потоков (см. ниже).

При  $\partial x / \partial t = 0$  уравнение (1) используется при рассмотрении первого этапа решения задачи. Граничные условия уравнения (1), определяющего этап нагрева образца, имеют вид:

$$-\lambda_s \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x+\delta} + h_1 (T - T_1) \Big|_{x-\delta} = 0, \quad x = 0, \quad (2)$$

$$\lambda_s \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x-\delta} - h_2 (T_2 - T) \Big|_{x+\delta} = 0, \quad x = L_0, \quad (3)$$

где  $h_i$  — коэффициент конвективного теплообмена границ  $i = 1, 2$  с внешней средой с температурой  $T_i$ .

При рассмотрении второго этапа решения задачи граничное условие (2) остается неизменным, а граничное условие (3) трансформируется в условие Стефана, при этом температура правой границы, по условию задачи, фиксируется:

$$\lambda_s \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x-\delta} - \lambda_l \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x+\delta} - h_2 (T_1 - T_2) - |E_2| = \rho_{sf} \gamma_f \frac{\partial L}{\partial t}, \quad T(x, t), \quad x = L(t), \quad (4)$$

где  $\lambda_l$  — коэффициент теплопроводности расплава, формирующегося на внешней поверхности фронта фазового перехода,  $h_{2f}$  — условное значение коэффициента конвективной теплоотдачи от пленки расплава при температуре  $T_l = T_f$  в окружающей среде за счет испарения (абляции).

В условии Стефана (4) используется следующее обозначение:

$$|E_2| = E_2(x - \delta) - E_2(x + \delta), \quad (5)$$

имеющее смысл перепада значений плотностей потоков результирующих излучений во фронте фазовых переходов. Здесь, согласно работе [4],

$$E_2(x - \delta) = A_2 E^+(x - \delta) - \varepsilon_2 n^2 E_b(T_f), \quad x = L(t), \quad (6)$$

$$E_2(x + \delta) = \varepsilon_2 E_b(T_f) - A_2 E^*(x + \delta), \quad x = L(t) \quad (7)$$

— плотности потоков результирующего излучения вблизи внутренней и внешней поверхностей границы 2,  $E_b(T_f) = \sigma_0 T_f^4$  — плотность потока полусферического равновесного излучения,  $n$  — показатель преломления в конденсированной среде пластины,  $E^+(x - \delta)$  — плотность потока излучения, падающего на внутреннюю поверхность фронта фазового перехода, которая определяется из решения радиационной задачи,  $E^*(x + \delta)$  — плотность потока излучения, падающего на внешнюю поверхность фронта, задаваемая по условиям задачи.

С учетом (5) запишем условие Стефана (4) в виде соотношения:

$$\begin{aligned} \rho_{sf} \gamma_f \frac{\partial L}{\partial t} - \lambda_s \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x-\delta} + E_2(x - \delta) = -\lambda_l \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x+\delta} + h_{2f} (T_l - T_2) \Big|_{x+\delta} + \\ + E_2(x + \delta), \quad x = L(t), \end{aligned} \quad (8)$$

в котором левая часть уравнения имеет смысл поступления тепловой энергии в перемещающийся фронт за счет фазовых превращений, а также потоков результирующего излучения и теплопроводности со стороны конденсированной фазы. Правая часть — отток тепловой энергии теплопроводностью через жидкую фазу в окружающую среду. При этом правая часть уравнения (8), по условиям задачи, является заданной.

В частном случае, рассматриваемом ниже, если предположить, что

$$-\lambda_l \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x+\delta} + h_{2f} (T_l - T_2) \Big|_{x+\delta} + E_2(x + \delta) \equiv 0, \quad (9)$$

т. е. что тепловая энергия, выделяемая на поверхности жидкой фазы фронта фазового превращения за счет излучения, компенсируется потоком тепловой энергии испаряющегося вещества [1], то условие Стефана (8), с учетом (6), может быть представлено в виде:

$$\lambda_s \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x-\delta} - A_2 E^+(x - \delta) + \varepsilon_2 n^2 \sigma_0 T_f^4 = \rho_{sf} \gamma_f \frac{\partial L}{\partial t}, \quad x = L(t). \quad (10)$$

Предполагается, что подобная форма представления условия Стефана соответствует условиям классического решения однофазной задачи Стефана применительно

к полупрозрачным материалам с частично поглощающим (излучающим) и проникаемым фронтом фазового превращения.

