

УДК 532.596

**ВЛИЯНИЕ ТРЕЩИНЫ В ПЛАВАЮЩЕЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНКЕ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИЗГИБНО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН**

*А. Е. Букатов, Д. Д. Завьялов*

*Морской гидрофизический институт НАН Украины,  
335000 Севастополь*

Выполнен анализ влияния трещины в плавающей упругой пластинке на распространение поверхностных изгибно-гравитационных волн в бассейне конечной глубины. С учетом вклада прикромочных мод в формирование волновых возмущений исследованы зависимости распределений амплитудных коэффициентов отражения и прохождения по периоду колебаний от характеристик пластинки, силы продольного сжатия и глубины бассейна. Набегание волн на кромку ледяной пластинки рассмотрено в [1–3]. Контактным условиям на трещине и применению их к решению задачи об отражении волн на глубокой воде посвящена работа [4].

1. Пусть на поверхности бассейна постоянной конечной глубины  $H$  плавают две полубесконечные упругие пластинки, моделирующие, в частности, ледяной покров с трещиной. Рассмотрим влияние трещины на поверхностные изгибно-гравитационные волны, распространяющиеся по нормали к ней. Движение жидкости будем считать потенциальным. Выберем начало координат на дне бассейна, направив ось  $z$  вертикально вверх. Слева ( $x < 0$ ) и справа ( $x > 0$ ) от вертикальной оси расположены области воды, покрытые пластинками толщиной  $h_1$  и  $h_2$  соответственно. Потенциалы скорости движения жидкости в этих областях обозначим через  $\Phi_1(x, z, t) = \varphi_1(x, z)e^{i\omega t}$  и  $\Phi_2(x, z, t) = \varphi_2(x, z)e^{i\omega t}$  ( $\omega$  — заданная частота падающей из области  $x < 0$  волны).

Рассмотрим зависимость распределений амплитудных коэффициентов отражения и прохождения возмущений по периоду набегающей волны от глубины бассейна, характеристик пластинки и сжимающего усилия.

В выбранной системе координат задача сводится к решению уравнений Лапласа

$$\Delta\varphi_j = 0 \tag{1.1}$$

с граничными условиями на поверхности бассейна ( $z = H$ )

$$d_j \frac{\partial^5 \varphi_j}{\partial z \partial x^4} - q_j \frac{\partial^3 \varphi_j}{\partial z \partial x^2} + (1 - \alpha_j \omega^2) \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} \varphi_j = 0 \tag{1.2}$$

и на дне ( $z = 0$ )

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial z} = 0, \tag{1.3}$$

где

$$d_j = \frac{E_j h_j^3}{12 \rho g (1 - \nu_j^2)}; \quad \alpha_j = \frac{\rho_j h_j}{\rho g}; \quad q_j = \frac{q_{1j}}{\rho g}; \quad j = \begin{cases} 1, & -\infty < x < 0, \\ 2, & 0 < x < +\infty; \end{cases}$$

$E_j, h_j, \rho_j, \nu_j$  — модуль нормальной упругости, толщина, плотность, коэффициент Пуассона пластинки;  $q_{1j}$  — сжимающее усилие;  $\rho$  — плот-

ность воды. Кроме того, на границе контакта областей удовлетворим условиям непрерывности потенциалов и скоростей горизонтальных волновых течений:

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, \quad 0 < z < H, \quad x = 0, \quad (1.4)$$

а на кромках пластинки — условиям свободного края, заключающимся в равенстве нулю изгибающего момента и перерезывающей силы [4]:

$$\frac{\partial^3 \varphi_j}{\partial z \partial x^2} = \frac{\partial^4 \varphi_j}{\partial z \partial x^3} = 0. \quad (1.5)$$

Применяя метод разделения переменных к (1.1)–(1.3), получим дисперсионные соотношения

$$\omega^2 = \frac{(d_j r_j^4 - q_j r_j^2 + 1) r_j g \operatorname{th}(r_j H)}{1 + \alpha_j r_j g \operatorname{th}(r_j H)}, \quad (1.6)$$

