

МЕТОД РЕШЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО УРАВНЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ ГОРЕНИЯ

А. М. Липанов

Институт прикладной механики УрО РАН, 426001 Ижевск

Излагается метод решения пространственного уравнения поверхности горения. Рассмотрен вариант численного решения задачи и для грибообразной конфигурации приведен пример расчета, когда реализуется аналитическое решение. Показано, что при использовании грибообразных конструктивных элементов зависимость площади поверхности горения от величины сгоревшего свода может быть более сильной, чем кубическая парабола.

В работах [1–3] исследовались различные варианты двумерных уравнений, описывающих перемещение поверхности горения. В общем же случае необходимо рассматривать уравнение [4]

$$\frac{\partial y}{\partial t} = U_T \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}, \quad (1)$$

позволяющее рассчитывать пространственное перемещение поверхности горения. Здесь x, z, y — декартовы координаты; $y = f(t, x, z)$ — поверхность горения в пределах определенной трехмерной области интегрирования G ; $U_T(t, x, y, z)$ — скорость горения (уноса) материала. Начальные и граничные условия для решения уравнения (1) определим позднее при рассмотрении конкретного примера.

Предполагаем, что функция y непрерывна и дифференцируема вместе со своими частными производными (как однонаправленными, так и смешанными) до второго порядка включительно.

Для решения уравнения (1) воспользуемся методом характеристик, позволяющим получить (при определенных условиях) аналитическое решение. Считаем, что скорость горения U_T известна. Обозначим

$$z_1 = \frac{\partial y}{\partial t}, \quad z_2 = \frac{\partial y}{\partial x}, \quad z_3 = \frac{\partial y}{\partial z}. \quad (2)$$

Тогда вместо уравнения (1) запишем

$$z_1 = U_T \sqrt{1 + z_2^2 + z_3^2}. \quad (3)$$

Если перед корнем квадратным использовать знак плюс, то при $U_T > 0$ величина z_1 будет отличной от нуля и положительной. Возведем в квадрат левую и правую части уравнения (3):

$$z_1^2 = U_T^2 (1 + z_2^2 + z_3^2). \quad (4)$$

Продифференцируем полученное уравнение по x :

$$z_1 \frac{\partial z_1}{\partial x} = U_T^2 \left(z_2 \frac{\partial z_2}{\partial x} + z_3 \frac{\partial z_3}{\partial x} \right) + U_T \frac{DU_T}{Dx} (1 + z_2^2 + z_3^2), \quad (5)$$

здесь $\frac{DU_T}{Dx} = \frac{\partial U_T}{\partial x} + \frac{\partial U_T}{\partial y} z_2$. Изменение U_T в зависимости от координаты y может быть обусловлено распределением компонентов горячей среды (топлива), а в зависимости от координаты x — распределением параметров около поверхности горения и распределением компонентов горячей среды.

Учитывая принятые выше условия непрерывности и дифференцируемости функции y , запишем

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) = \frac{\partial z_2}{\partial t},$$

$$\frac{\partial z_3}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) = \frac{\partial z_2}{\partial z}.$$

В результате с учетом (4) уравнение (5) принимает вид

$$z_1 \frac{\partial z_2}{\partial t} = U_T^2 \left(z_2 \frac{\partial z_2}{\partial x} + z_3 \frac{\partial z_2}{\partial z} \right) + \frac{z_1^2}{U_T} \frac{DU_T}{Dx}. \quad (6)$$

Разделив на z_1 правую и левую части уравнения (6), получим

$$\frac{\partial z_2}{\partial t} - \frac{U_T^2}{z_1} \left(z_2 \frac{\partial z_2}{\partial x} + z_3 \frac{\partial z_2}{\partial z} \right) = \frac{z_1}{U_T} \frac{DU_T}{Dx}. \quad (7)$$

Поскольку полная производная от z_2 как функции t, x, z имеет следующий вид:

$$\frac{dz_2}{dt} = \frac{\partial z_2}{\partial t} + \frac{\partial z_2}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z_2}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t},$$

левая часть уравнения (7) представляет собой полную производную от z_2 вдоль направлений

$$\frac{dx}{dt} = -U_T^2 \frac{z_2}{z_1}, \quad (8)$$

$$\frac{dz}{dt} = -U_T^2 \frac{z_3}{z_1} \quad (9)$$

и удовлетворяет уравнению

$$\frac{dz_2}{dt} = \frac{z_1}{U_T} \frac{DU_T}{Dx}. \quad (10)$$

Уравнения (8) и (9) определяют характеристическое направление или траекторию, вдоль которой фронт пламени перемещается в пространстве. Это перемещение в соответствии с законом Гюйгенса — Вьеля осуществляется по нормали к поверхности горения.

