

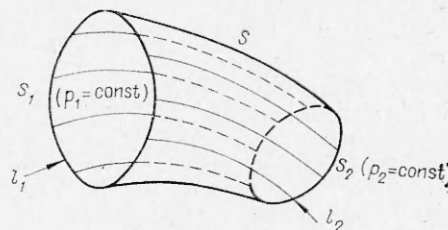
О НЕКОТОРЫХ ПОСТАНОВКАХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ В ГИПЕРЗВУКОВОЙ АЭРОДИНАМИКЕ

В. Г. Дулов
(Красноярск)

Принципиальный облик перспективного гиперзвукового летательного аппарата, активный силовой баланс которого создается прямоточным воздушно-реактивным двигателем на жидком водороде со сверхзвуковым горением, диктуется его специфическими условиями функционирования. Так, для обеспечения забора воздуха из атмосферы при полете в разреженной среде воздухозаборник должен обладать достаточно большой площадью захвата, которая практически будет мало отличаться от площади сечения всего аппарата. Сопло (второй элемент двигательной установки) также должно иметь большие размеры. Эти элементы двигательной установки должны давать определяющий вклад в аэродинамику аппарата в целом. Для них характерно наличие больших площадей, омываемых потоком, на которые в той или иной степени будут возлагаться функции несущих поверхностей. Отсюда необходимость асимметрии в конфигурациях таких поверхностей и связанный с ней существенно пространственный характер возмущенного течения.

Рассмотрим следующую постановку основной задачи: в трехмерном пространстве заданы два произвольных замкнутых контура l_1 и l_2 (фиг. 1), на эти контуры опираются изобары искомого течения с заданными на них значениями давлений p_1 и p_2 соответственно. Требуется найти поверхность тока, проходящую через оба контура и оптимизирующую некоторую интегральную силовую характеристику искомой поверхности. Конкретизация задачи состоит в задании функционала силового воздействия.

В практике гиперзвуковых расчетов получили большое распространение приближенные и полуэмпирические методы, среди которых в первую очередь следует указать на теорию Ньютона, методы волн разрежения и касательных конусов [1] (в дальнейшем назовем их «основными приближенными методами»). Эти методы ориентированы на решение задачи о распределении давления по поверхности обтекаемого тела. Решение такой задачи позволяет поставить вопрос об оптимизации формы тела по силовым характеристикам. Оптимизационная задача требует достаточной простоты алгоритма вычисления давления в точках поверхности для того, чтобы постановка задач была бы неформальной. Основные приближенные методы обладают этой простотой, но встречаются значительные трудности при распространении их на пространственные задачи и построении способов рациональной оценки точности. Поскольку указанные методы исходят из существенно различных физических предпосылок, неочевидной является возможность их единого аналитического представления на основе какого-либо объединяющего признака, что особенно полезно при рассмотрении возможных вариантов комбинированных методов. Таким образом, можно выделить три главных вопроса в теории основных приближенных методов: 1) разработка рекомендаций по



Фиг. 1

распространению методов на пространственные задачи; 2) исследование возможности рациональной оценки точности и построения высших приближений; 3) поиск единой аналитической формы описания методов.

Рассмотрению этих вопросов для сформулированной выше оптимизационной задачи посвящена данная работа.

1. Чтобы не исследовать каждый метод в отдельности, начнем с получения удовлетворительного ответа на третий вопрос. Одновременно будет предложено некоторое формальное обоснование методов.

Рассмотрим стационарные осесимметричные течения невязкого и нетеплопроводного газа с произвольными термодинамическими свойствами и примем следующие обозначения: x, y — геометрические координаты в плоскости осевого сечения; p — давление; ρ — плотность; h — теплосодержание; ψ — функция тока; w — модуль скорости; u, v — проекции скорости на оси x и y ; M — число Маха; θ — угол наклона вектора скорости к оси симметрии; S — энтропия. Все размерные величины отнесены к соответствующим максимальным значениям. Теплосодержание h будем считать заданной функцией давления и энтропии (уравнение состояния): $h = h(p, S)$.