связывающие фазовые характеристики волновых возмущений в областях  $x < 0$  и  $x > 0$  соответственно. Решением уравнений (1.6) являются четыре действительных корня  $\pm r_j$ , четыре пары комплексно-сопряженных  $\beta_j \pm i\alpha_j$ ,  $-\beta_j \pm i\alpha_j$  и счетные множества мнимых  $\pm i r_{jn}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) корней. Учитывая ограниченность потенциалов  $\varphi_1$  при  $x \rightarrow \infty$ ,  $\varphi_2$  при  $x \rightarrow -\infty$  и отсутствие набегающей на трещину незатухающей волны из области  $x > 0$ , запишем

$$\begin{aligned} \varphi_1 = & I e^{-i r_1 x} \operatorname{ch}(r_1 z) + R_* e^{i r_1 x} \operatorname{ch}(r_1 z) + K_1 e^{+(\alpha_1 + i \beta_1)x} \cos[(\alpha_1 + i \beta_1)z] + \\ & + R_2 e^{+(\alpha_1 - i \beta_1)x} \cos[(\alpha_1 - i \beta_1)z] + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{r_1 n x} \cos(r_1 n z); \quad (1.7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2 = & T_* e^{-i r_2 x} \operatorname{ch}(r_2 z) + T_1 e^{-(\alpha_2 + i \beta_2)x} \cos[(\alpha_2 + i \beta_2)z] + \\ & + T_2 e^{-(\alpha_2 - i \beta_2)x} \cos[(\alpha_2 - i \beta_2)z] + \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-r_2 n x} \cos(r_2 n z). \quad (1.8) \end{aligned}$$

Все амплитудные коэффициенты потенциалов  $\varphi_1, \varphi_2$  комплексные. Из них  $I, R_*, T_*$  представляют падающую, отраженную и прошедшую незатухающие прогрессивные волны, характеризуемые корнями  $-r_1, r_1$  и  $-r_2$  соответствующих дисперсионных уравнений. Коэффициенты  $R_{1,2}$  и  $T_{1,2}$  отвечают затухающим прогрессивным волнам, обусловленным изгибной жесткостью пластинки. Их определяют корни  $\pm \beta_1 - i\alpha_1$  и  $\pm \beta_2 + i\alpha_2$  уравнений (1.6). Прикромочные волны [2, 3], существующие по обе стороны от трещины и экспоненциально затухающие с удалением от нее, представлены корнями  $r_{jn}$  уравнений (1.6) и коэффициентами  $A_n, B_n$  в областях  $x < 0$  и  $x > 0$  соответственно.

2. Рассмотрим проблему сшивки потенциалов и их производных как вариационную. Тогда задача нахождения потенциалов скоростей (1.7), (1.8) сводится к минимизации функционала ошибок при сшивке с заданными условиями (1.4), (1.5). Для перехода к поиску безусловного экстремума

запишем функционал ошибок [3] в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \delta \int_0^H |\varphi_1 - \varphi_2|^2 dz + \mu \int_0^H \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right|^2 dz + \\ & + \gamma \sum_{j=1}^2 \left\{ \left( \frac{\partial^3 \varphi_j}{\partial z \partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^4 \varphi_j}{\partial z \partial x^3} \right)^2 \right\}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $\delta, \mu, \gamma$  — неизвестные множители Лагранжа. После подстановки (1.7), (1.8) в (2.1) и вычисления имеющихся там интегралов функционал ошибок примет матричный вид

$$\varepsilon = \mathbf{c}^T (\delta \mathbf{Q}_p + \mu \mathbf{Q}_d + \gamma \mathbf{Q}_e) \mathbf{c}. \quad (2.2)$$

Здесь  $\mathbf{c}$  — вектор-столбец реальных и мнимых частей искомых коэффициентов; матрицы  $\mathbf{Q}_p, \mathbf{Q}_d$  и  $\mathbf{Q}_e$  характеризуют соответственно невязки при склейке потенциалов, их производных и при выполнении условий свободного края на кромках по обе стороны от трещины; индекс  $t$  означает транспонирование.