Система уравнений (1)–(3) для этапа нагрева дополняется начальным условием:

$$T(x, t) = T_1 = \text{const}, \quad t = 0, \quad (11)$$

а система уравнений (1), (2), (10) для задачи Стефана — начальным условием:

$$T(x, t) = f(x), \quad L(t) = L_0, \quad t = 0. \quad (12)$$

#### МЕТОД РЕШЕНИЯ

Краевая задача (1), (2), (10)–(12) и соответствующее решение радиационной задачи методом средних потоков представлены ниже в безразмерном виде. При этом используется переменная  $\xi = x/L(t)$ , позволяющая фиксировать координату фронта фазового перехода в границах  $0 \leq \xi \leq 1$  [5].

Система уравнений (1), (2), (10), (12) преобразуется к следующему виду:

$$\frac{\partial \theta(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \xi \frac{\dot{s}}{s} \frac{\partial \theta(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 \theta(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} - \frac{1}{sN} \frac{\partial \Phi(\xi, \eta)}{\partial \xi}, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad (13)$$

$$-\frac{\partial \theta(0, \eta)}{\partial \eta} + sBi_1 (\theta(0, \eta) - \theta_1) = 0, \quad \theta(1, \eta) = 1, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \theta(1, \eta)}{\partial \eta} - \frac{s}{N} \left[ A_2 \Phi^+(1, \eta) - \varepsilon_2 n^2 \frac{\theta^4(1, \eta)}{4} \right] = \frac{s\dot{s}}{St}, \quad (15)$$

$$\theta(\xi, 0) = f(\xi), \quad s(0) = 1, \quad (16)$$

здесь  $\theta = T/T_r$ ,  $\xi = x/L(t)$ ,  $s(\eta) = L(t)/L_0$ ,  $\eta = \lambda_s t / (\rho_s c_{ps} L_0^2)$ ,  $N = \lambda_s / (4\sigma_0 T_r^3 L_0)$  — радиационно-кондуктивный параметр,  $\Phi^\pm(\xi, \eta) = E^\pm(x, t) / (4\sigma_0 T_r^4)$  — безразмерная плотность потока излучения,  $F^* = E^* / (4\sigma_0 T_r^4)$  — безразмерная плотность потока излучения, падающего на пластину с правой стороны,  $Bi_1 = h_1 L_0 / \lambda$  — число Био,  $\dot{s} = ds/d\eta$  — скорость распространения фронта плавления,  $St = T_r c_{ps} / \gamma_s$  — число Стефана,  $T_r = T_f$  — определяющая температура, равная температуре фазового перехода,  $\sigma_0$  — постоянная Стефана–Больцмана.

Краевая задача, описывающая этап нагрева пластины, вытекает из приведенной выше при условиях: в уравнении (13) полагаем  $\dot{s} = 0$ , а в уравнении (15) учитываем  $\dot{s} = 0$ ,  $A_2 = \varepsilon_2 = 0$  и вводим слева  $sBi_2 (\theta_2 - \theta(1, \eta))$ ; начальное условие (16) имеет вид:  $\theta(\xi, 0) = \theta_1$ ,  $s(0) = 1$ .

Входящие в уравнение (13) безразмерная плотность потока результирующего излучения  $\Phi \equiv \Phi^+ - \Phi^-$  и значения  $\Phi^\pm$  определяются из решения уравнения переноса излучения в плоском слое излучающей и поглощающей среды с известным распределением температур по слою. При этом используется модифицированный метод средних потоков [6], сводящий уравнение переноса излучения к системе двух нелинейных дифференциальных уравнений излучения для плоского слоя среды.

Дифференциальный аналог уравнения для полусферических потоков  $\Phi^\pm$  записывается в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left( \Phi^+(\tau, \eta) - \Phi^-(\tau, \eta) \right) + \left( m^+(\tau) \Phi^+(\tau, \eta) - m^-(\tau) \Phi^-(\tau, \eta) \right) &= n^2 \Phi_0, \\ \frac{d}{d\tau} \left( m^+(\tau) l^+(\tau) \Phi^+(\tau, \eta) - m^-(\tau) l^-(\tau) \Phi^-(\tau, \eta) \right) + \left( \Phi^+(\tau, \eta) - \Phi^-(\tau, \eta) \right) &= 0, \end{aligned} \quad (17)$$

где  $\Phi_0$  — безразмерное значение плотности потока равновесного излучения,  $m^\pm$ ,  $l^\pm$  — кинетические коэффициенты, определяемые из рекуррентного соотношения, полученного с помощью формального решения уравнения переноса излучения [6].