Продифференцируем теперь уравнение (4) по z :

$$z_1 \frac{\partial z_1}{\partial z} = U_T^2 \left(z_2 \frac{\partial z_2}{\partial z} + z_3 \frac{\partial z_3}{\partial z} \right) + \frac{z_1^2}{U_T} \frac{DU_T}{Dz}, \quad (11)$$

где

$$\frac{DU_T}{Dz} = \frac{\partial U_T}{\partial z} + \frac{\partial U_T}{\partial y} z_3.$$

В отношении градиента $\frac{\partial U_T}{\partial z}$ можно сделать замечание, аналогичное сделанному о $\frac{\partial U_T}{\partial x}$. Поскольку

$$\frac{\partial z_1}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right) = \frac{\partial z_3}{\partial t},$$

$$\frac{\partial z_2}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right) = \frac{\partial z_3}{\partial x},$$

$$z_1 \neq 0$$

уравнение (11) с учетом (4) можно записать в виде

$$\frac{\partial z_3}{\partial t} - \frac{U_T^2}{z_1} \left(z_2 \frac{\partial z_3}{\partial x} + z_3 \frac{\partial z_3}{\partial z} \right) = \frac{z_1}{U_T} \frac{DU_T}{Dz}. \quad (12)$$

Левая часть уравнения (12) (аналогично левой части уравнения (7)) представляет собой полную производную от z_3 вдоль направлений (8), (9), поэтому уравнение (12) перепишем в виде

$$\frac{dz_3}{dt} = \frac{z_1}{U_T} \frac{DU_T}{Dz}. \quad (13)$$

В рассматриваемом трехмерном случае независимыми переменными являются координаты x

и z , а пространственная переменная y — их функция, удовлетворяющая уравнению (1).

Запишем выражение для полной производной переменной y как функции времени и координат x и z :

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dt} + \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dt}.$$

Учитывая соотношения (2), (4), (8), (9), найдем

$$\frac{dy}{dt} = \frac{U_T^2}{z_1}. \quad (14)$$

В результате имеем замкнутую систему пяти квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (8)–(10), (13), (14) для определения неизвестных x , z , z_2 , z_3 , y вдоль траектории (8), (9). Кроме того, имеем дополнительную связь (3) для определения переменной z_1 как функции z_2 и z_3 .

Система квазилинейных уравнений (8)–(10), (13), (14) при заданных начальных и граничных условиях вместе с конечным соотношением (3) позволяет рассчитывать пространственное перемещение поверхности горения как в нестационарных, так и в квазистационарных условиях. Связь скорости горения с физико-химическими процессами в прогретом слое топлива (горящей среды), на его поверхности и в газовой фазе определяется соотношениями из работы [5].

Введем в рассмотрение еще одну неизвестную $e(t, x, z)$ — путь, пройденный фронтом горения (толщина сгоревшего свода), удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial e}{\partial t} = U_T. \quad (15)$$

Поскольку $U_T > 0$, то e является монотонной функцией времени, но не обязательно монотонной функцией пространственных координат.

В качестве примера использования полученных соотношений рассмотрим грибообразную конфигурацию (рис. 1), упомянутую в работе [3] и называемую здесь (для краткости) грибом. Эта конфигурация имеет бронированную (негорящую) наружную поверхность, и только со стороны основания ножки, не находящегося под бронировкой, топливо может гореть.