Примем амплитуду потенциала падающей волны за единицу, исключая тем самым тривиальное решение задачи. Это предположение эквивалентно решению матричного уравнения

$$\mathbf{c}^T \mathbf{K} \mathbf{c} - 2\mathbf{v}^T \mathbf{c} + \mathbf{v}^T \mathbf{v} = 0, \quad (2.3)$$

где  $\mathbf{v}$  — вектор, элементы которого расставлены так, что амплитуде  $I$  соответствует единица, а остальным коэффициентам — нули;  $\mathbf{K}$  — квадратичная матрица, для которой

$$\mathbf{K} \mathbf{c} = \mathbf{v}. \quad (2.4)$$

Уравнение (2.3) является дополнительным условием (2.2), и окончательно функционал ошибок запишем как

$$\mathbf{c}^T (\delta \mathbf{Q}_p + \mu \mathbf{Q}_d + \gamma \mathbf{Q}_e + \eta \mathbf{K}) \mathbf{c} - 2\eta \mathbf{v}^T \mathbf{c} \quad (2.5)$$

( $\eta$  — дополнительный множитель Лагранжа). Минимизация функционала (2.5) равнозначна [5] решению матричного уравнения

$$(\delta \mathbf{Q}_p + \mu \mathbf{Q}_d + \gamma \mathbf{Q}_e + \eta \mathbf{K}) \mathbf{c} = \eta \mathbf{v}. \quad (2.6)$$

Так как  $\mathbf{Q} = (\delta \mathbf{Q}_p + \mu \mathbf{Q}_d + \gamma \mathbf{Q}_e + \eta \mathbf{K})$  является слабообусловленной разреженной матрицей, применение прямых методов решения линейных систем уравнений к (2.6) может привести к чрезмерным вычислительным затратам [6] и в данном случае неэффективно. Наиболее целесообразно использовать итерационные методы, в частности метод сопряженных градиентов. Итерационный процесс можно представить в виде [7]

$$\mathbf{c}^{(i+1)} = \mathbf{G} \mathbf{c}^{(i)} + \mathbf{F}, \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Здесь действительная матрица перехода  $\mathbf{G}$  для невырожденной матрицы расщепления  $\mathbf{S}$  имеет вид  $\mathbf{G} = \mathbf{E} - \mathbf{S}^{-1} \mathbf{Q}$  ( $\mathbf{E}$  — единичная матрица, а  $\mathbf{F} = \mathbf{S}^{-1} \eta \mathbf{v}$ ). Хотя матрица  $\mathbf{Q}$  симметричная, положительно-определенная и метод сопряженных градиентов в точной арифметике должен сходиться к истинному решению уравнения (2.4) за конечное число итераций, ошибки округления нарушают указанное свойство. Оценить скорость сходимости позволяет неравенство [6]

$$\|\mathbf{c}^{(i)} - \mathbf{c}\|_2 \leq 2 \sqrt{\sigma} M^{(i)} \|\mathbf{c}^{(0)} - \mathbf{c}\|_2,$$

где  $\sigma = \|\mathbf{Q}\|_2 \cdot \|\mathbf{Q}^{-1}\|_2$  — спектральное число обусловленности матрицы  $\mathbf{Q}$ ;  $M = (\sqrt{\sigma} - 1)/(\sqrt{\sigma} + 1)$ . Заметим, что, чем больше  $\sigma$  (чем хуже обусловленность  $\mathbf{Q}$ ), тем сильнее замедлится скорость сходимости. Поэтому метод сопряженных градиентов всегда используют с той или иной формой предобусловливания. Процедура сводится [7] к построению новой линейной системы

$$\mathbf{W}(\mathbf{E} - \mathbf{G})\mathbf{c} = \mathbf{W}\mathbf{F} \quad (2.7)$$

