Прикладная механика и техническая физика, 1997, т. 38, № 2

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА УПРУГОСТИ ПРИ НЕСЖИМАЕМОСТИ И ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

УДК 539.3

В. Д. Бондарь

Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск

Плоская задача относится к числу наиболее изученных в теории упругости. Такое положение обусловлено как возможностью приближенной реализации ее исходных посылок в ряде практически важных случаев, так и применимостью к исследованию задачи комплексного анализа, позволяющего развивать эффективные методы решения. Ниже плоская задача рассматривается применительно к несжимаемым материалам в условиях геометрической нелинейности.

Несжимаемые материалы имеют широкое распространение. К их числу относится, например, ряд конструкционных, а также резиноподобных и полимерных материалов. Несжимаемость накладывает на деформацию определенное ограничение, что приводит к модификации закона механического поведения.

Учет геометрической нелинейности в той или иной форме становится необходимым, когда градиенты перемещения или их комбинации уже нельзя считать малыми во всем объеме тела. Подобная ситуация обычно реализуется в гибких телах, в телах с полостями вблизи внутренних и внешних границ и др. Геометрическая нелинейность видоизменяет связи деформаций с перемещениями, обусловливая появление в них нелинейных членов.

Рассмотрим влияние несжимаемости на нелинейную деформацию. Исследование будем проводить в рамках плоской задачи на основе развитой В. В. Новожиловым теории нелинейной упругости [1].

Статическую задачу упругости составляют зависимости деформаций от удлинений-сдвигов и поворотов, представления последних величин через перемещения, соотношения между напряжениями и деформациями и уравнения равновесия, к которым присоединяются граничные условия на поверхности тела. Представим эти соотношения в переменных актуального состояния материала.

В актуальных переменных напряжения и деформации характеризуются симметричными тензорами Коши P и Альманси ε. Тензор ε выражается через вектор перемещения $\mathbf{u}$ и через тензоры e, ω, связанные с удлинениями-сдвигами и поворотами, нелинейными формулами [2]:

$$2\varepsilon = \nabla\mathbf{u} + \mathbf{u}\nabla - (\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla) = 2e - e\cdot e + e\cdot\omega - \omega\cdot e + \omega\cdot\omega,\ \nabla\mathbf{u} = e + \omega,\ \mathbf{u}\nabla = e - \omega.$$

Здесь $\nabla\mathbf{u}$ и $\mathbf{u}\nabla$ — градиент и транспонированный градиент смещений.

В теории [1] принимается, что компоненты удлинений-сдвигов и поворотов $e_{\alpha\beta}$, $\omega_{\alpha\beta}$ малы по сравнению с единицей и что первые из них того же порядка, что и произведения вторых: $|e_{\alpha\beta}| \ll 1$, $|\omega_{\alpha\beta}| \ll 1$, $|e_{\alpha\beta}| \sim |\omega_{\sigma\nu}\omega_{\nu\tau}|$ (по дважды повторяющемуся индексу предполагается суммирование). В силу этих допущений тензор деформации можно представить приближенной нелинейной формулой, если в его общем выражении сохранить только члены порядка e:

$$2\varepsilon = 2e + \omega\cdot\omega, \quad 2e = \nabla\mathbf{u} + \mathbf{u}\nabla, \quad 2\omega = \nabla\mathbf{u} - \mathbf{u}\nabla. \tag{1}$$

Следовательно, в данной теории компоненты деформации $\varepsilon_{\alpha\beta}$ также будут малыми величинами ($|\varepsilon_{\alpha\beta}| \ll 1$).

Тензоры Коши и Альманси связаны между собой законом Мурнагана [3]. Последний вытекает из уравнения баланса энергии, примененного к изотермическому виртуальному смещению $\delta\mathbf{x}$ среды в актуальном состоянии: $\rho dF/d\varepsilon : \delta\varepsilon = P : (\nabla\delta\mathbf{x})$, $F = F(\varepsilon)$ (ρ и F — плотность материала и свободной энергии). Это уравнение, представленное с помощью выражения вариации тензора деформации

$$2\delta\varepsilon = (\nabla\delta\mathrm{x}) \cdot (G - 2\varepsilon) + (G - 2\varepsilon) \cdot (\delta\mathbf{x}\nabla) \tag{2}$$

(G — метрический тензор) в форме

$$\left[P - \rho(G - 2\varepsilon) \cdot \frac{dF}{d\varepsilon}\right] : (\nabla\delta\mathbf{x}) = 0, \tag{3}$$

при произвольных независимых компонентах градиента $\nabla\delta\mathbf{x}$ дает закон Мурнагана в виде

$$P = \rho(G - 2\varepsilon)\, dF/d\varepsilon. \tag{4}$$

Плотность материала определяется через исходную плотность ρ_0 и основные инварианты деформации ε_1, ε_2, ε_3 формулой [3]

$$\rho = \rho_0\sqrt{1 - 2\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2 - 8\varepsilon_3} \quad (\varepsilon_1 = \operatorname{tr}\varepsilon, \quad 2\varepsilon_2 = (\operatorname{tr}\varepsilon)^2 - \operatorname{tr}\varepsilon^2, \quad \varepsilon_3 = \det\varepsilon). \tag{5}$$