По мере сгорания топлива при $t > 0$ поверхность горения будет увеличиваться. При этом к центральной оси (рис. 2) будет примыкать поверхность, близкая к плоской. Если для горячей среды справедливы условия

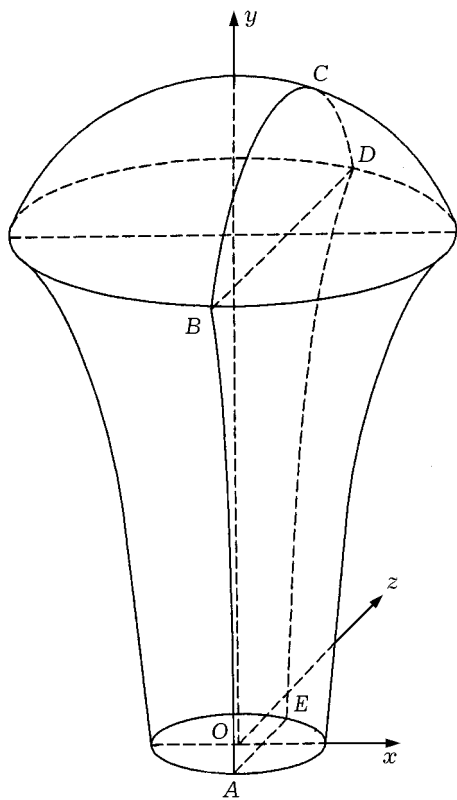


Рис. 1. Объемная конфигурация грибообразной области интегрирования с системой декартовых координат для круглого или эллипсоидального поперечного сечения ножки:

$ABCDE$ — вертикальная плоскость, параллельная оси y и проходящая через нормаль к контуру горизонтального поперечного сечения ножки гриба в точке E , основание ножки плоское, горизонтальное

$$\frac{\partial U_T}{\partial x} = \frac{\partial U_T}{\partial y} = \frac{\partial U_T}{\partial z} = 0,$$

то первоначально плоская поверхность гриба будет сохраняться, а площадь ее будет постоянной (это относится только к основанию ножки гриба). В противном случае первоначально плоская поверхность горения ножки гриба деформируется и превратится в криволинейную. Данную поверхность обозначим буквой D , а ее проекцию на плоскость xOz будем называть областью D (рис. 3, FGH — половина эллипса области D). Между поверхностью D и боковой поверхностью гриба будет формироваться криволинейная поверхность, величина которой будет прогрессивно увеличиваться по мере сгорания топлива. Эту поверхность обозначим буквой E , а ее проекцию на плоскость xOz будем

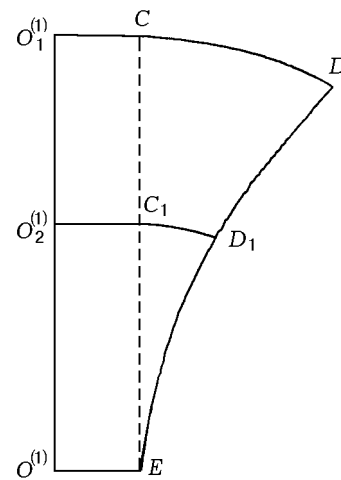


Рис. 2. Вертикальное сечение гриба: половина плоскости $ABCDE$, показанной на рис. 1; CD — часть контура криволинейной поверхности горения, C_1D_1 — промежуточное положение контура поверхности горения

называть плоскостью E (рис. 3, LMN — половина эллипса области E). В рассматриваемом случае для области D уравнения (8)–(10), (13), (14) решаются с начальными условиями

$$z_2 = z_3 = e = 0$$

для каждой пары значений x и z . На боковой поверхности гриба должны быть заданы граничные условия.

В соответствии с законом Гюйгенса — Вьеля поверхность горения будет распространяться в направлении своей местной норма-

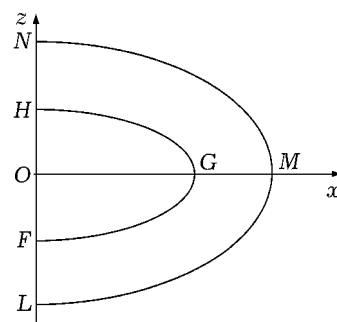


Рис. 3. Проекция поверхности горения на плоскость xOz для эллипсоидального сечения ножки гриба:

FGH — половина площади начальной плоской поверхности горения основания ножки гриба, LMN — половина контура проекции поверхности горения на плоскость xOz

ли так, что вдоль боковой поверхности фронт пламени будет распространяться вдоль кривых, расположенных в вертикальных плоскостях типа плоскости $ABCDE$, показанной на рис. 1, и будет проходить через нормали к контуру основания ножки гриба.

