

**О ПРИМЕНЕНИИ НЕКОТОРЫХ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ
К РАСЧЕТУ ФЛАТТЕРА ПАНЕЛИ**

Р. Е. Лампер

(Новосибирск)

В линейной постановке для определения аэродинамических сил, возникающих на панели при флаттере, может быть использована трехмерная нестационарная линеаризованная теория, однако ее практическое применение в большинстве случаев сопряжено с вычислительными трудностями.

Ниже на примере пластинки делаются попытки оценить влияние на результат тех упрощений, которые принимаются на основании аэродинамических соображений при решении задачи флаттера. Отметим, что аэродинамическая оценка может оказаться недостаточной для задач динамической устойчивости — незначительное количественное, а тем более, качественное изменение сил, характеризующих неконсервативность системы, может существенно влиять на ее устойчивость.

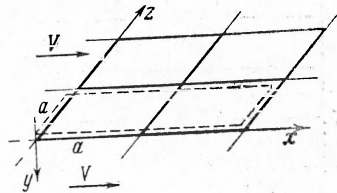
Рассмотрим бесконечную пластинку, подкрепленную через равные промежутки a абсолютно жестким продольным и поперечным набором и свободно на него опирающуюся.

Пластинка обтекается с обеих сторон потоком газа со скоростью V (фиг. 1). Воспользуемся способом, примененным в аналогичной задаче Хеджпетом и др. [1]. Относительно прогиба пластинки при флаттере предположим, что он имеет следующий вид:

$$w(x, z, t) = w_0(x) \sin \pi \frac{z}{a} e^{i\omega t} \quad (1)$$

а функция $w_0(x)$ периодична с периодом $2a$ и может быть представлена рядом Фурье

$$w_0(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-in\pi x/a} \quad (2)$$



Фиг. 1

Из условий равенства нулю прогиба при $x = 0$ и $x = a$ имеем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n = 0, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n a_n = 0 \quad (3)$$

Уравнение пластинки в области, обозначенной на фиг. 1 пунктиром, будет

$$D\Delta\Delta w + \rho h \ddot{w} = q(x, z, t) + F_0 \delta(x) + F_1 \delta(x - a) \quad \left(D = \frac{Eh^3}{12(1 - \sigma^2)} \right) \quad (4)$$

Здесь D — цилиндрическая жесткость, E, σ — модуль Юнга и коэффициент Пуассона, h — толщина пластинки, ρ — плотность материала пластинки, q — аэродинамическая нагрузка, δ — функция Дирака, F_0 и F_1 — погонные опорные реакции на опорах $x = 0$ и $x = a$, соответственно равные

$$F_0 = f_0 e^{i\omega t} \sin \frac{\pi z}{a}, \quad F_1 = f_1 e^{i\omega t} \sin \frac{\pi z}{a} \quad (5)$$

Аэродинамическую нагрузку q , остающуюся пока неизвестной, представим в виде:

$$q(x, z, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{in\pi x/a} \sin \pi \frac{z}{a} e^{i\omega t} \quad (6)$$

На основании принятой аэродинамической теории коэффициенты b_n могут быть выражены через коэффициенты a_n ряда (2), а последние — через f_0 и f_1 с помощью уравнения (4) и равенств (5). Тогда условия (3) дадут два однородных уравнения относительно f_0 и f_1 . Условие нетривиальности их решения определит частоты собственных колебаний пластинки ω . Действительные значения частот и соответствующие значения чисел M будем искать в зависимости от толщины панели h .

В трехмерной нестационарной теории потенциал скорости возмущенного движения удовлетворяет уравнению:

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - 2 \frac{M}{c} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} = 0 \quad \left(M = \frac{V}{c} \right)$$

с граничным условием

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial t} + cM \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{при } y = 0$$

Здесь c — скорость звука в невозмущенном потоке. При $y \rightarrow \infty$ решение должно быть конечным и удовлетворять принципу излучения.