Граничные условия для системы уравнений (17) учитывают диффузный характер процессов отражения, пропускания и частичного поглощения (излучения) границ и записываются следующим образом [3]:

$$\begin{aligned} \Phi^+(0, \eta) &= D_1 \frac{\theta^4(0, \eta)}{4} + \left( 1 - \frac{1-R_1}{n^2} \right) \Phi^-(0, \eta), \\ \Phi^-(1, \eta) &= \varepsilon_2 n^2 \frac{\theta^4(1, \eta)}{4} + D_2 F^* + \left( 1 - \frac{1-R_2}{n^2} - A_2 \frac{1+n^2}{n^2} \right) \Phi^+(1, \eta), \end{aligned} \quad (18)$$

где  $F^* = E^* / (4\sigma_0 T_r^4)$  — безразмерная плотность потока излучения, падающего на образец с правой стороны и  $A_2 = \varepsilon_2 = 0$ , если решается первый этап задачи, связанный с нагревом образца. В уравнениях (17), (18) используются определения

$$\Phi^\pm(\tau, \eta) = \frac{2\pi \int_0^{\pi/2} I(\tau, \mu) \mu d\mu}{4\sigma_0 T_r^4},$$

где  $I$  — интенсивность излучения,  $\mu$  — косинус угла между направлением распространения излучения и осью  $x$ ,  $\tau = \alpha L(t)$  — оптическая толщина слоя в момент времени  $t$ .

Решение краевой задачи сводится к определению температуры  $\theta(\xi, \eta)$  и плотностей потоков результирующего излучения  $\Phi(\xi, \eta)$  в области  $G\{0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq \eta_1\}$ , представляющей собой слой конденсированной фазы. Положение фронта фазового перехода  $s(\eta)$  меняется от 1 до 0. Краевая задача решается конечно-разностным методом, нелинейная система неявных разностных уравнений — методом прогонки и итераций. При решении радиационной задачи используются итерации, на каждом шаге которых краевая задача (17)–(18) решается методом матричной факторизации. Быстрая сходимость решения позволяет получить результаты с высокой степенью точности.

#### АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ РЕШЕНИЯ

Численное моделирование связано с определением полей температур и плотностей потоков излучения, а также динамики толщины слоя серой полупрозрачной среды в зависимости от поглощательной способности фронта плавления. Теплофизические свойства материала образца близки к свойствам стекла: плотность  $\rho_s = 2000$  кг/м<sup>3</sup>, коэффициент теплопроводности  $\lambda_s = 1$  Вт/(м·К), температуропроводность  $a_s = 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с, температура плавления  $T_f = 1000$  К, скрытая теплота фазового перехода  $\gamma_f = 500$  кДж/кг, показатель преломления  $n = 1,5$ , коэффициент объемного поглощения излучения в материале образца  $\alpha = 10$  м<sup>-1</sup>. Начальная толщина образца  $L_0 = 0,1$  м и начальная оптическая толщина  $\tau_0 = \alpha L_0 = 1$  отражают

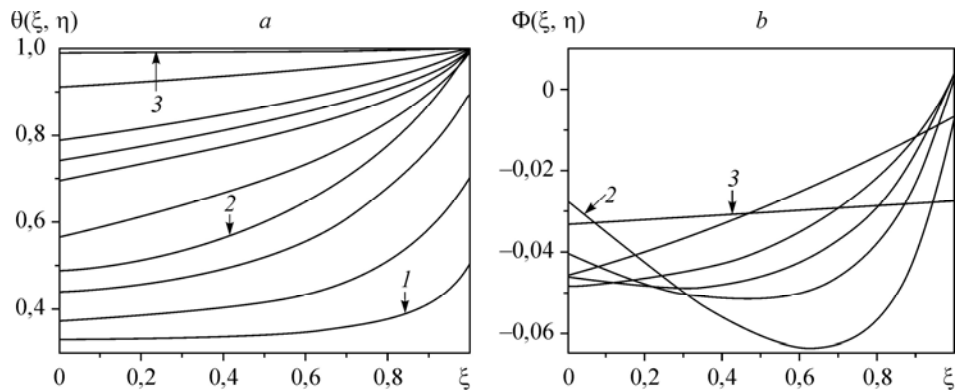


Рис. 1. Температурное поле (а) и поле плотности потока излучения в процессе фазового перехода (б) при  $\varepsilon_2 = 0,1$ .

