

ТЕЧЕНИЕ В КАНАЛЕ ПРОВОДЯЩЕГО ГАЗА С БОЛЬШИМ
МАГНИТНЫМ ЧИСЛОМ РЕЙНОЛЬДСА В ЛИНЕЙНОМ
ПРИБЛИЖЕНИИ

А. Г. Корсун

(Москва)

Рассмотрено стационарное плоское течение проводящего невязкого и нетеплопроводного газа в канале переменного сечения под действием поперечного магнитного поля.

Показано, что при больших магнитных числах Рейнольдса поток состоит из ядра и токовых слоев на электродах и на непроводящих стенках канала. В линейном приближении аналитически найдено распределение токов и других параметров в ядре и в токовых слоях. Джоулева диссипация в токовых слоях может быть более интенсивной, чем в ядре потока. В слоях на электродах с ростом параметра Холла возрастают продольные токи и джоулева диссипация.

В работе [1] показано, что в потоке проводящего газа при большом магнитном числе Рейнольдса ($R_m \gg 1$) могут образоваться магнитные пограничные слои. Это обстоятельство проиллюстрировано на примере экранирования потока плазмы от магнитных полей, создающихся около электрически изолированной от плазмы пластины, в которой течет ток. В несжимаемой жидкости толщина слоя пропорциональна $R_m^{-1/2}$.

Структура электромагнитных приэлектродных слоев, возникающих при течении поперек магнитного поля около волнистой стенки невязкой плазмы с большим R_m и малым параметром «обмена» $\xi \sim H/R_m$, рассмотрена в линейном приближении в работе [2]. Показана возможность образования «бездиссипативных» приэлектродных слоев с толщинами порядка дебаевского или электронного ларморовского радиусов и «диссипативного» слоя, толщина которого растет по длине электрода и пропорциональна $(R_m c_B^2 / c_T^2)^{-1/2}$, где c_B и c_T — скорости магнитного и теплового звука. Свойства бездиссипативных и диссипативных электромагнитных слоев на секционированных слабозакороченных электродах ускорителя при произвольном параметре «обмена» исследованы соответственно в работах [2] и [3].

Определение параметра обмена ξ дано в работе [4].

Аналогичные слои должны существовать на сплошных электродах и на непроводящих стенках канала ускорителя. При наличии таких слоев исследование двумерного течения в канале существенно упрощается.

1. Рассматривается плоское течение проводящего газа в канале переменного сечения поперек магнитного поля (фиг. 1). Стенки канала могут быть либо электродами, либо изоляторами. Принимаются следующие допущения:

- 1) поток квазинейтральный и стационарный;
- 2) газ невязкий и нетеплопроводный;
- 3) внешнее магнитное поле однородно и направлено вдоль оси z , тока вдоль оси нет, поэтому суммарное магнитное поле направлено вдоль z и будет функцией x и y ;

4) в уравнении Ома члены, пропорциональные градиентам давления и температуры электронов, и члены, связанные со скольжением ионов, не существенны [5]; поэтому это уравнение в безразмерной форме имеет следующий вид:

$$\frac{1}{\sigma R_m} \nabla \times \mathbf{B} + \frac{H}{\alpha \rho R_m} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = -\nabla \varphi + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (1.1)$$

5) падение потенциала в слоях более тонких, чем диссипативный, несущественно.

При указанных условиях течение описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{1}{\sigma R_m} \Delta \mathbf{B} - \frac{1}{R_m} \nabla \frac{1}{\sigma} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \frac{H}{R_m} \nabla \frac{1}{\alpha \rho} \times \nabla \frac{B^2}{2} = (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{B} (\nabla \mathbf{v})$$

$$\rho (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = - \frac{\nabla (\sigma T)}{\gamma M^2} - A^2 \nabla \frac{B^2}{2}, \quad \nabla (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1.2)$$

$$\rho T (\mathbf{v} \nabla) \ln \frac{T}{\rho^{\gamma-1}} = \frac{A^2 M^2}{R_m} \gamma (\gamma - 1) \frac{(\nabla \times \mathbf{B})^2}{\sigma}$$

Все величины здесь безразмерные. Масштабами для плотности ρ , скорости \mathbf{v} , магнитного поля \mathbf{B} , температуры T , проводимости σ , степени ионизации α приняты их значения в начальном сечении, обозначенные индексом 0. Ширина канала в этом сечении h принята за масштаб размеров.

