

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ВЫСШИХ МОД НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

А. А. Колоколов, А. И. Суков

(Москва)

В линейном приближении исследована устойчивость двумерных и трехмерных высших мод нелинейного волнового уравнения относительно экспоненциально-растущих возмущений. Для всех рассмотренных моделей нелинейной среды высшие моды оказались неустойчивыми, причем число экспоненциально-растущих возмущений и их инкремент роста определяются номером моды и видом нелинейной зависимости. В параболическом приближении проведены численные эксперименты по исследованию устойчивости первой аксиально-симметричной моды относительно малых возмущений амплитуды и определены условия наблюдения высших мод.

В наиболее простой модели безынерционной нелинейной среды распространение электромагнитных волн в скалярном параболическом приближении описывается уравнением [1,2]

$$(1) \quad i \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} + \Delta \psi + f(|\psi|^2) \psi = 0,$$

где ψ — комплексная огибающая электрического поля волны; $f(|\psi|^2)$ описывает нелинейную часть диэлектрической проницаемости. Возможные зависимости $f(|\psi|^2)$, для которых существуют конечные стационарные решения вида

$$(2) \quad \psi_n = \varphi_n(r) \exp(i\gamma\tau), \quad n=0, 1, 2, \dots, \gamma > 0,$$

изучались в [3-5], где получены достаточно общие теоремы существования решений (2). Для экспериментального наблюдения стационарных распределений поля (2) необходимо, чтобы эти распределения были устойчивыми относительно малых возмущений амплитуды и фазы. В рамках уравнения (1) подробно исследована устойчивость только основной знакопостоянной моды [4,6-8]. Устойчивость высших знакопеременных мод $\varphi_n (n \geq 1)$ в этих работах не рассматривалась.

Некоторые предположения об устойчивости высших мод можно сделать на основе работ [8-10], откуда следует, что для устойчивости стационарного решения ψ_n достаточно, чтобы решение ψ_n минимизировало функционал

$$(3) \quad H(\psi) = \int [|\nabla\psi|^2 + \gamma|\psi|^2 - F(|\psi|^2)] dv, \quad F(|\psi|^2) = \int_0^{|\psi|^2} f(\eta) d\eta$$

в некотором подпространстве полного гильбертова пространства функций. Для некоторых функций $f(|\psi|^2)$ основная мода ψ_0 функционал (3) минимизирует, и поэтому ψ_0 в соответствующих нелинейных средах является устойчивым решением [8]. Высшие моды при любых функциях $f(|\psi|^2)$ функционал (3) не минимизируют [8,10], что наводит на мысль об их неустойчивости.

С целью проверки этого предположения проведено исследование устойчивости высших мод для различных моделей нелинейной среды.

В линейном приближении существование экспоненциально растущих возмущений вида $(u+iv) \exp(i\gamma\tau + \Omega\tau)$ для стационарного решения ψ_n определяется существованием вещественных собственных значений системы уравнений [6-8]

$$(4) \quad \Omega u = L_{0n} v; \quad \Omega v = -L_{1n} u,$$

где $L_{0n} = -\Delta + \gamma - f(\varphi_n^2)$; $L_{1n} = L_{0n} - 2 \frac{df}{d\varphi_n^2} \varphi_n^2$. Если система уравнений (4) имеет решение u, v, Ω , то $\pm u, \pm v, -\Omega$ также являются решениями. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только положительных значений Ω . Поскольку при $n \geq 1$ вариационный принцип для исследования системы уравнений (4) неприменим, мы использовали численное интегрирование этой системы на ЭВМ БЭСМ-4.

Решения системы (4) искались в виде

$$u_m = u_m^*(r) \times \begin{cases} \cos m \Phi \\ \sin m \Phi \end{cases}; \quad v_m = v_m^*(r) \times \begin{cases} \cos m \Phi \\ \sin m \Phi \end{cases}$$

в случае двумерного лапласиана Δ в виде

$$u_{lm} = u_{lm}^*(r) Y(\theta, \Phi); \quad v_{lm} = v_{lm}^*(r) Y_{lm}(\theta, \Phi)$$

в случае трехмерного лапласиана.