Введем в качестве независимых переменных давление p и функцию тока ψ [2]. Тогда

$$d\psi = \rho y(udy - vdx) = \rho y \{u(y_p dp + y_\psi d\psi) - v(x_p dp + x_\psi d\psi)\}$$

или

$$(\rho u y_\psi - \rho v x_\psi - 1) u^2 \psi = \rho y (v x_p - u y_p) dp, \quad 1/\rho = h_p.$$

Ввиду независимости dp и $d\psi$

$$(1.1) \quad u y_\psi - v x_\psi = h_p / y; \quad v x_p - u y_p = 0.$$

Уравнение Эйлера в переменных (p, ψ) запишется в виде

$$y y_\psi + u_p = 0.$$

Это уравнение будет удовлетворено тождественно, если положить, что

$$(1.2) \quad y^2/2 = \sigma_p; \quad u = -\sigma_\psi,$$

где $\sigma(p, \psi)$ — произвольная функция. Разрешая (1.1) относительно производных x_p, x_ψ и исключая x перекрестным дифференцированием, получим уравнение, содержащее одну лишь функцию σ ,

$$(1.3) \quad 2(1-h)(\sigma_{p\psi}^2 - \sigma_{pp}\sigma_{\psi\psi}) - \left[h_S S'(\psi) \sigma_\psi + h_p \frac{2(1-h-\sigma_\psi^2)}{2\sigma_p} \right] \sigma_{pp} + 2h_p \sigma_\psi \sigma_{p\psi} + h_p^2 + + [2(1-h) - \sigma_\psi^2] h_{pp} = 0.$$

Если течение изэнтропично, то $S'(\psi) \equiv 0$ и в уравнении (1.3) отсутствует первое слагаемое в коэффициенте при σ_{pp} . Второе слагаемое в этом же коэффициенте обусловлено осевой симметрией. Таким образом, в случае плоских изэнтропических течений коэффициент при σ_{pp} равен нулю.

Будем искать решение уравнения (1.3) в виде линейной функции от функции тока

$$(1.4) \quad \sigma = a(p) + b(p)\psi.$$

В случае изэнтропического течения точные решения такого вида существуют. Путем непосредственной подстановки (1.4) в (1.3) для функций

$a(p)$ и $b(p)$ получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения второго порядка

$$(1.5) \quad b'' = b'L(b); \quad a'' = a'L(b).$$

Здесь штрихами обозначены производные по p , а через $L(b)$ — дифференциальный оператор

$$L(b) = \frac{2h_p}{1-h-h^2} \left[2(1-h)(b')^2 + 2h_p b b' + \frac{1}{2} h_p^2 + (1-h-b^2) h_{pp} \right].$$

Если a и b удовлетворяют уравнениям (1.5), то функция σ вида (1.4) описывает конические течения, поскольку из (1.2) следует, что p и ϑ сохраняются на одних и тех же линиях, которые в силу (1.1) и определения ψ являются прямыми. Разберем подробнее случай плоских течений. В уравнениях (1.5) тогда отсутствуют члены со старшими производными, и система (1.5) удовлетворяется при произвольной функции $a(p)$, если $b(p)$ есть решение уравнения $L(b) = 0$.

Последнее уравнение легко интегрируется. Результат приводится к виду

$$b = w \sin [v(w) + c], \quad v(w) = \int \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{w} dw,$$

где c — произвольная постоянная; $v(w)$ — функция Прандтля — Майера. Таким образом, в плоском случае уравнение (1.3) имеет точное частное решение

$$\sigma = \pm \sqrt{1-h} \sin (v + c) \psi + a(p),$$

обладающее произволом в одну функцию $a(p)$ и одну константу c . Это решение описывает простую волну, поскольку компоненты скорости сохраняют постоянные значения на изобарах.