( $\mathbf{W}$  — матрица симметризации), обладающей тем же решением, что и исходная система (2.6), а матрица коэффициентов новой системы  $\mathbf{W}(\mathbf{E} - \mathbf{G})\mathbf{W}^{-1}$  будет симметричной, положительно-определенной и в общем случае обладает меньшим спектральным числом обусловленности, чем матрица коэффициентов  $\mathbf{Q}$  исходной системы. Однако минимизация величины  $\sigma$  не является единственной целью предобусловливания. Необходимо учитывать более широкий спектр свойств матрицы  $\mathbf{W}(\mathbf{E} - \mathbf{G})\mathbf{W}^{-1}$  [6]. Кроме того, если обусловленность матрицы коэффициентов переобусловленной системы  $\sigma = 1$ , то переобусловленная система линейных уравнений (2.7) тождественна исходной (2.6).

В качестве матрицы симметризации  $\mathbf{W}$  была выбрана диагональная матрица с элементами  $\mathbf{Q}_p(k, k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , а матрицы расщепления  $\mathbf{S} = \mathbf{W}^*\mathbf{W}$ . Выбор множителей Лагранжа  $\delta, \mu, \gamma, \eta$  для оптимизации сходимости задавался аналогично [3]. Количество  $n$  суммируемых прикромочных затухающих мод при численных расчетах выбиралось из условия удовлетворения заданной точности соблюдения баланса плотности потоков энергии через замкнутую поверхность, ограничивающую выделенный объем жидкости. Объем ограничен частью поверхности бассейна, участком непроницаемого дна и вертикальными границами, равноудаленными от трещины. Учет плотности потока энергии  $J$  в упругой равномерно сжатой пластинке при ее изгибных колебаниях с амплитудой  $\xi$  осуществлялся [4] по формуле

$$J = \rho g \left[ d_j \left( \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3} \frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial t} \right) - q_j \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial t} \right].$$

3. Количественная оценка зависимости распределений амплитудных коэффициентов отражения  $R$  и прохождения  $T$ , отнесенных к амплитуде падающей волны, по периоду  $\tau$  колебаний от характеристик пластинки и глубины бассейна проведена для случая ледяной пластинки при  $\rho = 1025 \text{ кг/м}^3$ ,  $\rho_{1,2} = 870 \text{ кг/м}^3$ ,  $\nu_{1,2} = 0,3$ ,  $h_1 \leq h_2$ . Толщина льда  $h_j = 0 \div 2 \text{ м}$ , модуль его упругости  $E_j = 3 \cdot 10^7 \div 3 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$ , величина  $q_j = 0 \div 1,3\sqrt{d_j} \text{ м}^2$  (характеризует степень ледового сжатия) и глубина бассейна  $H = 10 \div 50 \text{ м}$ . Рассматривались волны с периодами  $\tau$  до 20 с.

Величины  $R$  и  $T$  определялись через потенциалы скоростей (1.7), (1.8) из условия неотрывности колебаний на поверхности бассейна, заключающегося в равенстве вертикальных составляющих скорости жидкости и скорости вертикального смещения ледяной пластины по обе стороны от трещины. Некоторые из результатов расчетов, наглядно иллюстрирующих возможные проявления характерных особенностей волновых режимов, изображены графически на рис. 1–6. Анализ результатов расчетов показал, что пренебрежение прикромочными затухающими модами, исключающее возможность сшивки потенциалов  $\varphi_1, \varphi_2$  и горизонтальных составляющих скоростей  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}$  и  $\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}$  по всей глубине жидкости под трещиной ( $x = 0$ ), не в полной мере отражает физическую сущность изучаемого явления. Особенно ярко это видно в диапазонах малых ( $\tau < 5 \text{ с}$ ) и средних ( $5 \text{ с} < \tau < 15 \text{ с}$ ) периодов.