Плоскость $ABCDE$ (см. рис. 1) в общем случае не совпадает с осью симметрии поперечного сечения ножки. И только при совпадении этой плоскости с координатой $x = 0$ она будет проходить и через центр конфигурации, соответствующей поперечному сечению ножки гриба, которое в данной работе считаем совпадающим с эллипсом. Плоскость $ABCDE$ обозначим для краткости буквой N . При пересечении с поверхностью горения она образует кривую BCD , а при пересечении с боковой поверхностью гриба — кривую ED (см. рис. 1). На рис. 2 ей соответствует кривая ED_1D . Касательная к кривой ED_1D в точке D_1 будет совпадать с нормалью к кривой C_1D_1 в точке D_1 . Уравнение касательной к кривой ED_1D запишем в виде

$$\frac{\partial y_{\text{гр}}}{\partial x} dx + \frac{\partial y_{\text{гр}}}{\partial z} dz = dy. \quad (16)$$

Уравнения для нормали к кривой C_1D_1 следующие:

$$\frac{dx}{(z_2)_{\text{гр}}} = \frac{dz}{(z_3)_{\text{гр}}} = -dy. \quad (17)$$

Поскольку касательная к кривой ED_1D и нормаль к кривой C_1D_1 в точке D_1 совпадают, их дифференциалы dx , dy , dz можно приравнять.

Из уравнений (17) получим

$$dx = -(z_2)_{\text{гр}} dy, \quad dz = -(z_3)_{\text{гр}} dy. \quad (18)$$

Подставив эти выражения вместо dx и dz в (16), после сокращения на dy найдем:

$$(z_2)_{\text{гр}} \frac{\partial y_{\text{гр}}}{\partial x} + (z_3)_{\text{гр}} \frac{\partial y_{\text{гр}}}{\partial z} = -1. \quad (19)$$

В то же время из системы уравнений (17) следует

$$\frac{(z_3)_{\text{гр}}}{(z_2)_{\text{гр}}} = \frac{dz}{dx}. \quad (20)$$

Отношение $\frac{dz}{dx}$ в плоскости (z, x) равно тангенсу угла наклона нормали, проходящей через точку E (см. рис. 1). Поскольку дифференциальное уравнение для нормали к контуру эллипса имеет вид

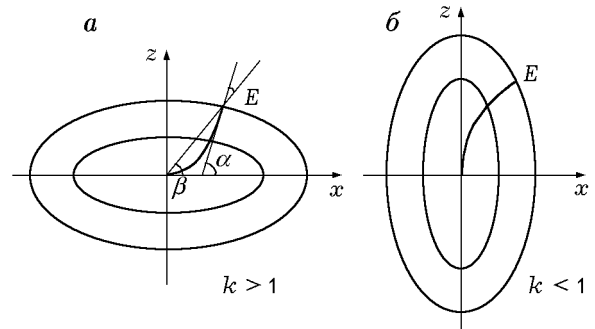


Рис. 4. Кривая нормали к контуру эллипса для различных значений k и a :

α , β — углы наклона нормали и радиуса-вектора к оси x

$$\frac{dz}{dx} = \frac{a^2}{b^2} \frac{z}{x} = k^2 \frac{z}{x} = ka \frac{\sqrt{1 - (x/a)^2}}{x} = \text{tg } \alpha, \quad (21)$$

то

$$(z_3)_{\text{гр}} = (z_2)_{\text{гр}} k^2 \frac{z}{x}, \quad (22)$$

где a , b — полуоси эллипса, относящиеся к координатам x и y соответственно; k — отношение полуосей эллипса, $k = a/b$. Решением уравнения (21) является формула

$$\frac{z}{z_0} = \left(\frac{x}{x_0} \right)^{k^2}, \quad (23)$$

где x_0 , z_0 соответствуют контуру начального эллипса при $t = 0$. Зависимость $z = f(x)$ нормали для эллипса при $k > 1$ и $k < 1$ показана на рис. 4.