Знание асимптотического представления $u_m^*(r), v_m^*(r)$ (или $u_{lm}^*(r), v_{lm}^*(r)$) для достаточно больших значений r позволяло проводить численное интегрирование рассматриваемой системы с последующей проверкой выполнения граничного условия $u_m^*(r), v_m^*(r) \sim r^m$ (или $u_{lm}^*(r), v_{lm}^*(r) \sim r^l$) при $r \rightarrow 0$. Если это условие не выполнялось, то производилась корректировка собственного значения с последующим повторением вычислений [11].

Основной результат численного анализа системы (4) заключается в том, что для всех рассмотренных нами моделей нелинейной среды ($f = \varphi^{2p}, 0 < p \leq 2$; $f = \varphi^2/(1+\varphi^2)^k, 0 \leq k \leq 1$) как в двумерном, так и в трехмерном случае для высших мод $n \geq 1$ были найдены вещественные собственные значения системы (4). Число экспоненциально-растущих возмущений определяется номером моды n , величиной γ и видом нелинейной зависимости $f(\varphi^2)$. Для функций $f(\varphi^2)$, при которых основная мода ψ_0 относительно экспоненциально-растущих возмущений устойчива, число невырожденных положительных собственных значений системы Ω_{nm} (или Ω_{nml}) для моды ψ_n не меньше n , причем при фиксированном номере моды n максимальное собственное значение Ω_n^* соответствует максимально возможному m (или l). В этом случае все экспоненциально-растущие возмущения зависят от углов Φ или Φ, θ . Если ψ_0 относительно экспоненциально-растущих возмущений неустойчива, то число невырожденных положительных собственных значений Ω_{nm} (или Ω_{nml}) для моды ψ_n не меньше $n+1$, а максимальное собственное значение Ω_n^* соответствует $m=0$ (или $l=0$). В этом случае существуют не зависящие от углов экспоненциально-растущие возмущения.

Если $f(\varphi^2)$ при $\varphi^2 \rightarrow \infty$ неограниченно растет, то величина Ω_n^* также неограниченно растет с увеличением номера моды n . На фиг. 1 приведена зависимость Ω_{nm} от номера моды для аксиально-симметричных мод кубической среды $f = \varphi^2, \gamma = 1$. Если максимум выражения $\left| \frac{df}{d\varphi^2} \varphi^2 \right|$ для

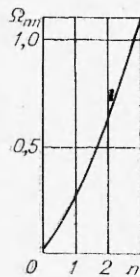
$0 \leq \varphi^2 < \infty$ не превышает M , то $|\Omega_n^*| \leq M$. Из системы (4) можно получить

$$\Omega (\langle u|u \rangle + \langle v|v \rangle) = \langle u | L_{0n} | v \rangle - \langle v | L_{1n} | u \rangle = 2 \left\langle v \left| \frac{df}{d\varphi_n^2} \varphi_n^2 \right| u \right\rangle,$$

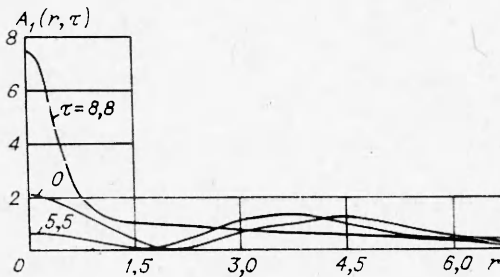
отсюда $|\Omega| (\langle u|u \rangle + \langle v|v \rangle) \leq \max \left| \frac{df}{d\varphi_n^2} \varphi_n^2 \right| (\langle u|u \rangle + \langle v|v \rangle)$

и $|\Omega_n^*| \leq \max \left| \frac{df}{d\varphi_n^2} \varphi_n^2 \right| = M$.

Если среду с насыщающей нелинейностью аппроксимировать функцией $f = \varphi^2/1 + \varphi^2$, то для всех высших мод $|\Omega_n^*| \leq 0,25$. Этот результат был подтвержден при численном решении системы (4) для $f = \varphi^2/1 + \varphi^2$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Следовательно, если основная мода неустойчива, то наблюдение высших мод также невозможно, так как существуют как зависящие, так и не зависящие от углов экспоненциально-растущие возмущения. Если основная мода устойчива, то вопрос устойчивости высших мод относительно не зависящих от углов возмущений остается открытым. Согласно линейной теории устойчивости, в рамках уравнения (1) для решений (2) всегда существуют возмущения, растущие со временем τ линейно [7-8]. Среди этих возмущений имеются такие, которые не зависят от углов. Достаточное условие ограничения роста этих возмущений для высших мод не выполняется. Поэтому даже при устойчивой основной моде высшие моды могут оказаться неустойчивыми относительно не зависящих от углов возмущений.