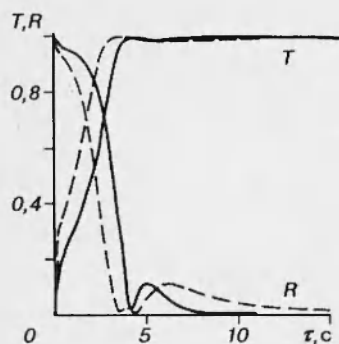


Рис. 1

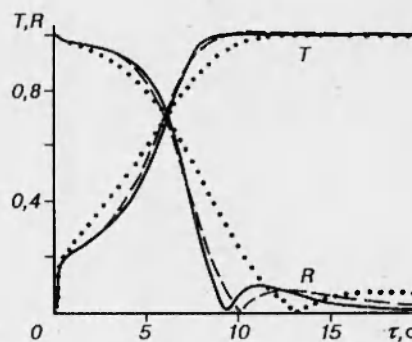


Рис. 2

На малых периодах имеют место существенное занижение  $R$  и завышение  $T$ , которые могут достигать порядка 50 %. Это видно из сопоставления графиков на рис. 1 для  $H = 25$  м,  $h_1 = h_2 = 1$  м,  $q_1 = q_2 = 0$ ,  $E = 3 \cdot 10^9$  Н/м<sup>3</sup> (сплошные линии соответствуют сшивке по всей глубине, а штриховые — только на поверхности бассейна). В диапазоне средних периодов различия в сшивках потенциалов и горизонтальных скоростей при  $x = 0$ , слабо сказываясь на коэффициенте  $T$ , могут как уменьшить (на мелкой воде), так и увеличить (на глубокой) значение  $R$ .

Зависимости распределения  $R$  и  $T$  по периоду колебаний от глубины бассейна, толщины льда, его жесткости и степени ледового сжатия приведены графически для  $h = 2$  м (рис. 2, 4),  $q = 0$  (рис. 2–4),  $H = 50$  м (рис. 3),  $H = 25$  м (рис. 4, 5),  $h = 1$  м (рис. 5). Они получены для одинаковых ледовых условий по обе стороны от трещины при модуле упругости льда  $E = 3 \cdot 10^9$  Н/м<sup>3</sup> (кроме рис. 4). Пунктирные, штриховые и сплошные линии отвечают глубинам 10; 25; 50 м (рис. 2), толщинам льда 0,5; 1; 2 м (рис. 3),  $E = 3 \cdot 10^7$ ;  $3 \cdot 10^8$ ;  $3 \cdot 10^9$  Н/м<sup>3</sup> (рис. 4) и  $q_j = 0$ ;  $\sqrt{d_j}$ ;  $1,3\sqrt{d_j}$  (рис. 5).

Результаты расчетов показали, что для фиксированной толщины льда существует период  $\tau_*$ , при котором  $R = T = 1/\sqrt{2}$ . Он практически не зависит от глубины бассейна и определяется исключительно параметрами пластинки. Значение  $\tau_*$  растет с увеличением упругости и толщины льда, что видно из сопоставления графиков на рис. 2–4. Кроме того, при определенных условиях может существовать период  $\tau_0$  полного прохождения волн средней длины через трещину в ледяном покрове постоянной толщины, значение  $\tau_0$  смещается в сторону меньших периодов с ростом глубины бассейна. При  $\tau_0 < \tau < \infty$  функция  $T(\tau)$  имеет минимум, величина которого близка к единице. Период полного прохождения убывает с уменьшением цилиндрической жесткости льда.