Критериями подобия будут следующие величины: R_m — магнитное число Рейнольдса; M — число Маха; A — число Альфвена; H — параметр Холла; γ — отношение теплоемкостей

$$R_m = \sigma_0 v_0 h \mu, \quad M^2 = \frac{v_0^2}{\gamma R T_0}, \quad A^2 = \frac{B_0^2}{\eta \rho_0 v_0^2}, \quad H = \frac{\sigma_0 m_i B_0}{\alpha \rho_0 e}$$

Если изменения безразмерных величин в канале малы по сравнению с единицей, т. е. если

$$|v - 1| \sim |\rho - 1| \sim |B - 1| \sim \varepsilon \ll 1$$

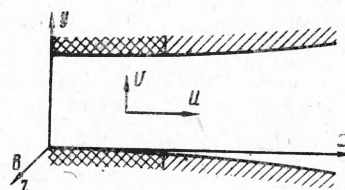
то уравнения можно линеаризовать. При этом в первом уравнении — уравнении индукции — исчезает нелинейный член с эффектом Холла, если параметр H / R_m не очень велик, т. е. $H / R_m \ll 1 / \varepsilon$. Аналогично в уравнении энергии при $M^2 A^2 / R_m \ll 1 / \varepsilon$ исчезает нелинейный член, описывающий джоулеву диссипацию. Система линеаризованных уравнений после преобразований принимает следующий вид:

$$\frac{1}{R_m} \Delta B = \frac{M^2}{M^2 - 1} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{M^2 (1 - A^2) - 1}{M^2 - 1} \frac{\partial B}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{M^2 - 1} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = - \frac{A^2 M^2}{M^2 - 1} \frac{\partial^2 B}{\partial x \partial y} \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{A^2 M^2}{M^2 - 1} \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{M^2}{M^2 - 1} \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{1}{M^2} \frac{\partial \rho}{\partial x} - A^2 \frac{\partial B}{\partial x}$$



Фиг. 1

Здесь u и v — продольная и поперечная компоненты скорости потока (фиг. 1).

Граничные условия следующие:

1) на непроницаемой для газа стенке канала нормальная компонента скорости равна нулю; в линейном приближении это записывается так:

$$v = f'(x) \quad (1.4)$$

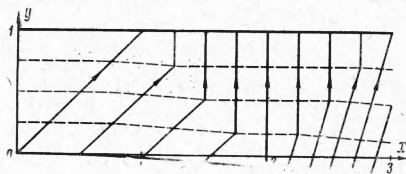
где $y = f(x)$ — форма стенки канала;

2) на непроводящей стенке нормальная компонента электрического тока равна нулю; в линейном приближении это приводит к условию на границе

$$\partial B / \partial x = 0 \quad (1.5)$$

т. е. на такой стенке суммарное магнитное поле постоянно

$$B = \text{const}$$



Фиг. 2

3) на электродах выполняется условие неразрывности тангенциальной компоненты напряженности электрического поля; на идеально проводящем электроде электрическое поле отсутствует и граничное условие для магнитного поля в линейном приближении имеет следующий вид:

$$\frac{\partial B}{\partial y} = H \frac{\partial B}{\partial x} \quad (1.6)$$

2. При $R_m \gg 1$ уравнение индукции упрощается и система (1.3) после преобразований сводится к следующим уравнениям:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{M_B^2 - 1} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad \frac{\partial B}{\partial x} = - \frac{M_B^2}{M_B^2 - 1} \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.1)$$

$$\rho = \rho(0, y) + B - B(0, y) \quad u = u(0, y) - \frac{1}{M_B^2} [B - B(0, y)]$$

Здесь $1/M_B^2 = 1/M^2 + A^2 = c_B^2/v_0^2$ — квадрат отношения скорости быстрой магнитозвуковой волны, распространяющейся поперек магнитного поля, к скорости потока.