Для исследования этого случая нами были проведены численные эксперименты по анализу развития малых возмущений вида $\delta\psi = a \times \exp(-r^2/l^2)$ для первой аксиально-симметричной моды ψ_1 при $f = |\psi|^2/(1 + |\psi|^2)^k$, $0 < k \leq 1$. В этом случае ψ_0 относительно экспоненциально-растущих возмущений устойчива и все экспоненциально-растущие возмущения для высших мод зависят от угла Φ . Отметим, что для выбранных нами зависимостей $f(|\psi|^2)$ в процессе распространения светового лучка особенность не образуется. Это следует из анализа, проведенного в параксиальном приближении, а также из того факта, что в этом случае для образования особенности требуется бесконечная энергия. Поэтому, если имеет место неустойчивость, то она должна иметь осцилляционный характер. Этот вывод подтверждается при численном решении уравнения (1) с граничными условиями

$$\frac{\partial \psi}{\partial r}(0, \tau) = 0, \quad \psi(\infty, \tau) = 0.$$

Уравнение (1) аппроксимировалось неявной трехслойной симметричной конечно-разностной схемой второго порядка по обеим переменным [12]. Для радиальной переменной r использовался регулярный шаблон. После корректного переноса граничного условия из бесконечности [13] полученная система алгебраических уравнений решалась методом прогонки. Контроль за точностью вычислений производился по сохранению инвариантов

$$I^{(1)} = \int |\varphi|^2 dv;$$

$$I^{(2)} = \int [|\nabla\varphi|^2 - F(|\varphi|^2)] dv.$$

Для приводимых результатов вычислений наихудшая относительная точность сохранения $I^{(1)} \sim 0,5 \cdot 10^{-4}$, $I^{(2)} \sim 3 \cdot 10^{-4}$.

Анализ радиального распределения амплитуды поля в процессе распространения возмущенной первой моды показал наличие значительных осцилляций радиального распределения и связанных с ними осцилляций амплитуды в центре пучка. На фиг. 2 приведены радиальные распределения амплитуды первой моды

$$|\psi_1(r, \tau)| = A_1(r, \tau) \text{ для } f = |\varphi|^2 / (1 + |\varphi|^2)^{1/4}; \quad \gamma = 0,5; \quad a = -0,4;$$

$l=1$ для нескольких значений τ . Из фиг. 2 видно, что энергия поля попеременно концентрируется или в центре пучка или на его периферии. В первом случае распределение амплитуды близко к распределению амплитуды в основной моде, энергия которой приблизительно равна энергии первой моды. Отсюда можно оценить сверху максимально возможную амплитуду осцилляций $A^*(0, \tau)$:

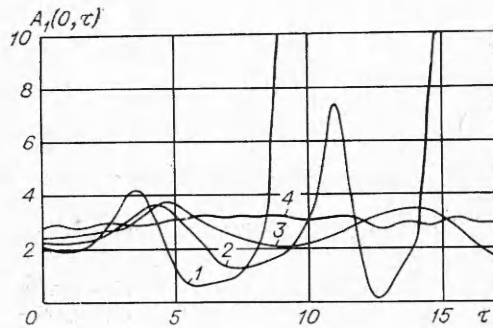
$$\frac{A^*(0, \tau)}{A(0, 0)} \sim \left(\frac{I_1}{I_0} \right)^{\frac{1-k}{2k}}; \quad f \sim |\varphi|^{2(1-k)}, \quad |\varphi| \rightarrow \infty,$$

где I_0 и I_1 — энергия соответственно основной и первой мод для соответствующих нелинейных зависимостей. Следовательно, при $k \rightarrow 1$ (насыщение нелинейности) амплитуда осцилляций должна уменьшаться. На фиг. 3 приведены зависимости амплитуды первой моды $A_1(0, \tau)$ от τ для $\gamma = 0,5$, различных значений $k = 0,25; 0,375; 0,5; 0,75$ (кривые 1—4 соответственно) и фиксированном начальном возмущении $a = -0,4; l=1$. Из этих зависимостей ясно видно уменьшение амплитуды осцилляций при увеличении k . Обычно $I_1/I_0 \gg 1$, поэтому при небольших k отношение $A^*(0, \tau)/A(0, 0)$ может достигать больших значений. Относительно небольшая точность наших расчетов не всегда позволяла определять это отношение и проводить вычисления до достижения максимума амплитуды поля $A^*(0, \tau)$.