Следовательно, если функция σ линейно зависит от функции тока, то в осесимметричном случае это будет коническое течение, а в плоском — простая волна.

Введем вместо $h(p, S)$ функцию $H(p, S)$ из соотношения

$$(1.6) \quad 1 - h = \Phi^2(S)(1 - H),$$

где $\Phi(S)$ — пока произвольная функция. Поскольку $S = \bar{S}(\psi)$, $\eta = (\Phi(S)d\psi)$ будет функцией только ψ . После исключения из уравнения (1.3) функции h с помощью соотношения (1.6) вид этого уравнения не изменится. Простой пересчет производных показывает, что в результате произойдет лишь замена h на H , а вместо ψ будет фигурировать η («принцип замещения» [3]). На этом основании в дальнейшем не делается различия между переменными ψ и η .

Рассмотрим вырожденный случай, когда h зависит только от S и не зависит от давления. Равенство $h_p = 1/\rho = 0$ можно трактовать как бесконечную плотность в потоке. Функциональный определитель

$$D \begin{pmatrix} x, y \\ p, \psi \end{pmatrix} = - \frac{h_p \sigma_{pp}}{H \sigma_p \sqrt{1-h-\sigma_\psi^2}} = 0,$$

т. е. область течения вырождается в линию. В (1.6) можно положить $H = 0$, тогда $\Phi(S) = \sqrt{1-h}$. Для деформированной переменной η сохраним обозначение ψ . Уравнение (1.3) сводится к уравнению развертывающихся поверхностей

$$(1.7) \quad \sigma_{pp} \sigma_{\psi\psi} - \sigma_{p\psi}^2 = 0,$$

причем
(1.8)

$$\sigma_\psi = -\cos \vartheta.$$

Из (1.7) следует, что

$$\sigma_\psi = f(p),$$

где f — произвольная функция. Дальнейшее интегрирование уравнения, например, методом полного интеграла приведет к аналитическому оформлению теории Ньютона с поправкой Буземана на центробежные силы. Обычное ньютоновское приближение получится из формулы (1.8), где нужно считать, что ϑ в правой части зависит только от давления. Тогда $\sigma = -\cos \vartheta + b(p)$, где $b(p)$ — произвольная функция, зависящая от формы тела. Таким образом, ньютоновское приближение тоже описывается зависимостью вида (1.4).

В общем случае, согласно (1.2.), $\sigma = -\int u d\psi$, где неопределенный интеграл берется вдоль изобары. Отсюда следует, что σ представляет собой поток количества движения через линию $p = \text{const}$ в направлении оси симметрии. Эта величина для основных приближенных методов линейно зависит от массы газа, обладающей количеством движения σ .

Указанный признак используется ниже для обобщения методов на пространственные задачи и построения высших приближений путем учета квадратичных и более высоких степеней массы газа в формулах для потока количества движения через изобары.

В зависимости от способа определения коэффициентов получаются различные приближенные методы. Например, если потребовать, чтобы линейный двучлен удовлетворял уравнению плоских течений, то оставшийся произвол позволит удовлетворить только граничному условию непроницаемости обтекаемой поверхности. Построение в таком приближении $\sigma(p, \psi)$ дает результат, совпадающий с методом волн разрежения. Если потребовать, чтобы линейная функция (1.4) точно удовлетворяла уравнению (1.3), то найденные таким образом $a(p)$ и $b(p)$ дадут аналитическое представление метода касательных конусов. При этом константы интегрирования (1.5) зависят от угла ϑ на поверхности. Наконец, если потребовать, чтобы были выполнены точно все граничные условия в задаче обтекания средой с уравнением состояния $h = h(S)$, то это определит функции $a(p)$ и $b(p)$ при дополнительном предположении, что давление зависит только от местного угла наклона поверхности.