Для изотропного материала функцией инвариантов деформации будет и свободная энергия $F = F(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

При малых деформациях инварианты ε_1, ε_2, ε_3 являются малыми величинами соответственно первого, второго и третьего порядка. В этом случае закон (4) допускает приближенное выражение [4]

$$P = \rho_0\frac{dF}{d\varepsilon} + (\rho - \rho_0)\frac{dF}{d\varepsilon} - 2\rho\varepsilon \cdot \frac{dF}{d\varepsilon} \approx \frac{dF_*}{d\varepsilon}, \quad F_* = \rho_0 F \tag{6}$$

и при квадратичном представлении свободной энергии $F_* = (1/2)\lambda\varepsilon_1^2 + \mu(\varepsilon_1^2 - 2\varepsilon_2)$, $\lambda = \mathrm{const}$, $\mu = \mathrm{const}$ (λ, μ — коэффициенты упругости Ламе) с учетом тензорных градиентов инвариантов деформации

$$\frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon} = G, \quad \frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon} = \varepsilon_1 G - \varepsilon, \quad \frac{d\varepsilon_3}{d\varepsilon} = \varepsilon_2 G - \varepsilon_1\varepsilon + \varepsilon^2 \tag{7}$$

дает закон Гука

$$P = \lambda\varepsilon_1 G + 2\mu\varepsilon. \tag{8}$$

Уравнение равновесия материала с плотностью $\mathbf{f}$ объемных сил имеет вид [2]

$$P \cdot \nabla + \mathbf{f} = 0. \tag{9}$$

На границе тела обычно задают смешанные условия: перемещение $\mathbf{h}$ на части Σ_u поверхности и напряжение $\mathbf{p}$ на другой ее части Σ_p:

$$\mathbf{u}\big|_{\Sigma_u} = \mathbf{h}, \quad P \cdot \mathbf{n}\big|_{\Sigma_p} = \mathbf{p} \tag{10}$$

($\mathbf{n}$ — орт внешней нормали к поверхности тела).

Уравнения (1), (8), (9) и условия (10) составляют статическую задачу сжимаемого материала в геометрически нелинейной модели упругости [5]:

$$\begin{gathered} P \cdot \nabla + \mathbf{f} = 0, \quad P = \lambda\varepsilon_1 G + 2\mu\varepsilon, \quad \varepsilon_1 = \operatorname{tr}\varepsilon, \quad \lambda = \mathrm{const}, \quad \mu = \mathrm{const}, \\ 2\varepsilon = 2e + \omega \cdot \omega, \quad 2e = \nabla\mathbf{u} + \mathbf{u}\nabla, \quad 2\omega = \nabla\mathbf{u} - \mathbf{u}\nabla, \quad \mathbf{u}\big|_{\Sigma_u} = \mathbf{h}, \quad P \cdot \mathbf{n}\big|_{\Sigma_p} = \mathbf{p}. \end{gathered} \tag{11}$$

Для несжимаемого материала эти соотношения нуждаются в модификации.

В условиях несжимаемости исходный и актуальный объем dV_0 и dV типичной элементарной частицы одинаков ($dV_0 = dV$). Поэтому условие сохранения ее массы при деформировании ($\rho dV = \rho_0 dV_0$) влечет за собой совпадение исходной и актуальной плотности ($\rho_0 = \rho$). Соотношение (5) при этом упрощается и представляет собой условие несжимаемости в виде ограничения на инварианты деформации:

$$\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 + 4\varepsilon_3 = 0. \tag{12}$$

В случае малых деформаций уравнение (12) допускает линеаризацию

$$\varepsilon_1 = 0. \tag{13}$$

Если материал несжимаем, то не все компоненты градиента $\nabla\delta\mathbf{x}$ независимы и связаны одним соотношением, которое устанавливается путем варьирования (12) при использовании выражений (2) и (7) и имеет вид

$$\Big(\frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon} - 2\,\frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon} + 4\,\frac{d\varepsilon_3}{d\varepsilon}\Big) : \delta\varepsilon = [(1 - 2\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2)G - 8(\varepsilon_2\varepsilon - \varepsilon_1\varepsilon^2 + \varepsilon^3)] : (\nabla\delta\mathbf{x}) = 0.$$

С учетом (12) и тождества Гамильтона — Кели [6] для тензора деформации $\varepsilon^3 - \varepsilon_1\varepsilon^2 + \varepsilon_2\varepsilon - \varepsilon_3 G = 0$ оно упрощается и принимает форму

$$G : (\nabla\delta\mathbf{x}) = 0. \tag{14}$$

Таким образом, ограничение на компоненты градиента виртуального перемещения, накладываемое несжимаемостью, не зависит от деформации и сохраняет одно и то же выражение как при конечных, так и при малых деформациях.