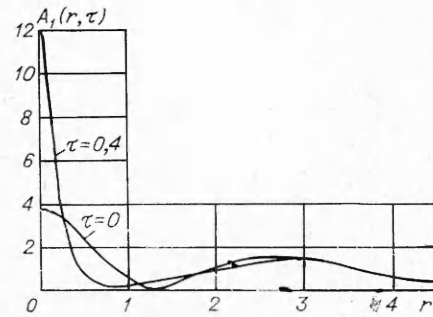
Если $f = |\varphi|^{2p}$, $p \geq 1$, то в процессе распространения возмущенной моды возможно образование особенности [2, 14], поэтому в этом случае характер разрушения высших мод должен отличаться от характера разрушения высших мод, когда особенность не образуется. Анализ радиального распределения амплитуды возмущенной первой моды с аксиальной симметрией при $p \geq 1$ показал, что особенность образуется в основном за счет поля центральной части пучка, причем распределение поля на периферии пучка в процессе распространения мало меняется. Это связано с тем, что при $p=1$ в особенность фокусируется энергия $I_0 \ll I_1$, а при $p > 1$ в особенность фокусируется бесконечно малая энергия. Замет-

ных осцилляций радиального распределения амплитуды не наблюдается. На фиг. 4 приведены радиальные распределения амплитуды первой моды $A_1(r, \tau)$ для $f=|\psi|^2$; $\gamma=1$; $a=0,4$; $l=1$.

Следовательно, с математической точки зрения во всех рассмотренных моделях нелинейной среды высшие моды оказались неустойчивыми.



Фиг. 3



Фиг. 4

Тем не менее наблюдение высших мод в среде с насыщающейся нелинейностью представляется возможным при условии, что начальное распределение поля не зависит от углов и близко к начальному распределению поля соответствующих высших мод.

Поступила 28 XI 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Хохлов Р. В. Самофокусировка и дифракция света в нелинейной среде. — УФН, 1967, т. 93, вып. 1.
2. Захаров В. Е., Соболев В. В., Сынах В. С. Разрушение монохроматической волны в среде с безынерционной нелинейностью. — ПМТФ, 1972, № 1.
3. Ryder H. Boundary value problems for a class of nonlinear differential equations. — «Pacif. J. Math.», 1967, vol. 22, N 2.
4. Kolokolov A. A., Skrotsky G. V. Self-focusing and self-trapping of light beams in a nonlinear medium. — «Acta Phys. Austr.», 1973, vol. 3, N 2.
5. Колоколов А. А. Существование стационарных решений нелинейного волнового уравнения. — ПММ, 1974, т. 38, № 5.
6. Колоколов А. А. Устойчивость основной моды нелинейного волнового уравнения в кубичной среде. — ПМТФ, 1973, № 3.
7. Вахитов Н. Г., Колоколов А. А. Стационарные решения в среде с насыщением нелинейности. — «Изв. вузов. Радиофизика», 1973, т. 16, № 7.
8. Колоколов А. А. Устойчивость стационарных решений нелинейного волнового уравнения. — «Изв. вузов. Радиофизика», 1974, т. 17, № 9.
9. Заставенко Л. Г. Частицеподобные решения нелинейного волнового уравнения. — ПММ, 1965, т. 29, вып. 3.
10. Рыбаков Ю. П. К вопросу об устойчивости частицеподобных решений нелинейного волнового уравнения скалярного поля. — «Вестн. Моск. ун-та», 1962, № 4.
11. Anderson D. L. T., Derrick G. H. Stability of time-dependent particlelike solutions in nonlinear field theories. I. — «J. Math. Phys.», 1970, vol. 11, N 4.
12. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М., «Наука», 1974.
13. Соболев В. В., Сынах В. С. Численный эксперимент по самофокусировке электромагнитных волн в нелинейной среде. — ПМТФ, 1969, № 6.
14. Власов С. Н., Петрищев В. А., Таланов В. И. Усредненное описание световых пучков в линейных и нелинейных средах (метод моментов). — «Изв. вузов. Радиофизика», 1971, т. 14, № 7.