Рассмотрим возможность задания квадратичной зависимости σ от ψ вдоль линий $p = \text{const}$: $\sigma = a + b\psi + c\psi^2$, где a, b, c — некоторые функции давления. После подстановки функции σ такого вида в уравнение (1.3) левая часть этого уравнения окажется полиномом четвертой степени от ψ ($S'(\psi) \equiv 0$). Приравнивание нулю коэффициентов этого полинома приводит к переопределенной системе из пяти уравнений для трех функций давления a, b и c . Система оказывается совместной, но решение ее обладает произволом всего лишь в две константы:

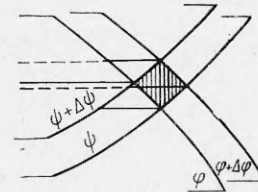
$$a = \text{const}; \quad b = -\sqrt{1-h}; \quad c = c\sqrt{1-h},$$

где c — произвольная постоянная. Поскольку σ определяется с точностью до произвольной константы, то постоянная a оказывается несущественной. Таким образом, решение уравнения (1.3), представляющее полином второй степени от ψ , записывается в виде

$$\sigma = -\sqrt{1-h}\psi(1 - c\psi).$$

Такая зависимость описывает течение от сферического источника.

2. Для исследования возможных переходов к пространственным задачам возьмем в качестве независимых переменных давление p и две функции тока φ и ψ , причем будем считать, что искомая поверхность содержится среди поверхностей $\psi = \text{const}$. Тогда φ и ψ характеризуют массовые потоки газа через криволинейные ограниченные сектора и слои и поэтому изменяются в ограниченных пределах для трубок тока, проходящих через контуры l_1 и l_2 . Подлежащая исследованию область течения в пространстве переменных (p, φ, ψ) представляет прямоугольную область с границами, параллельными координатным осям.



Фиг. 2

Рассмотрим систему уравнений пространственных течений невязкого и нетеплопроводного газа с произвольными термодинамическими свойствами [4]. Уравнение неразрывности $\text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$, где ρ — плотность; \mathbf{v} — вектор скорости, удовлетворено тождественно, если вектор плотности потока массы $\rho \mathbf{v}$ представлен в виде векторного произведения градиентов двух скалярных функций φ и ψ

$$\rho \mathbf{v} = \nabla \varphi \times \nabla \psi.$$

Формальный переход в уравнениях Эйлера к независимым переменным (p, φ, ψ) приводит к соотношениям

$$(2.1) \quad \frac{v_{1p}}{\partial(x_2, x_3)} = \frac{v_{2p}}{\partial(x_1, x_3)} = \frac{v_{3p}}{\partial(x_1, x_2)} = \lambda,$$

где v_i — проекции скорости на координатные оси x_i , индекс p означает частное дифференцирование по p . Из определения функций φ и ψ следуют равенства

$$(2.2) \quad x_{1p}/v_1 = x_{2p}/v_2 = x_{3p}/v_3; \lambda = 1.$$

Исключая из системы (2.1), (2.2) проекции скорости, получим три уравнения в частных производных относительно функций $x_i(p, \varphi, \psi)$

$$(2.3) \quad \frac{\partial(x_i, x_j)}{\partial(\varphi, \psi)} = (-i) \cdot \left(\frac{v x_{lp}}{\sqrt{\sum_{k=1}^3 (x_{kp})^2}} \right)_p,$$

$$\frac{v^2}{2} + h = \text{const} = h_m, \quad l = 6 - i - j, \quad i < j.$$

Представим себе трубку тока четырехугольного сечения, образованную четырьмя пересекающимися поверхностями по две из двух семейств $\varphi = \text{const}$ и $\psi = \text{const}$. На фиг. 2 заштриховано изобарическое сечение такой трубки. Если ΔS_l — площади проекций заштрихованного сечения на три координатные плоскости, $\Delta q = \Delta \varphi \cdot \Delta \psi$ — поток массы через сечение такой трубки, то

$$\partial(x_i, x_j)/\partial(\varphi, \psi) \approx \Delta S_l / \Delta q$$

и уравнения (2.3) можно переписать в виде

$$(2.4) \quad \Delta S_l / \Delta q \approx -v_{lp}.$$

Когда ось трубки почти прямолинейна и практически отлична от нуля одна осевая компонента скорости, то уравнения (2.4) превращаются в

обычные соотношения для одномерного течения в канале с переменной площадью сечения.