Для вывода закона поведения несжимаемого материала умножим условие (14) на лагранжев множитель q и сложим результат с соотношением (3) для этого случая, в итоге получим равенство $[P + qG - (G - 2\varepsilon)(dF_*/d\varepsilon)] : (\nabla\delta\mathbf{x}) = 0$, где F_* определено формулой (6).

Распорядимся произволом множителя q таким образом, чтобы обратился в нуль коэффициент при зависимом компоненте градиента $\nabla\delta\mathbf{x}$. Тогда в соотношении останутся члены с независимыми компонентами градиента и в силу произвольности последних должны обращаться в нуль коэффициенты при них. В результате оказываются равными нулю коэффициенты при всех компонентах градиента, что и приводит к модифицированному закону Мурнагана $P = -qG + (G - 2\varepsilon)(dF_*/d\varepsilon)$, $F_* = F_*(\varepsilon)$. В этом законе лагранжев множитель имеет смысл гидростатического давления; что касается аргументов свободной энергии, то они должны быть связаны условием несжимаемости.

При малых деформациях закон принимает вид $P = -qG + (dF_*/d\varepsilon)$ и при квадратичном представлении свободной энергии (отвечающем изотропному телу и учитывающем условие (13)) $F_* = -2\mu\varepsilon_2$ дает модифицированный закон Гука

$$P = -qG + 2\mu\varepsilon. \tag{15}$$

Таким образом, краевую задачу упругости при учете несжимаемости и геометрической нелинейности составляют уравнения (1), (9), (13), (15) и условия (10):

$$\begin{gathered} P \cdot \nabla + \mathbf{f} = 0, \quad P = -qG + 2\mu\varepsilon, \quad \mu = \mathrm{const}, \quad \varepsilon_1 = \mathrm{tr}\,\varepsilon = 0, \\ 2\varepsilon = 2e + \omega\cdot\omega, \quad 2e = \nabla\mathbf{u} + \mathbf{u}\nabla, \quad 2\omega = \nabla\mathbf{u} - \mathbf{u}\nabla, \quad \mathbf{u}\Big|_{\Sigma_u} = \mathbf{h}, \quad P\cdot\mathbf{n}\Big|_{\Sigma_p} = \mathbf{p}. \end{gathered} \tag{16}$$

В отличие от аналогичной задачи (11) для сжимаемого материала в соотношениях (16) появляется дополнительная неизвестная величина — гидростатическое давление, однако в них содержится и дополнительное уравнение — условие несжимаемости, поэтому система уравнений остается замкнутой.

При плоской деформации цилиндрического (или призматического) тела, параллельной его основаниям, основной является плоская задача [7], в которой уравнения (16) выполняются в плоской области S — сечении тела плоскостью деформирования, а краевые условия — на ее границе L. В декартовых координатах x, y актуального состояния, определенных на плоскости деформирования, соотношения плоской задачи следуют из (16) и при отсутствии объемных сил имеют вид

$$\frac{\partial P_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial P_{xy}}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial P_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial P_{yy}}{\partial y}=0,\quad P_{xx}=-q+2\mu\varepsilon_{xx},\quad P_{yy}=-q+2\mu\varepsilon_{yy},$$

$$P_{xy}=2\mu\varepsilon_{xy},\quad 2\varepsilon_{xx}=2e_{xx}-\omega_{xy}^2,\quad 2\varepsilon_{yy}=2e_{yy}-\omega_{xy}^2,\quad \varepsilon_{xy}=e_{xy},\tag{17}$$

$$\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}=0,\quad e_{xx}=\frac{\partial u_x}{\partial x},\quad e_{yy}=\frac{\partial u_y}{\partial y},\quad 2e_{xy}=\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y},\quad 2\omega_{xy}=\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y};$$

$$u_x\Big|_{L_u}=h_x(s),\ u_y\Big|_{L_u}=h_y(s),\ P_{xx}\frac{dy}{ds}-P_{xy}\frac{dx}{ds}\Big|_{L_p}=p_x(s),\ P_{xy}\frac{dy}{ds}-P_{yy}\frac{dx}{ds}\Big|_{L_p}=p_y(s).\tag{18}$$

Здесь декартовы компоненты векторов и тензоров обозначены теми же символами, что и сами величины, но с буквенными индексами; L_u, L_p — части границы L, на которых заданы соответственно перемещения и напряжения; s — дуга L; учтено, что компоненты нормали к контуру L представимы через его уравнения $x=x(s)$, $y=y(s)$ формулами $n_x=dy/ds$, $n_y=-dx/ds$.