Система (2.1) имеет очевидный смысл: течение идеально проводящего газа поперек магнитного поля в рассматриваемом приближении описывается теми же уравнениями, что и течение нейтрального газа, с заменой числа Маха M на M_B .

При $M_B > 1$ система (2.1) имеет простые аналитические решения.

Если сечение канала от $x = 0$ изменяется так, что нижняя стенка имеет форму $y = f_1(x)$, а верхняя стенка — прямая $y = f_2(x) = 1$, и если в этом сечении поток однороден, то решение записывается так:

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} \chi(x - 2nk - ky) - \sum_{n=1}^{\infty} \chi(x - 2nk + ky) \quad (2.2)$$

$$B = 1 + \frac{M_B^2}{k} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \chi(x - 2nk - ky) + \sum_{n=1}^{\infty} \chi(x - 2nk + ky) \right] \quad (2.3)$$

Здесь

$$\chi(x) = \begin{cases} f_1'(x) & \text{при } x > 0 \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases} \quad (k = \sqrt{M_B^2 - 1})$$

На фиг. 2 показаны линии электрического тока, т. е. линии $B = \text{const}$ (сплошные), и линии тока газа в канале (штриховые) при этом $M_B^2 = 2$, $f_1 = -0.02x^2$, $f_2 = 1$.

В этом случае линии электрического тока имеют форму прямых с изломами, являющимися слабыми разрывами. Плотность тока, нормального к стенке канала, изменяется скачками в точках, отстоящих одна от другой на расстоянии $2\sqrt{M_B^2 - 1}$.

При усреднении по сечению параметров потока получаются обычные соотношения квазиодномерного потока в линейном приближении. В частности, для продольной скорости

$$\langle u \rangle' = \frac{(f_2 - f_1)'}{M_B^2 - 1}, \quad \langle u \rangle = \frac{1}{f_2 - f_1} \int_{f_1}^{f_2} u \, dy$$

Здесь $f_2 - f_1$ — расстояние между стенками канала.

3. Решение для магнитных полей (2.3) не удовлетворяет граничным условиям (1.5) и (1.6). В частности, распределение тока в ядре потока не зависит от того, будет ли стенка канала проводящей или непроводящей.

Перестройка токов, необходимая для выполнения граничных условий для магнитных полей, должна осуществляться в токовом пограничном слое.

Предполагая, что этот слой тонок, и делая обычные для теории пограничного слоя [6] оценки членов в уравнениях системы (1.3), ее можно упростить. Уравнение индукции для токового слоя принимает следующий вид:

$$\kappa^2 \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} = \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial B^\circ}{\partial x} \quad (3.1)$$

Здесь и в дальнейшем индексом $^\circ$ обозначены величины на границе между слоем и ядром потока.

Это уравнение можно записать и в другой форме

$$\kappa^2 \frac{\partial^2 j_x}{\partial y^2} = \frac{\partial j_x}{\partial x} \quad (3.2)$$

Ниже приводятся решения для слоя на нижней стенке канала, на которой принято $y = 0$. Граничные условия для этого слоя следующие: при $y = 0$ — условие (1.5) на изоляторе или (1.6) на электроде; при $y \rightarrow \infty$ должен осуществляться переход к решению на нижней границе ядра потока (2.3).

Кроме того, для решения параболических уравнений (3.1) и (3.2) необходимо задать начальные условия $B(0, y)$ и $j_x(0, y)$ соответственно.