3. Будем считать, что функция тока $\psi = 0$ на искомой поверхности тока. Все три неизвестные функции x_i станем искать в виде полиномов по ψ . Ввиду обилия целочисленных параметров индексами i, j, l обозначим номера координат и проекций. Такие параметры принимают только три дискретных значения: 1; 2; 3. Номера членов обозначаются через k, m, n и записываются не индексами, а в виде аргументов соответствующих функций. Интервалы их изменений указываются специально. Непрерывные аргументы p и φ не выписываются. При таких условиях запись искомого аппроксимирующего полинома имеет вид

$$x_i = \sum_n x_i(n) \psi^n.$$

Примем правило суммирования только по повторяющимся аргументам, которые в этом случае специально выписываются. Если повторяются индексы, степени или целочисленные множители, суммирование не предполагается. Например,

$$(3.1) \quad \left(\frac{\partial x_i}{\partial p}\right)^2 = \sum_n X_i(n) \psi^n, \text{ где } X_i(n) = \\ = \frac{\partial x_i(k)}{\partial p} \frac{\partial x_i(n-k)}{\partial p} \quad (0 \leq k \leq n).$$

В правой части последней формулы идет суммирование по повторяющемуся аргументу k , а по повторяющемуся индексу i суммирования нет. Аналогично для квадрата проекции скорости

$$(3.2) \quad V_i = v_i^2 = \sum_n V_i(n) \psi^n; \quad V_i(n) = v_i(k) v_i(n-k) \quad (0 \leq k \leq n),$$

где $v_i(n)$ — коэффициенты полинома

$$v_i = \sum_n v_i(n) \psi^n.$$

Из (3.2) следует, что

$$(3.3) \quad v_i(n) = [V_i(n) - v_i(k) v_i(n-k)] / 2v_i(0) \quad (1 \leq k \leq n-1),$$

с другой стороны,

$$(3.4) \quad v_i = \frac{v \frac{\partial x_i}{\partial p}}{\sqrt{\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial x_i}{\partial p}\right)^2}}.$$

Для квадрата модуля скорости запишем

$$v^2 \approx \sum_n w(n) \psi^n.$$

Возводя в квадрат равенство (3.4), перепишем его в виде

$$\left[\sum_n V_i(n) \psi^n \right] \left\{ \sum_n \sum_{i=1}^3 [X_i(n) \psi^n] \right\} = \left[\sum_n w_i(n) \psi^n \right] \left[\sum_n X_i(n) \psi^n \right].$$

Перемножая суммы и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ψ , в силу принятого выше правила суммирования получаем

$$V_i(n-k) \left[\sum_{i=1}^3 X_i(k) \right] = X_i(k) w_i(n-k) \quad (0 \leq k \leq n).$$

Отсюда следуют рекуррентные соотношения

$$(3.5) \quad V_i(n) = \frac{X_i(0) w(0) + X_i(k) w(n-k) - V_i(n-k) \left[\sum_{i=1}^3 X_i(k) \right]}{\sum_{i=1}^3 X_i(0)} \quad (1 \leq k \leq n),$$

Выполним аналогичные представления левых частей основных уравнений (3.3)

$$\frac{\partial x_i x_j}{\partial(\varphi, \psi)} = \sum_n a_{ij}(n) \psi^n,$$

где

$$(3.6) \quad a_{ij}(n) = (n-k+1) \left[\frac{\partial x_i(k)}{\partial \varphi} x_j(n-k+1) - \frac{\partial x_j(k)}{\partial \varphi} x_i(n-k+1) \right] \quad (0 \leq k \leq n),$$