Соотношения (17) позволяют получить уравнения первого порядка для напряжений и поворота. Действительно, уравнение несжимаемости и закон механического поведения дают для давления представление через напряжения $q=-(1/2)(P_{xx}+P_{yy})$, с учетом которого деформации также определяются одними напряжениями с помощью формул $2\mu\varepsilon_{xx}=(1/2)(P_{xx}-P_{yy})$, $2\mu\varepsilon_{yy}=(1/2)(P_{yy}-P_{xx})$, $2\mu\varepsilon_{xy}=P_{xy}$. После исключения перемещений из выражений градиентов перемещений через напряжения и поворот

$$2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x}=\frac{1}{2}(P_{xx}-P_{yy})+\mu\omega_{xy}^2,\quad 2\mu\frac{\partial u_x}{\partial y}=P_{xy}-2\mu\omega_{xy},$$

$$2\mu\frac{\partial u_y}{\partial y}=\frac{1}{2}(P_{yy}-P_{xx})+\mu\omega_{xy}^2,\quad 2\mu\frac{\partial u_y}{\partial x}=P_{xy}+2\mu\omega_{xy}$$

получим уравнения совместности напряжений и поворота. Присоединение к последним уравнений равновесия (двух первых равенств (17)) и дает искомую систему в виде

$$\Phi_1=\frac{\partial(P_{xx}-P_{yy})}{\partial y}-2\frac{\partial P_{xy}}{\partial x}+4\mu\Big(\frac{\partial\omega_{xy}}{\partial x}+\omega_{xy}\frac{\partial\omega_{xy}}{\partial y}\Big)=0,$$

$$\Phi_2=\frac{\partial(P_{yy}-P_{xx})}{\partial x}-2\frac{\partial P_{xy}}{\partial y}+4\mu\Big(\omega_{xy}\frac{\partial\omega_{xy}}{\partial x}-\frac{\partial\omega_{xy}}{\partial y}\Big)=0,\tag{19}$$

$$\Phi_3=\frac{\partial P_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial P_{xy}}{\partial y}=0,\quad \Phi_4=\frac{\partial P_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial P_{yy}}{\partial y}=0.$$

Полагая, что на всей границе заданы силовые условия (18)

$$P_{xx}\frac{dy}{ds}-P_{xy}\frac{dx}{ds}\Big|_L=p_x(s),\quad P_{xy}\frac{dy}{ds}-P_{yy}\frac{dx}{ds}\Big|_L=p_y(s),\tag{20}$$

имеем плоскую краевую задачу (19), (20) для напряжений и поворота.

Для удобства исследования типа системы (19) введем для искомых функций и их аргументов индексные обозначения: $w_1=P_{xx}$, $w_2=P_{yy}$, $w_3=P_{xy}$, $w_4=\omega_{xy}$; $x_1=x$, $x_2=y$.

Рассмотрим, следуя [8], характеристический определитель

$$\Delta_* = \det(A_{kl}), \quad A_{kl} = \sum_{m=1}^{2} \Big\{\partial\Phi_k/\partial\Big(\frac{\partial w_l}{\partial x_n}\Big)\Big\}\sigma_m \quad \Big(\sum_m \sigma_m^2 = 1, \quad k,l = \overline{1,4}\Big). \tag{21}$$

В силу (19) и (21) элементы определителя и его величина имеют следующие значения: $A_{11} = \sigma_2$, $A_{12} = -\sigma_2$, $A_{13} = -2\sigma_1$, $A_{14} = 4\mu(\sigma_1 + w_4\sigma_2)$, $A_{21} = -\sigma_1$, $A_{22} = \sigma_1$, $A_{23} = -2\sigma_2$, $A_{24} = 4\mu(w_4\sigma_1 - \sigma_2)$, $A_{31} = \sigma_1$, $A_{32} = 0$, $A_{33} = \sigma_2$, $A_{34} = 0$, $A_{41} = 0$, $A_{42} = \sigma_2$, $A_{43} = \sigma_1$, $A_{44} = 0$, $\Delta_* = 4\mu(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2$.

Поскольку $\mu > 0$, то $\Delta_* > 0$. Значит, у характеристического уравнения $\Delta_* = 0$ нет вещественных корней. Тем самым квазилинейная система (19), подобно соответствующей системе линейной упругости, является эллиптической, и для нее корректна краевая задача (19), (20).