Таким образом, задачи о токовом слое при указанных предположениях математически эквивалентны задачам о линейном потоке тепла [7] и имеют аналогичные решения. С другой стороны, рассматриваемая задача очень близка задаче о вязком погранслое со скольжением, решенной в линейном приближении в работе [8].

Распределение магнитных полей и токов вблизи непроводящей стенки описываются уравнением (3.1) с граничными условиями:

$$B = 1 \quad \text{при } y = 0, \quad B \rightarrow B^\circ \quad \text{при } y \rightarrow \infty, \quad B = B(0, y) \quad \text{при } x = 0$$

В канале переменного сечения, магнитные поля в котором описываются выражением (2.3), в слое на непроводящей стенке изогнутой по параболе

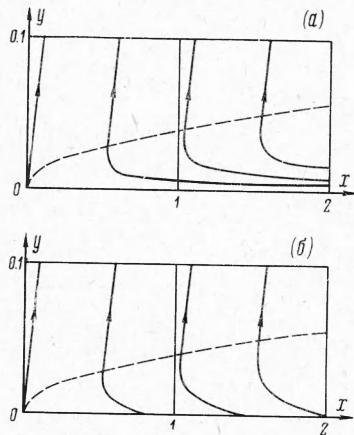
$$f_1 = 1/2 \, ax^2,$$

при $0 < x < 2 \sqrt{M_B^2 - 1}$ решение имеет вид

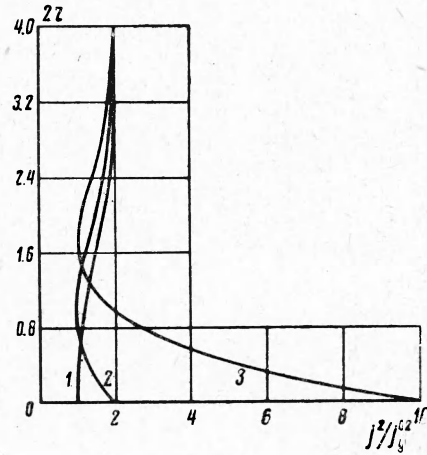
$$B = 1 + \frac{M_B^2 ax}{k} \left\{ 1 - [1 - \Phi(r)](1 + 2r^2) - \frac{k}{\sqrt{\pi}} r \exp(-2r^2) \right\}$$

Здесь $\Phi(r)$ — интеграл вероятности, $r = y/2\kappa\sqrt{x}$.

Линии электрического тока в слое на непроводящей стенке при $M_B^2 = 2$, $f_1 = -0.02x^2$, $\kappa = 10^{-2}$ изображены на фиг. 3, а. В слое токи скользят вдоль поверхности стенки и плотность тока гораздо больше, чем в ядре потока. Это приводит к повышенной джоулевой диссипации энергии в токовом слое. Электромагнитные силы перпендикулярны стенке. В расширяющемся канале, в котором поток с $M_B > 1$ ускоряется, токи, скользящие в слое вдоль непроводящей стенки, стремятся оторвать поток от стенки.



Фиг. 3



Фиг. 4

Токи в слоях на электродах описываются уравнением (3.2) с граничными условиями

$$j_x = H (\kappa^2 \partial j_x / \partial y + \partial B^0 / \partial x) \quad \text{при } y = 0$$

$$j_x \rightarrow j_x^0 = -M_B^2 f'' \quad \text{при } y \rightarrow \infty, \quad j_x = j_x(0, y) = \psi(y) \quad \text{при } x = 0$$