а в силу уравнений движения (3.3)

$$(3.7) \quad a_{ij}(n) = (-1)^{i+j} \frac{\partial v_l(n)}{\partial p}, \quad l = 6 - i - j.$$

Последнее равенство рекуррентно определяет коэффициенты искомой функции: из (3.6), (3.7) следует, что

$$(3.8) \quad \frac{\partial x_i(0)}{\partial \varphi} x_j(m+1) - \frac{\partial x_j(0)}{\partial \varphi} x_i(m+1) = \frac{1}{m+1} \left\{ (-1)^{i+j} \frac{\partial v_l(m)}{\partial p} - (m-k+1) \left[\frac{\partial x_i(k)}{\partial \varphi} x_j(m-k+1) - \frac{\partial x_j(k)}{\partial \varphi} x_i(m+1-k) \right] \right\} = (-1)^{i+j} \beta_{ij}(m) \quad (1 \leq k \leq m),$$

$\beta_{i,j}(m)$ — обозначения правых частей полученных уравнений, не зависящих от старших коэффициентов $x_i(m+1)$. Таким образом, эти коэффициенты должны удовлетворять линейной системе уравнений (3.8), которая характеризуется следующей матрицей коэффициентов:

$$\left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial x_2(0)}{\partial \varphi} - \frac{\partial x_1(0)}{\partial \varphi} & 0 & \beta_{12}(m) \\ \frac{\partial x_3(0)}{\partial \varphi} & 0 & \frac{\partial x_1(0)}{\partial \varphi} - \beta_{13}(m) \\ 0 & \frac{\partial x_3(0)}{\partial \varphi} - \frac{\partial x_2(0)}{\partial \varphi} & \beta_{23}(m) \end{array} \right\|.$$

Ранг матрицы должен равняться двум, поскольку таков ранг основного определителя. Если предположить, что все производные по φ отличны от нуля, то последнее требование эквивалентно уравнению

$$[\partial x_1(0)/\partial \varphi] \beta_{23}(m) + [\partial x_2(0)/\partial \varphi] \beta_{13}(m) + \\ + [\partial x_3(0)/\partial \varphi] \beta_{12}(m) = 0.$$

Это уравнение накладывает связь на коэффициенты с порядковыми номерами, меньшими, чем $m + 1$, в частности, при $m = 0$ на функции $x_i(0)$ и их производные по p и по φ . Следовательно, только две из этих функций можно считать произвольными. Если решение строится в виде полинома по ψ до членов порядка $m + 1$, то в качестве третьей независимой произвольной функции может рассматриваться любая из функций $x_i(m + 1)$, ибо среди уравнений (3.8) только два линейно-независимые, и, таким образом, два старших коэффициента определяются через третий.

4. Как указывалось выше, критерием качества для сравнения допустимых поверхностей тока являются некоторые характеристики силового воздействия потока на эти поверхности. Применим обычный прием определения такого воздействия, основанный на интегральном применении закона количества движения: пусть S_1, S_2 — поверхности изобар, опирающихся на заданные контуры l_1 и l_2 , а S — поверхность тока, проходящая через те же контуры. Замкнутую поверхность, состоящую из трех указанных частей, примем за контрольную поверхность. В исходный момент эта поверхность ограничивает объем газа, к которому применяется закон количества движения. Очевидные рассуждения приводят к равенству

$$(4.1) \quad - \iint_S p \cos(\mathbf{n}, x_i) \partial S - \iint_{S_1} p \cos(\mathbf{n}, x_i) dS - \iint_{S_2} p \cos(\mathbf{n}, x_i) dS = \\ = \iint_{S_2} \rho v_i v_n dS - \iint_{S_1} \rho v_i v_n dS \quad (i=1, 2, 3),$$