Перейдем на плоскости деформирования от декартовых к комплексным координатам z, z по формулам

$$z = x + iy, \quad z = x - iy, \quad 2\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}, \quad 2\frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}$$

и рассмотрим комплексные компоненты векторов и тензоров (обозначаемые так же, как и сами величины, но с верхними числовыми индексами), которые связаны с декартовыми компонентами соотношениями [5]

$$u^1 = \bar u^2 = u_x + iu_y, \quad p^1 = \bar p^2 = p_x + ip_y, \quad P^{11} = \overline{P^{22}} = P_{xx} - P_{yy} + 2iP_{xy},$$
$$P^{21} = P^{12} = P_{xx} + P_{yy}, \quad \varepsilon^{11} = \overline{\varepsilon^{22}} = \varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy} + 2i\varepsilon_{xy}, \quad \varepsilon^{21} = \varepsilon^{12} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}, \tag{22}$$
$$e^{11} = \bar e^{22} = e_{xx} - e_{yy} + 2ie_{xy}, \quad e^{21} = e^{12} = e_{xx} + e_{yy}, \quad \omega^{11} = \overline{\omega^{22}} = 0, \quad \omega^{21} = \overline{\omega^{12}} = 2i\omega_{xy}.$$

Тогда уравнения (17) и условия (18) запишутся в компактной форме:

$$\frac{\partial P^{11}}{\partial z} + \frac{\partial P^{21}}{\partial \bar z} = 0, \ P^{11} = \overline{P^{22}} = 2\mu\varepsilon^{11}, \ P^{21} = P^{12} = -2q, \ \varepsilon^{11} = \bar\varepsilon^{\overline{22}} = e^{11},$$
$$\varepsilon^{21} = \varepsilon^{12} = e^{21} + \frac{1}{4}(\omega^{21})^2, \ \varepsilon^{21} = 0, \ e^{11} = \overline{e^{22}} = 2\frac{\partial u^1}{\partial \bar z}, \tag{23}$$
$$e^{21} = \frac{\partial u^1}{\partial z} + \frac{\partial \overline{u^1}}{\partial \bar z}, \ \omega^{21} = \frac{\partial u^1}{\partial z} - \frac{\partial \overline{u^1}}{\partial \bar z};$$
$$u^1\Big|_{L_u} = h^1(s), \quad P^{21}\frac{dz}{ds} - P^{11}\frac{d\bar z}{ds}\Big|_{L_p} = 2ip^1(s). \tag{24}$$

Здесь из двух комплексно-сопряженных равенств выписано одно.

Из (23) следует, что гидростатическое давление и деформации определяются одними напряжениями

$$q = -\frac{1}{2}P^{21}, \quad 2\mu\varepsilon^{11} = 2\mu\overline{\varepsilon^{22}} = P^{11}, \quad \varepsilon^{21} = 0, \tag{25}$$

а градиенты перемещений — напряжениями и поворотом

$$2\mu\frac{\partial u^1}{\partial z} = \mu\omega^{21}\Big(1 - \frac{1}{4}\omega^{21}\Big), \quad 2\mu\frac{\partial u^1}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}P^{11}. \tag{26}$$

Условие совместности системы (26) дает уравнение совместности напряжений и поворота. Вместе с уравнением равновесия (первым равенством (23)) и силовым условием (24) на всем контуре оно составляет краевую задачу для напряжений и поворота — комплексную форму задачи (19), (20):

$$\frac{\partial P^{11}}{\partial z} = 2\mu \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left[\omega^{21}\left(1 - \frac{1}{4}\omega^{21}\right)\right], \quad \frac{\partial P^{11}}{\partial z} + \frac{\partial P^{21}}{\partial \bar{z}} = 0; \tag{27}$$

$$P^{21}\frac{dz}{ds} - P^{11}\frac{d\bar{z}}{ds}\bigg|_L = 2ip^1(s). \tag{28}$$

Система (27) допускает полное интегрирование и представление напряжений и поворота через потенциалы, а условие (28) приводит к краевой задаче для потенциалов. Действительно, из (27) после исключения P^{11} следует равенство

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left[P^{21} + 2\mu\omega^{21}\left(1 - \frac{1}{4}\,\omega^{21}\right)\right] = 0,$$

которое после интегрирования дает соотношение $P^{21} + 2\mu\omega^{21}(1 - (1/4)\,\omega^{21}) = 4\varphi'(z)$, где $\varphi'(z)$ — произвольная функция — комплексный потенциал. Отделяя в нем действительную и мнимую часть, получим формулы $P^{21} - (\mu/2)\,(\omega^{21})^2 = 2(\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)})$, $2\mu\omega^{21} = 2(\varphi'(z) - \overline{\varphi'(z)})$, определяющие вещественное напряжение P^{21} и чисто мнимый поворот ω^{21} в зависимости от комплексного потенциала:

$$P^{21} = 2(\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}) + \frac{1}{2\mu}\,(\varphi'(z) - \overline{\varphi'(z)})^2, \quad \mu\omega^{21} = \varphi'(z) - \overline{\varphi'(z)}. \tag{29}$$

С учетом (29) второе равенство (27) становится уравнением для комплексного напряжения P^{11}

$$\frac{\partial}{\partial z}\left\{P^{11} + 2z\overline{\varphi''(z)} + \frac{1}{\mu}\,\overline{\varphi''(z)}(z\overline{\varphi'(z)} - \varphi(z))\right\} = 0$$