Исключив $(z_3)_{\text{гр}}$ в уравнении (19) с помощью уравнения (22), получим

$$(z_2)_{\text{гр}} = - \left(\frac{\partial y_{\text{гр}}}{\partial x} + k^2 \frac{z}{x} \frac{\partial y_{\text{гр}}}{\partial z} \right)^{-1}.$$

Преобразуем это уравнение к виду

$$(z_2)_{\text{гр}} = -x \left(x \frac{\partial y_{\text{гр}}}{\partial x} + k^2 z \frac{\partial y_{\text{гр}}}{\partial z} \right)^{-1}. \quad (24)$$

Зная $(z_2)_{\text{гр}}$, с помощью (19) найдем $(z_3)_{\text{гр}}$. Из уравнения (23) следует, что при $x = 0$ (вдоль оси z) градиент $(z_2)_{\text{гр}} = 0$, при этом $(z_3)_{\text{гр}} \neq 0$. При $z = 0$ (вдоль оси x), как это следует из уравнений (21), (22), $(z_3)_{\text{гр}} = 0$, при этом $(z_2)_{\text{гр}} \neq 0$. В двухмерном случае, когда $\frac{\partial y_{\text{гр}}}{\partial z} = \text{tg } \alpha = 0$, получаем

$$(z_2)_{\text{гр}} = - \left(\frac{\partial y_{\text{гр}}}{\partial x} \right)^{-1}, \quad (z_2)_{\text{гр}} = 0. \quad (25)$$

В вертикальной плоскости N вдоль кривой ED_1D будет перемещаться и граница фронта пламени.

Для дифференциала $de_{\text{гр}}$, являющегося дифференциалом кривой, проходящей по боковой поверхности гриба, имеем

$$(de_{\text{гр}})^2 = (dy)^2 + (dx)^2 + (dz)^2$$

или в соответствии с равенством (16)

$$de_{\text{гр}} = \left\{ \left[1 + \left(\frac{\partial y_{\text{гр}}}{\partial x} \right)^2 \right] (dx)^2 + \left[1 + \left(\frac{\partial y_{\text{гр}}}{\partial z} \right)^2 \right] (dz)^2 + 2 \frac{\partial y_{\text{гр}}}{\partial x} \frac{\partial y_{\text{гр}}}{\partial z} \right\}^{1/2} dx dz. \quad (26)$$

Поскольку кривая для $de_{\text{гр}}$ принадлежит той же плоскости N , для отношения дифференциалов dx и dz справедливо равенство (21). Поэтому окончательно имеем

$$de_{\text{гр}} = \left\{ \left[1 + \left(\frac{\partial y_{\text{гр}}}{\partial x} \right)^2 \right] + \left[1 + \left(\frac{\partial y_{\text{гр}}}{\partial z} \right)^2 \right] \text{tg}^2 \alpha + 2 \frac{\partial y_{\text{гр}}}{\partial x} \frac{\partial y_{\text{гр}}}{\partial z} \text{tg} \alpha \right\}^{1/2} dx.$$

Интегрируя по e от нуля до $e_{\text{гр}}$ и по x — от x_E до x_1 , получим

$$e_{\text{гр}} = \int_{x_E}^x \left\{ 1 + \left(\frac{\partial y_{\text{гр}}}{\partial x} \right)^2 + \left[1 + \left(\frac{\partial y_{\text{гр}}}{\partial z} \right)^2 \right] \text{tg}^2 \alpha + 2 \frac{\partial y_{\text{гр}}}{\partial x} \frac{\partial y_{\text{гр}}}{\partial z} \text{tg} \alpha \right\}^{1/2} dx. \quad (27)$$

В плоском случае

$$e_{\text{гр}} = \int_{x_E}^x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y_{\text{гр}}}{\partial x} \right)^2} dx. \quad (28)$$

Выражения (25), (28) были использованы в работе [3]. На поверхности горения

$$e_{\text{гр}} = e, \quad (29)$$

и верхний предел интегрирования по x в выражениях (27), (28) будет определяться в зависимости от величины e .

Как и в работе [3], рассмотрим случай, когда боковая поверхность изменяется по формуле

$$y_{\text{гр}} = \sqrt{(n - n_0)}, \quad (30)$$

где n — нормаль к контуру эллипса, параллельная плоскости zOx (см. рис. 1) и при $t = 0$ ($e = 0$) находящаяся в плоскости zOx ; n_0 — нормаль n при $t = 0$. Направление нормали, как и выше, будем характеризовать $\text{tg} \alpha$, а величину n — выражением

$$n = \int_0^x \sqrt{1 + k^4 \frac{z^2}{x^2}} dx_E, \quad (31)$$

где z удовлетворяет уравнению (23).