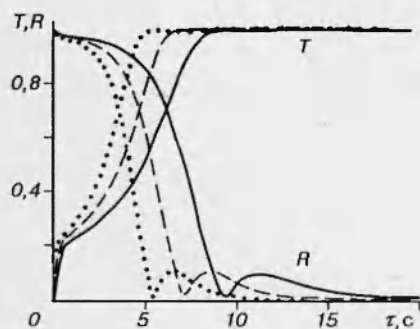


Рис. 3

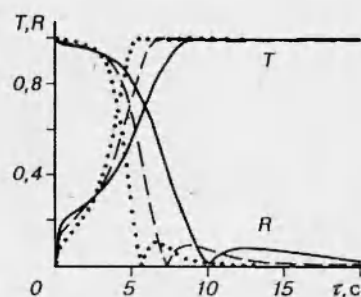


Рис. 4

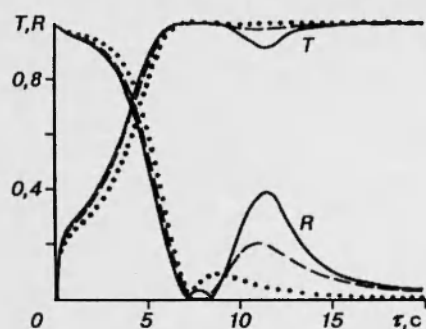


Рис. 5

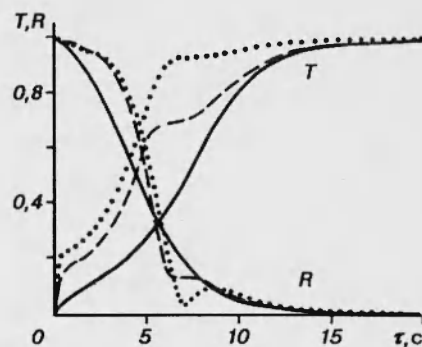


Рис. 6

Амплитудный коэффициент прохождения  $T$  (отражения  $R$ ) на периодах  $\tau < \tau_*$  убывает (возрастает), а при  $\tau > \tau_*$  возрастает (убывает) с увеличением глубины  $H$ . Рост толщины льда приводит к уменьшению  $T$  и увеличению  $R$ . Увеличение степени ледового сжатия в рассматриваемом диапазоне усиливает (ослабляет) коэффициент прохождения (отражения) на периодах  $\tau < \tau_0$ . Если  $\tau > \tau_0$ , то направленность влияния сжатия на  $R$  и  $T$  меняется, существенно проявляясь в ограниченном интервале периодов (рис. 5). Кроме того, в условиях сжатия полное отражение может происходить на двух различных периодах.

Уменьшение толщины льда в области, из которой на трещину набегает прогрессивная волна, приближает картину возмущений к формируемой в случае набегания волн на кромку со стороны открытой воды [3]. Иллюстрацией зависимости коэффициентов прохождения и отражения от изменения  $h_1$  являются графики на рис. 6 при  $h_2 = 1$  м,  $q_1 = q_2 = 0$ ,  $E = 3 \cdot 10^9$  Н/м<sup>3</sup> и  $H = 25$  м (сплошные, штриховые и пунктирные линии соответствуют  $h_1 = 0,1; 0,6; 0,9$  м).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Weitz M., Keller J. B. Reflection of water waves from floating ice in water of finite depth // Comm. Pure and Appl. Math. 1950. V. 3. P. 305–318.
2. Хейсин Д. Е. Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеоздат, 1967.
3. Fox C., Squire V. A. Reflection and transmission characteristics at the edge of shore fast sea ice // J. Geophys. Res., C. 1990. V. 95, N 7. P. 11629–11639.
4. Красильников В. Н. О решении некоторых гранично-контактных задач линейной гидродинамики // Прикл. математика и механика. 1967. Т. 25, вып. 4. С. 764–768.
5. Зельдович Я. В., Мышкис А. Д. Элементы прикладной математики. М.: Наука, 1967.
6. Ортега Дж. Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем. М.: Мир, 1991.
7. Хейгеман Л., Янг Д. Прикладные итерационные методы. М.: Мир, 1986.

Поступила в редакцию 12/VIII 1994 г.