Начало процесса (1), начало (2) и конец (3) фазового перехода.

оптимальный характер объемного взаимодействия излучения с материалом образца. Падающий поток излучения  $E^* = 200 \text{ кВт/м}^2$ , температура среды, окружающей левую границу  $T_1 = 300 \text{ К}$ , температура газа, окружающего правую сторону образца, со стороны источника излучения  $T_2 = 900 \text{ К}$  (меньше  $T_1$ ). Коэффициент теплоотдачи на левой границе  $h_1 = 1 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$ . Правая граница поддерживается при температуре плавления с нулевым значением внешнего, по отношению к границе, результирующего, радиационно-кондуктивного потока тепловой энергии (условие классического решения однофазной задачи Стефана). Коэффициенты отражения поверхностей обеих границ  $R_{1,2} = 0,1$ . При моделировании процессов радиационно-кондуктивного теплообмена полагаем излучательные (поглощательные) способности границ  $\varepsilon_{1,2} = A_{1,2} = 0$ . При переходе к задаче Стефана изменению подлежит излучательная (поглощательная) способность только правой поверхности, облучаемой и претерпевающей фазовый переход границы в пределах  $\varepsilon_2 = A_2 = [0,1 \div 0,9]$ . Предполагается, что это позволяет смоделировать ситуацию, при которой поверхностные слои материала, претерпевающего фазовые переходы 1-го рода, гипотетически меняют свои оптические свойства.

На рис. 1, а – 5, а представлена кинетика температурных полей в слое переменной оптической толщины в процессе оплавления границы 2 для различных значений степеней черноты этой границы ( $\varepsilon_2 = 0,1, 0,3, 0,5, 0,7, 0,9$ ), монотонный

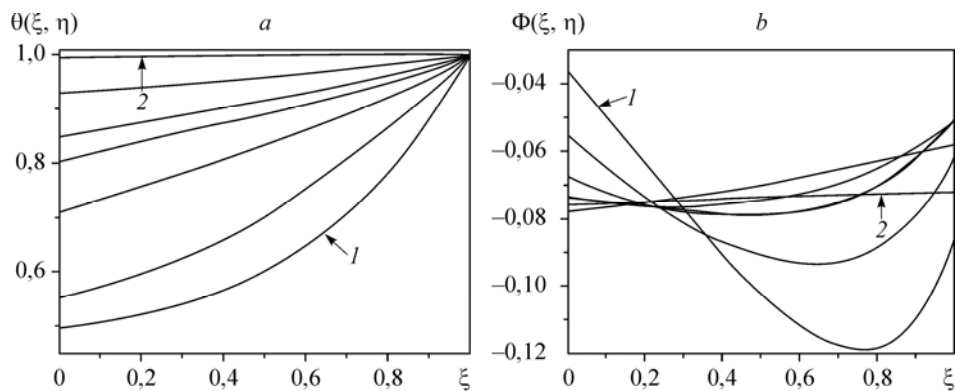


Рис. 2. Температурное поле (а) и поле плотности потока излучения (б) в процессе фазового перехода при  $\varepsilon_2 = 0,3$ .

Начало (1) и конец (2) фазового перехода.

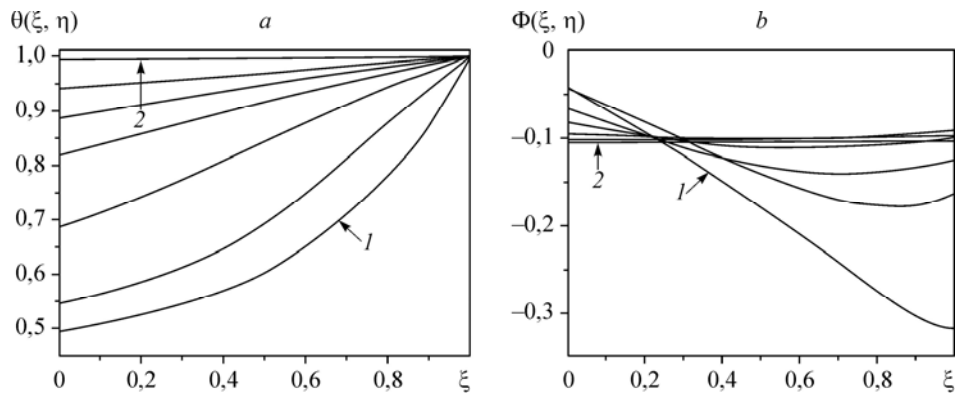


Рис. 3. Температурное поле (а) и поле плотности потока излучения (b) в процессе фазового перехода при  $\varepsilon_2 = 0,5$ .