и в результате интегрирования дает для него выражение

$$P^{11} = -2(z\overline{\varphi''(z)} + \overline{\psi'(z)}) - \frac{1}{\mu}\,\overline{\varphi''(z)}(z\overline{\varphi'(z)} - \varphi(z)). \tag{30}$$

Здесь $\psi'(z)$ — произвольная функция — второй комплексный потенциал. Итак, общее решение (29), (30) уравнений (27) представляет напряжения и поворот через комплексные потенциалы нелинейными формулами. Подстановка решения в условие (28) позволяет выразить последнее в форме

$$\frac{d}{ds}\left\{\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} + \frac{1}{4\mu}\left(z\bar{\varphi}'^2(\bar{z}) - 2\varphi(z)\overline{\varphi'(z)} + \int \varphi'^2(z)\,dz\right)\right\}\bigg|_L = ip^1(s)$$

и после интегрирования вдоль контура придать ему вид краевой задачи для потенциалов

$$\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} + \frac{1}{4\mu}\,N(\varphi(z), \overline{\varphi(z)})\Big|_L = g^1(s),$$

$$N(\varphi(z), \overline{\varphi(z)}) = z\bar{\varphi}'^2(\bar{z}) - 2\varphi(z)\overline{\varphi'(z)} + \int \varphi'^2(z)\,dz, \tag{31}$$

$$g^1(s) = i\int_0^s p^1(s)\,ds + C, \quad C = \mathrm{const}.$$

Таким образом, плоская задача для напряжений и поворота для несжимаемого материала в геометрически нелинейной модели упругости сводится к нелинейной краевой задаче для комплексных потенциалов. Найденным потенциалам отвечают комплексные напряжения и поворот, а последним — действительные напряжения и поворот, определяемые по обращенным формулам (22).

Заметим, что приведение задачи (27), (28) к задаче для потенциалов (31) можно реализовать и другим способом. С помощью введения вещественной функции напряжений $U(z, z)$ формулами

$$P^{11} = \overline{P^{22}} = -4\,\frac{\partial^2 U}{\partial \bar z^2}, \quad P^{21} = P^{12} = 4\,\frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial \bar z} \tag{32}$$

она сводится к краевой задаче для U и ω^{21}:

$$\frac{\partial}{\partial \bar z}\Big[4\,\frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial \bar z} + 2\mu\omega^{21}\Big(1 - \frac{1}{4}\omega^{21}\Big)\Big] = 0, \quad 2\,\frac{\partial U}{\partial \bar z}\Big|_L = g^1(s), \tag{33}$$

а последняя — к задаче для потенциалов. Действительно, интегрирование уравнения (33) приводит к соотношению

$$4\,\frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial \bar z} + 2\mu\omega^{21}(1 - \frac{1}{4}\omega^{21}) = 4\varphi'(z)$$

($\varphi'(z)$ — произвольная функция) и после отделения в нем действительной и мнимой части дает

$$4\,\frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial \bar z} - \frac{\mu}{2}\,(\omega^{21})^2 = 2(\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}), \quad \mu\omega^{21} = \varphi'(z) - \overline{\varphi'(z)}. \tag{34}$$

Полученная формула для поворота совпадает с (29). С учетом этого выражения первое равенство (34) превращается в уравнение

$$2\,\frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial z} = \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} + \frac{1}{4\mu}\,(\varphi'^2(z) - 2\varphi'(z)\overline{\varphi'(z)} + \bar\varphi'^2(\bar z))$$

и в результате интегрирования с учетом вещественности U дает для функции напряжений нелинейное представление через комплексные потенциалы $\varphi(z)$, $\psi(z)$:

$$2U = \bar z\varphi(z) + z\overline{\varphi(z)} + \int \psi(z)\,dz + \overline{\int \psi(z)\,dz} +$$
$$+ \frac{1}{4\mu}\Big(\bar z \int \varphi'^2(z)\,dz + z\overline{\int \varphi'^2(z)\,dz} - 2\varphi(z)\overline{\varphi(z)}\Big). \tag{35}$$

Теперь легко видеть, что из (32) и (35) следуют выражения через потенциалы напряжений (29), (30), а из (35) и условия (33) — краевая задача для потенциалов (31).

Используя представления через потенциалы напряжений и поворота, можем рассматривать соотношения (26) в качестве уравнений для перемещения. Условие их совместности выполнено — это первое из уравнений (27), поэтому дифференциал перемещения имеет вид

$$d(2\mu u^1) = \mu\omega^{21}\Big(1 - \frac{1}{4}\,\omega^{21}\Big)\,dz + \frac{1}{2}\,P^{11}d\bar z = d\Big[\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} - \frac{1}{4\mu}\,N(\varphi(z), \overline{\varphi(z)})\Big],$$

где N определено формулой (31). Отсюда следует, что само перемещение представляется через потенциалы нелинейным выражением

$$2\mu u^1 = \varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} - \frac{1}{4\mu}\,N(\varphi(z), \overline{\varphi(z)}) + \mathrm{const}. \tag{36}$$

Содержащаяся в нем аддитивная постоянная соответствует трансляции тела как жесткого целого; она несущественна и может быть отброшена.