Дифференцируя равенство (30) и учитывая выражение для n , найдем частные производные $\frac{\partial y_{\text{гр}}}{\partial x}$ и $\frac{\partial y_{\text{гр}}}{\partial z}$. При $n = n_0$ они будут бесконечно большими, а $(z_2)_{\text{гр}}$ и $(z_3)_{\text{гр}}$ будут равны нулю; при $t > 0$ частные производные будут конечными, а градиенты $(z_2)_{\text{гр}}$ и $(z_3)_{\text{гр}}$ — отличными от нуля и отрицательными. Имея выражения для расчета $(z_2)_{\text{гр}}$ и $(z_3)_{\text{гр}}$, площадь поверхности горения гриба определим по формуле

$$S = \pi a_0^2 k + 4 \int_0^a \int_{z_H(x)}^{z_B(x)} \sqrt{1 + z_2^2 + z_3^2} dx_{\text{п}} dz_{\text{п}}, \quad (32)$$

где двойной интеграл соответствует правому верхнему квадранту эллипса (или одной четверти области E , см. рис. 3),

$$z_{\text{н}} = \begin{cases} ka_0 \sqrt{1 - (x/a_0)^2} & \text{при } 0 \leq x \leq a_0, \\ 0 & \text{при } x > a_0, \end{cases} \quad (33)$$

$$z_{\text{в}} = ka \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2}, \quad (34)$$

a_0 — полуось a при $t = 0$. Зависимости переменных $x_{\text{п}}$ и $z_{\text{п}}$, принадлежащих поверхности горения, от x и z , соответствующих границе области интегрирования, определяются уравнениями (8)–(10), (13), (19), (24), (27), (29), (31). Задавая величину e и варьируя величины x и z , соответствующие области интегрирования E , можно рассчитать площадь поверхности горения.

При рассмотрении таких замкнутых фигур, как эллипс, может оказаться, что вместо декартовых целесообразнее использовать цилиндрические координаты [6].

В цилиндрических координатах уравнение (1) преобразуется к виду

$$\frac{\partial y}{\partial t} = U_T \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2}, \quad (35)$$

где r , φ — радиальная и угловая цилиндрические координаты. Обозначив

$$z_1 = \frac{\partial y}{\partial t}, \quad z_2 = \frac{\partial y}{\partial r}, \quad z_3 = \frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (36)$$

в направлении движения фронта пламени получим

$$\frac{dz_2}{dt} = \frac{U_T^2 z_3^2}{r z_1} + \frac{z_1 DU_T}{U_T Dr},$$

$$\frac{dz_3}{dt} = \frac{U_T^2}{r} \frac{z_2 z_3}{z_1} + \frac{z_1}{U_T} \frac{1}{r} \frac{DU_T}{D\varphi}, \quad (37)$$

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{U_T^2}{z_1} z_2, \quad \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{U_T^2}{r} \frac{z_3}{z_1}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{U_T^2}{z_1},$$

где

$$\frac{DU_T}{Dr} = \frac{\partial U_T}{\partial r} + \frac{\partial U_T}{\partial y} z_2, \quad (38)$$

$$\frac{DU_T}{D\varphi} = \frac{\partial U_T}{\partial \varphi} + \frac{\partial U_T}{\partial y} r z_3. \quad (39)$$

Начальные и граничные условия для решения уравнений (37)–(39) аналогичны условиям для декартовых координат.

В качестве примера использования развитого подхода к расчету площади поверхности горения гриба рассмотрим случай, когда поперечное сечение ножки гриба круглое, а свойства горящей среды однородные. В этом случае расчет поверхности (ввиду круговой симметрии) упрощается.

Площадь поверхности горения гриба рассчитывается по формуле

$$S = 2\pi r_0^2 e_{\max}^2 + 2\pi e_{\max}^2 \int_{r_0}^R r \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2} dr. \quad (40)$$