Начало (1) и конец (2) фазового перехода.

характер температурных полей при нагреве пластины (рис. 1, а) сохраняется и при фазовом переходе. Температурные зависимости носят характер ниспадающих от температуры фазового перехода кривых. Начиная со значений  $\varepsilon_2 = 0,5$  (кривые на рис. 3, а – 5, а), характер температурных полей вблизи фронта фазового перехода меняется и кривые приобретают слабую S-образную форму. Перегревы областей пластины, примыкающих к фронту фазового перехода, отмечаемые ранее в [3, 6], отсутствуют, а распределение температур по слою на заключительном этапе оплавления пластины оказывается квазиизотермическим. Плотность потока результирующего излучения существенно зависит от степени черноты фронта фазового перехода и ее значения в рассматриваемом диапазоне изменений  $\varepsilon_2$  отличаются на порядок (см. рис. 1, b – 5, b). Тепловое излучение объема пластины высвечивается через прозрачную левую границу и полупрозрачную правую в окружающее пространство.

При малых значениях  $\varepsilon_2$  (см. рис. 1, b – 2, b) особенно отчетливо просматривается экстремум в распределении  $\Phi(\xi, \eta)$  на начальной стадии процесса, связанный с перераспределением ролей теплового излучения и теплопроводности.

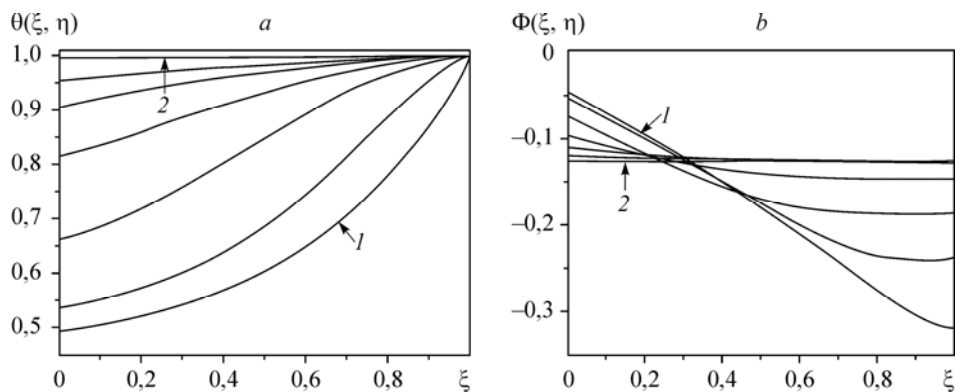


Рис. 4. Температурное поле (а) и поле плотности потока излучения (b) в процессе фазового перехода при  $\varepsilon_2 = 0,7$ .

Начало (1) и конец (2) фазового перехода.

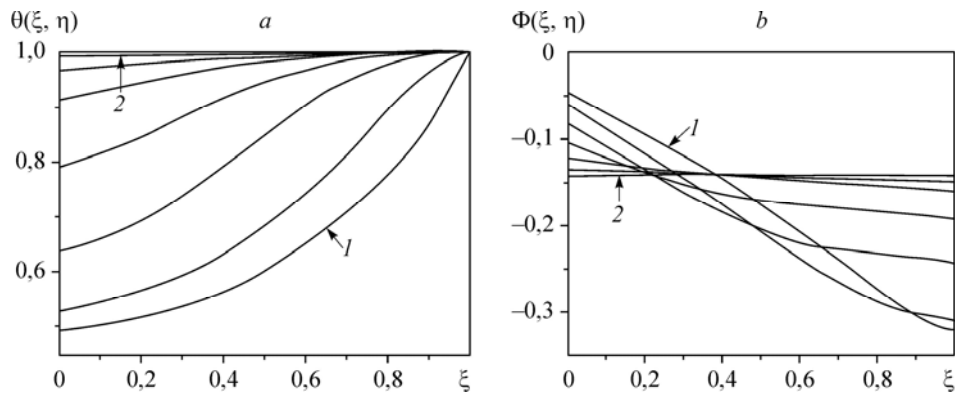


Рис. 5. Температурное поле (а) и поле плотности потока излучения (б) в процессе фазового перехода при  $\varepsilon_2 = 0,9$ .