Наконец, соотношения (25) и (29) позволяют представить через потенциалы также и гидростатическое давление

$$q = -(\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}) - \frac{1}{4\mu}(\varphi'(z) - \overline{\varphi'(z)})^2. \tag{37}$$

Сопоставление выражений (29), (30), (36) и (31) для напряжений, поворота, перемещения и краевого условия для потенциалов несжимаемых материалов с соответствующими выражениями, полученными в [5] для сжимаемых материалов в той же нелинейной модели и при тех же краевых условиях:

$$P^{11} = -2(z\overline{\varphi''(z)} + \overline{\psi'(z)}) - 2\frac{1-\nu}{\mu}\overline{\varphi''(z)}(z\overline{\varphi'(z)} - \varphi(z)),$$

$$P^{21} = 2(\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}) + \frac{1-\nu}{\mu}(\varphi'(z) - \overline{\varphi'(z)})^2, \quad \mu\omega^{21} = 2(1-\nu)(\varphi'(z) - \overline{\varphi'(z)}),$$

$$2\mu u^1 = (3-4\nu)\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} - \frac{1-\nu}{2\mu}N(\varphi(z), \overline{\varphi(z)}),$$

$$\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} + \frac{1-\nu}{2\mu}N(\varphi(z), \overline{\varphi(z)})\Big|_L = g^1(s)$$

(ν — коэффициент Пуассона), показывает, что первые вытекают из вторых при $\nu = 1/2$. Это обстоятельство позволяет рассматривать несжимаемый нелинейный материал в качестве предельного сжимаемого нелинейного материала, для которого коэффициент Пуассона равен половине.

Как установлено в [5], при слабых (по сравнению с μ) нагрузках формулы линейной упругости вытекают из формул нелинейной теории после пренебрежения в последних нелинейными членами. Применяя этот метод к (29)–(31), (36) и (37), получим соотношения линейного несжимаемого материала в виде

$$P^{11} = -2(z\overline{\varphi''(z)} + \overline{\psi'(z)}), \quad P^{21} = 2(\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}), \quad \mu\omega^{21} = \varphi'(z) - \overline{\varphi'(z)},$$

$$2\mu u^1 = \varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}, \quad q = -\varphi'(z) - \overline{\varphi'(z)}, \quad \varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}\Big|_L = g^1(s).$$

Если на всей границе тела задан вектор перемещений либо напряжений, то краевая задача для потенциалов имеет вид одного из комплексных условий

$$\begin{aligned} &\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} - (1/4\mu)\,N(\varphi(z), \overline{\varphi(z)})\Big|_L = 2\mu h^1(s), \\ &\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} + (1/4\mu)\,N(\varphi(z), \overline{\varphi(z)})\Big|_L = g^1(s). \end{aligned} \tag{38}$$

Эти задачи однотипны и нелинейны. В ряде случаев можно находить приближенное решение методом разложения по малому параметру.

Рассмотрим задачу в напряжениях в условиях слабых нагрузок, когда характерное напряжение P_0 мало в сравнении с модулем сдвига μ. Тогда безразмерное напряжение $\sigma = P_0/\mu$ будет малым параметром ($\sigma \ll 1$). Разлагая по нему комплексные потенциалы

$$\varphi(z) = \sum_0^\infty \sigma^\nu \varphi_\nu(z), \quad \psi(z) = \sum_0^\infty \sigma^\nu \psi_\nu(z) \tag{39}$$

и подставляя их во второе условие (38), найдем, что оно сводится к последовательности краевых задач для составляющих потенциалов φ_ν, ψ_ν:

$$\varphi_\nu(z) + z\overline{\varphi'_\nu(z)} + \overline{\psi_\nu(z)}\Big|_L = v_\nu \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots). \tag{40}$$

Здесь $v_0 = g^1$; $v_{\nu+1} = -(1/4P_0)\,N_\nu$;

$$N_0 = z\bar\varphi_0'^2 - 2\varphi_0\bar\varphi_0' + \int \varphi_0'^2\,dz;$$

$$N_1 = 2\Big(z\bar\varphi_0'\bar\varphi_1' - \varphi_0\bar\varphi_1' - \varphi_1\bar\varphi_0' + \int \varphi_0'\varphi_1'\,dz\Big);$$

$$N_2 = z(\bar\varphi_1'^2 + 2\bar\varphi_0'\bar\varphi_2') - 2(\varphi_0\bar\varphi_2' + \varphi_1\bar\varphi_1' + \varphi_2\bar\varphi_0') + \int (\varphi_1'^2 + 2\varphi_0'\varphi_2')\,dz;$$

$$\ldots$$

нулевое приближение отвечает соответствующей задаче линейной упругости. В задаче для ν-го приближения правая часть краевого условия определена предыдущими приближениями и тем самым известна. Таким образом, каждая пара потенциалов φ_ν, $\bar\psi_\nu$, согласно (40), находится из краевой задачи линейной упругости, методы решения которой известны [7].