Здесь $r_0 = (r_0)_{abs}/e_{\max}$ — безразмерный радиус основания ножки гриба при $e = 0$, где $(r_0)_{abs}$ — абсолютное значение радиуса основания ножки гриба при $e = 0$, e_{\max} — максимальное значение величины сгоревшего свода $R = R_{abs}/e_{\max}$ — безразмерный радиус поперечного сечения ножки гриба при $e > 0$ (R_{abs} — абсолютное значение ножки гриба при $e > 0$). Максимальное значение величины сгоревшего свода e_{\max} является масштабом для линейных размеров. Все параметры в подынтегральном выражении формулы (40) безразмерные. Учитывая, что свойства горящей среды однородные, из уравнений (37) получаем

$$z_2 = (z_2)_{гр}, \quad z_3 = 0,$$

$$r = r_{гр} - \frac{z_2}{z_1} (e - e_{гр}), \quad (41)$$

$$y = y_{гр} + \frac{e - e_{гр}}{z_1}.$$

При этом

$$4e_{гр} = 2\sqrt{r - r_0} \sqrt{1 + 4(r - r_0)} + \ln [2\sqrt{r - r_0} + \sqrt{1 + 4(r - r_0)}], \quad (42)$$

если $y_{гр} = \sqrt{r - r_0}$. В этом случае площадь поверхности горения сводится к вычислению трех квадратур:

$$S = 2\pi e_{\max}^2 (r_0^2 + I_1 + I_2 + I_3), \quad (43)$$

где

$$I_1 = \int_{r_0}^{r_{\max}} \frac{e - e_{гр}}{1 + 4(r - r_0)} \sqrt{r - r_0} dr, \quad (44)$$

$$I_2 = r_0 \int_{r_0}^{r_{\max}} \frac{e - e_{гр}}{1 + 4(r - r_0)} \frac{dr}{\sqrt{r - r_0}}, \quad (45)$$

$$I_3 = 2 \int_{r_0}^{r_{\max}} \frac{(e - e_{гр})^2}{[1 + 4(r - r_0)]^{3/2}} dr. \quad (46)$$

Вторая из приведенных квадратур совпадает с аналогичным соотношением для плоского случая и входит в выражение для S с коэффициентом r_0 .

Если значение r_0 будет достаточно велико по сравнению с R , то и зависимость $S(e)$ для

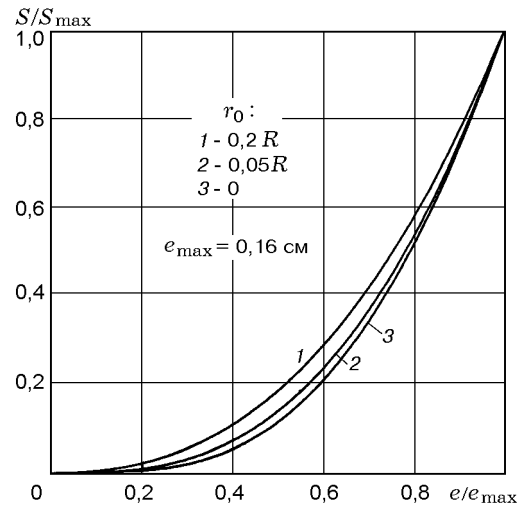


Рис. 5. Изменение площади поверхности горения гриба как функции величины сгоревшего свода

гриба будет близка к зависимости для плоского случая.

На рис. 5 приведены три кривые зависимости $S(e)$. Линия 3 соответствует случаю $r_0 = 0$, кривая 2 ($r_0 = 0,05R$) практически совпадает с кубической параболой, а кривая 3 (при $r_0 = 0,2R$) оказывается более сильной, чем для плоского случая. В итоге для гриба зависимость $S(e)$ при $r_0 = 0$ может быть даже более интенсивной, чем кубическая парабола.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ерохин Б. Т., Липанов А. М.** Нестационарные и квазистационарные режимы работы РДТТ. М.: Машиностроение, 1976. С. 215.
2. **Lipanov A. M.** The combustion of homogeneous powder grains in elliptical and subelliptical form // Theory of Combustion of Powder and Explosives. New York: Nova Sci. Publ., Inc., 1996. P. 342.
3. **Липанов А. М.** Об одном классе прогрессивно горящих форм // Физика горения и взрыва. 1997. Т. 33, № 4. С. 84–90.
4. **Соркин Р. Е.** Внутренняя баллистика. М.: Оборонгиз, 1973. С. 342.
5. **Lipanov A. M.** On the Actual Problems Concerning the Interior Ballistics of Solid Propellant Rocet. Izhevsk: Publishing House of the Institute of Applied Mechanics of the Ural Branch of Russian Academy of Sciences, 1996. P. 37.
6. **Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.** Теоретическая гидромеханика. М.: Физматгиз, 1963. Ч. I. С. 740.

Поступила в редакцию 23/II 1998 г.