Начало (1) и конец (2) фазового перехода.

В конце процесса оплавления пластины плотность потока результирующего излучения по толщине пластины практически не изменяется, что связано с пренебрежимо малой ролью теплопроводности и малой оптической толщиной сокращающегося по размерам образца.

Роль нелинейных процессов радиационно-кондуктивного теплообмена в слое полупрозрачной среды хорошо иллюстрируется динамикой роста температуры левой, прозрачной границы в зависимости от степени черноты фронта фазового перехода (рис. 6, а). Как видно, линейный характер кривой изменения температуры левой границы в процессе нагрева образца сменяется веером кривых нелинейного характера в зависимости от  $\varepsilon_2$ . Такой характер кривых связан с меняющейся ролью излучения среды пластины на фоне излучения, поступающего к левой границе со стороны фронта, а также на фоне излучения внешнего источника, проникающего через фронт фазового перехода.

Динамика фазовых переходов для различных значений степеней черноты фронта характеризуется зависимостью от времени, близкой к линейной (рис. 6, б), и заметным сокращением времени завершения процесса по сравнению с полученными ранее результатами [3, 6].

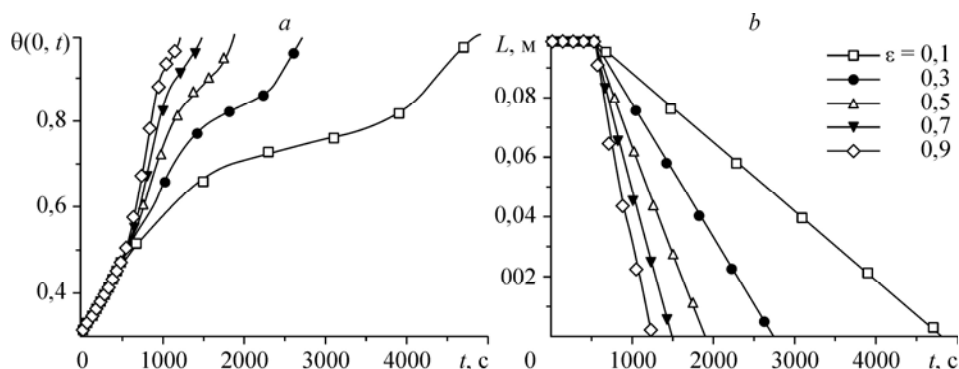


Рис. 6. Динамика роста температуры левой границы образца (а) и сокращения размеров образца (б) при разных  $\varepsilon_2$ .



## ВЫВОДЫ

Показана эффективность использования приближения классического решения однофазной задачи Стефана при моделировании оплавления полупрозрачного плоского образца за счет процессов радиационно-кондуктивного теплообмена. При этом снимаются ограничения в решении задачи по степеням черноты фронта фазового перехода.

Указанное приближение основано на предположении, что поток тепловой энергии, переносимый со стороны жидкой фазы, уравнивается потоком результирующего излучения, переносимого в жидкую фазу фронта фазового перехода.

Решение задачи оказывается устойчивым при произвольных значениях степеней черноты условно моделирующих возможные структурные преобразования вещества образца во фронте фазового перехода. При этом перегревы среды образца, примыкающей к фронту, отсутствуют.

Наличие неравновесности в среде, примыкающей к жидкой фазе равновесного фронта фазового перехода, существенно замедляет процесс плавления.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мейрманов А.М. Задача Стефана. Новосибирск: Наука, 1986. 240 с.
2. Le Dez V., et al. Problème de Stefan direct dans un milieu semitransparent gris // J. Phys. III France. 1996. Vol. 6. P. 373–390.
3. Рубцов Н.А., Слепцов С.Д. Радиационно-кондуктивный теплообмен в полупрозрачной среде с фазовым переходом на границах разной поглощательной способности // Теплофизика и аэромеханика. 2010. Т. 17, № 2. С. 237–245.
4. Рубцов Н.А. К решению однофазной задачи Стефана в слое полупрозрачного материала // Теплофизика и аэромеханика. 2005. Т. 12, № 3. С. 471–482.
5. Landau H.G. Heat conduction in a melting solid // Quart. Appl. Math. 1950. Vol. 8. P. 81–94.
6. Рубцов Н.А., Тимофеев А.М., Саввинова Н.А. Комбинированный теплообмен в полупрозрачных средах. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2003. 197 с.

*Статья поступила в редакцию 12 апреля 2010 г.*