Подстановка разложений (39) в формулы (29), (30), (36) и (37) определяет разложения по параметрам напряжений, поворота, перемещения и давления:

$$P^{11} = \sum_0^\infty \sigma^\nu P^{11}_\nu,\ P^{21} = \sum_0^\infty \sigma^\nu P^{21}_\nu,\ \mu\omega^{21} = \mu\sum_0^\infty \sigma^\nu \omega^{21}_\nu,\ 2\mu u^1 = 2\mu\sum_0^\infty \sigma^\nu u^1_\nu,\ q = \sum_0^\infty \sigma^\nu q_\nu.$$

Здесь нулевое приближение определяется потенциалами линейной упругости, а ν-е приближение — ν-ми и всеми предыдущими составляющими потенциалами.

При задании на границе тела других, чем в (38), величин можно получить для потенциалов линейные задачи. Рассмотрим два случая.

Пусть на всей границе заданы перемещение и напряжение $h_x(s)$ и $p_x(s)$ (а значит, и $g_x = \int p_x(s)\,ds$), а также перемещение h_y^0 в граничной точке O. Тогда потенциалы должны находиться из двух вещественных условий:

$$\mathrm{Re}\Big\{\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} + \frac{1}{4\mu}N(\varphi,\bar\varphi)\Big\}\Big|_L = g_x(s),$$

$$\mathrm{Re}\Big\{\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} - \frac{1}{4\mu}N(\varphi,\bar\varphi)\Big\}\Big|_L = 2\mu h_x(s),$$

которым можно придать вид задач Дирихле для каждого из потенциалов:

$$\mathrm{Re}\,\varphi(z)\Big|_L = k(s),\quad \mathrm{Re}\,\psi(z)\Big|_L = l(s), \tag{41}$$

где $k = (1/2)g_x + \mu h_x$; $l = g_x - \mathrm{Re}\,\{\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + (1/4\mu)N(\varphi,\bar\varphi)\}\big|_L$.

Последовательное решение данных задач (при котором решение первой определяет правую часть выражения второй) дает значение потенциалов $\varphi(z)$, $\psi(z)$ с точностью до аддитивных постоянных соответственно iA_y и iB_y [9]. Постоянная B_y не сказывается на напряжениях и повороте, а в перемещение входит аддитивно; она несущественна и может быть принята равной нулю. Постоянная A_y существенна; она устанавливается условием $\mathrm{Im}\,u^1(z_0,\bar z_0) = h_y^0$ в точке O.

Если на всей границе задан поворот $\omega_{xy}(s)$, напряжение $p_x(s)$ и величины h_x^0, p_y^0 в точке O границы, то, согласно (29), потенциал $i\varphi'(z)$ определяется из задачи Дирихле

$$\mathrm{Re}\,(i\varphi'(z))\Big|_L = -\mu\omega_{xy}(s) \tag{42}$$

с точностью до постоянной iA_y, а $\varphi(z)$ (вычисляемый квадратурой) — до постоянных A_y и $C = C_x + iC_y$. Потенциал $\psi(z)$ находится из второго условия (41) с точностью до несущественной постоянной. Фигурирующие в потенциалах константы определяются из условий

$$\mathrm{Re}\,\varphi(z_0) = \frac{1}{2} g_x^0 + \mu h_x^0, \quad P^{21}(z_0, \bar{z}_0)\left(\frac{dz}{ds}\right)_0 - P^{11}(z_0, \bar{z}_0)\left(\frac{d\bar{z}}{ds}\right)_0 = 2i(p_x^0 + ip_y^0).$$

Заметим, что в случае односвязной области ее можно конформно отобразить на внутренность круга единичного радиуса. Тогда задачи Дирихле (41) и (42) будут формулироваться на его окружности, и их решения можно представить формулой Шварца [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Новожилов В. В.** Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958.
2. **Снеддон И. Н., Берри П. С.** Классическая теория упругости. М.: Физматгиз, 1961.
3. **Murnaghan F. D.** Finite deformations of an elastic solid // Amer. J. Math. 1937. V. 59, N 2. P. 235–260.
4. **Годунов С. К.** Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978.
5. **Бондарь В. Д.** Плоская деформация в геометрически нелинейной упругости // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 1. С. 99–114.
6. **Седов Л. И.** Введение в механику сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962.
7. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
8. **Петровский И. Г.** Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Физматгиз, 1961.
9. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.

Поступила в редакцию 30/X 1995 г.