где \mathbf{n} — внешняя нормаль к соответствующей поверхности; v_n — проекция скорости на эту нормаль. Пусть R_i — проекция на ось с номером i силы воздействия потока на поверхность S

$$R_i = \iint_S p \cos(\mathbf{n}, x_i) dS.$$

Учитывая, что $\cos(\mathbf{n}, x_i) dS = dx_i dx_j (l = 6 - i - j, i \neq j)$, уравнению (4.1) можно придать следующий вид:

$$R_i = \sum_{j=1}^3 (I_{ij}|_{p=p_1} - I_{ij}|_{p=p_2}),$$

где

$$(4.2) \quad I_{ij} = \iint (p \delta_{ij} + \rho v_i v_j) \frac{\partial(x_k, x_m)}{\partial(\varphi, \psi)} d\varphi d\psi,$$

$k < m, j \neq k, i \neq k$, все индексы могут принимать значения 1; 2; 3; δ_{ij} — символ Кронекера.

Полученные выше рекуррентные соотношения (3.1), (3.3), (3.5), (3.8) определяют коэффициенты подынтегрального полинома в (4.2)

$$(p \delta_{ij} + \rho v_i v_j) \frac{\partial(x_k, x_m)}{\partial(\varphi, \psi)} \approx \sum_{n=0}^N K_{ij}(n) \psi^n.$$

Следовательно,

$$I_{i,j} \approx \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sum_n K_{ij}(n) \frac{\psi_0^{n+1}}{n+1} d\varphi.$$

Здесь ψ_0 — характеристика массового расхода через трубку тока, ограниченную поверхностью S ,

$$(4.3) \quad R_i \approx \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sum_{n=0}^N \frac{\psi_0^{n+1}}{n+1} \left[\sum_{j=1}^3 (K_{ij}|_{p=p_1} - K_{ij}|_{p=p_2}) \right] d\varphi,$$

т. е. оптимизируемое воздействие ищется в виде полинома по степеням массы газа, ответственной за это воздействие. В силу соотношений (3.2), (3.8), (3.5), (3.3) подынтегральное выражение в (4.3) зависит от производных $\partial^n x_i(0)/\partial p^n$ всех порядков до $2(N+1)$ включительно. Эти производные могут рассматриваться как искомые функции φ , поскольку они вычисляются при фиксированных значениях $p = p_1$ и $p = p_2$, т. е. общее число неизвестных функций $4(N+1)$. Кроме самих этих функций, в подынтегральное выражение (4.3) входят их производные по φ . Таким образом, после решения экстремальной задачи для интеграла (4.3) искомая поверхность тока определяется приближенными представлениями функций $x_i(0)$ в виде полиномов от p степени $2(N+1)$ с двух концов от кромок l_1 и l_2 . В общем случае, если не наложены дополнительные условия гладкости, в месте стыковки поверхностей, идущих от кромок, образуется излом поверхности. Вообще говоря, нельзя требовать непрерывности и от искомых функций по φ (например, в простейшем случае так называемых V -образных тел контуры l_1 и l_2 — треугольники).

При $N = 0$ получается линейная связь между интегралами, выражающими потоки количества движения через изобарические поверхности (аналогами функции σ), и соответствующими массовыми расходами. Согласно вышесказанному, этот случай следует рассматривать как обобщение на пространственные задачи основных приближенных методов, конкретизация которых связана с постановкой дополнительных условий в соответствии с выбранным методом. В подынтегральное выражение (4.3) войдут $x_i(1)$, т. е. случай $N = 0$ соответствует линейным по ψ представлениям координат. Если при тех же дополнительных условиях выбирается $N > 0$, то следующие приближения, начиная с $x_i(2)$, могут рассматриваться как поправки к методам, а их относительная величина позволит судить о применимости этих методов.

Поступила 26 XII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений. М., ИЛ, 1962.
2. Дулов В. Г. Об уравнениях стационарных осесимметричных течений газа в переменном давлении — функция тока. — ПМТФ, 1964, № 3.
3. Мизес Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости. М., ИЛ, 1961.
4. Дулов В. Г., Рудаков А. И. Пространственные сверхзвуковые течения на больших расстояниях от тела конечного объема. — ПМТФ, 1972, № 2.