Если в ядре потока токи распределены в соответствии с (2.3), а электрод имеет форму параболы $f_1 = \frac{1}{2}ax^2$, то на участке $0 < x < 2\sqrt{M_B^2 - 1}$ продольный ток в слое распределен так:

$$j_x = aM_B^2 \frac{H}{\sqrt{M_B^2 - 1}} - aM_B^2 \left(\frac{H}{\sqrt{M_B^2 - 1}} + 1 \right) \{ \Phi(r) + \exp(by + b^2\kappa^2 x) \times$$

$$\times [1 - \Phi(r + b\kappa\sqrt{x})] \} + \frac{1}{2\kappa\sqrt{\pi x}} \int_0^\infty \left[\exp\left(-\frac{(y-\eta)^2}{4\kappa^2 x}\right) - \exp\left(-\frac{(y+\eta)^2}{4\kappa^2 x}\right) \right] \psi(\eta) d\eta,$$

$$b = \frac{1}{H\kappa^2}$$

Линии электрического тока у идеально проводящего анода при $M_B^2 = 2$, $f_1 = -0.02x^2$, $\kappa = 10^{-2}$, $H = 30$, $\psi = 0$ изображены на фиг. 3, б.

Толщина токового слоя в обоих случаях имеет порядок

$$\delta = \frac{1}{\kappa} = \frac{1}{\sqrt{R_m(1 + A^2 M^2)}} = \frac{M_B}{M} R_m^{-1/2}$$

и отличается от толщины слоя в несжимаемой хорошо проводящей жидкости [1] множителем $M_B / M = c_T / c_B \ll 1$.

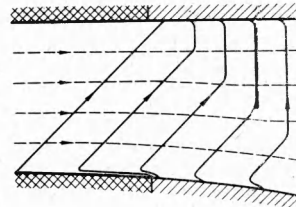
Джоулева диссипация в слое при $H > \sqrt{M_B^2 - 1}$ более интенсивна, чем в ядре потока. Вблизи электрода она растет как $(1 + H^2)$.

На фиг. 4 показано распределение джоулевой диссипации в слое на аноде при $M_B^2 = 2$ (кривая 1 — $H = 0$, 2 — $H = 1$, 3 — $H = 3$).

Изменение электрических токов вблизи линии слабого разрыва (фиг. 2) можно описать уравнением, аналогичным уравнению (3.2), записанным в координатах, одна из которых совпадает с линией слабого разрыва. Это уравнение описывает структуру слабого разрыва в невязкой и нетеплопроводной хорошо проводящей плазме: направление линий электрического тока непрерывно изменяется в слое толщиной порядка δ .

Исходя из вышеизложенного, можно построить картину токов и других параметров течения на входе в канал, образованный изоляторами и электродами. Для расширяющегося канала линии электрического тока (сплошные) и линии тока газа (штриховые) показаны на фиг. 5 при $M_B^2 = 2$, $f_1 = -0.04 x^2$, $f_2 = 1$, $\kappa = 10^{-2}$, $H = 3$.

В заключение выражаю благодарность А. И. Морозову за полезное обсуждение результатов работы.



Фиг. 5

Поступила 22 IV 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Ж и г у л е в В. Н. Теория магнитного пограничного слоя. Докл. АН СССР, 1959, т. 124, № 5.
2. М о р о з о в А. И., Ш у б и н А. П. О приэлектродных слоях в течениях хорошо проводящей невязкой плазмы. ПМТФ, 1967, № 5.
3. М о р о з о в А. И., Ш у б и н А. П. Течение плазмы между электродами, обладающими слабой продольной проводимостью. Теплофизика высоких температур, 1965, т. 3, № 6.
4. М о р о з о в А. И., С о л о в ъ е в Л. С. Об одном параметре в теории плазменных течений. Докл. АН СССР, 1965, т. 164, № 1.
5. Л ю б и м о в Г. А. О форме закона Ома в магнитной гидродинамике, ПММ, 1961, т. 25, № 4.
6. Ш л и х т и н г Г. Теория пограничного слоя. М., Изд-во иностр. лит., 1956.
7. К а р с л о у Г., Е г е р Д. Теплопроводность твердых тел. М., «Наука», 1964.
8. S c h a a f S. A., S h e r m a n F. S. Skin Friction in Slip Flow. J. Aeronaut. Sci. 1954, vol. 21, No. 2.