Из решения этого уравнения для прогиба вида

$$w = a_n \exp \frac{in\pi x}{a} \sin \frac{\pi z}{a} \exp i\omega t$$

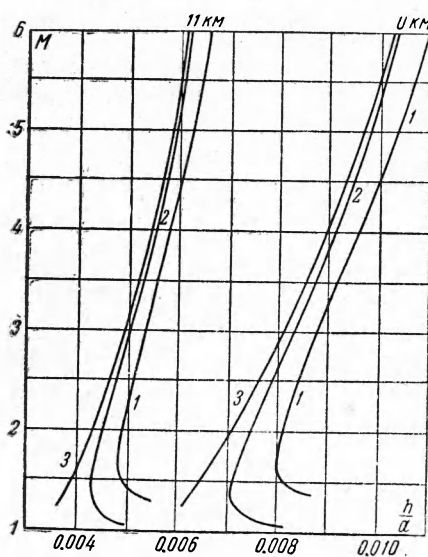
при помощи формулы для приращения давления

$$\Delta p = -\rho_0 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + cM \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)$$

найдем коэффициенты аэродинамической нагрузки

$$b_n = b_n' a_n, \quad b_n' = \frac{2\pi\rho_0 c^2 M}{a} \frac{1}{r_n} \left(n + \frac{a\omega}{\pi c M} \right)^2 \quad (7)$$

Здесь ρ_0 — плотность газа в невозмущенном потоке,



Фиг. 2

$$r_n = \sqrt{\frac{n^2 + 1}{M^2} - \left(n + \frac{a\omega}{\pi c M} \right)^2}$$

Если подкоренное выражение положительно, корень имеет знак плюс, если подкоренное выражение отрицательно, то

$$r_n = \begin{cases} i|r_n| & \text{при } n + \frac{a\omega}{\pi c M} > 0 \\ -i|r_n| & \text{при } n + \frac{a\omega}{\pi c M} < 0 \end{cases}$$

В плоской стационарной теории при $M > 1$ давление определяется формулой:

$$\Delta p = \frac{\rho_0 c^2 M^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{cM} \frac{\partial w}{\partial t} \right) \quad (8)$$

и коэффициенты аэродинамической нагрузки имеют вид

$$b_n = -i \frac{2\pi\rho_0 c^2 M^2}{a \sqrt{M^2 - 1}} \left(n + \frac{a\omega}{\pi c M} \right) a_n = b_n' a_n \quad (9)$$

Полагая $M^2 \gg 1$, найдем b_n для линейного приближения теории поршня:

$$b_n = -i \frac{2\pi\rho_0 c^2 M}{a} \left(n + \frac{a\omega}{\pi c M} \right) a_n = b_n' a_n$$

Пренебрегая в (8) производной по времени, получим в случаях: плоской статической теории

$$b_n = b_n' a_n, \quad b_n' = -i \frac{2\pi\rho_0 c^2 M^2}{a \sqrt{M^2 - 1}} \quad (10)$$

и статической теории при больших M :

$$b_n = b_n' a_n, \quad b_n' = -i \frac{2\pi\rho_0 c^2 M}{a} \quad (11)$$

Воспользуемся представлением периодической (с периодом $2a$) δ -функции рядом Фурье. Используя формулы (1), (2), (5) и (6), уравнение (4) представим в виде:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n a_n e^{in\pi x/a} = \frac{1}{2a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [f_0 + (-1)^n f_1] e^{in\pi x/a} \quad (12)$$

$$\left(\beta_n = D \left(\frac{\pi}{a} \right)^4 (n^2 + 1)^2 - \rho_0 h \omega^2 - b_n' \right)$$

Здесь величины b_n' определяются соответствующими выражениями различных аэродинамических теорий. Из (12) имеем

$$a_n = \frac{f_0 + (-1)^n f_1}{2a\beta_n}$$

Условия (3) дают два уравнения, складывая и вычитая которые, найдем:

$$(f_0 + f_1) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta_{2n}} = 0, \quad (f_0 - f_1) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta_{2n+1}} = 0$$

Полагая, что f_0 и f_1 не обращаются одновременно в нуль, получим:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i}{\beta_{2n+1}} = 0 \quad \text{или} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta_{2n}} = 0 \quad (13)$$

Это и есть искомые уравнения для частот пластинки в потоке газа. Ограничимся исследованием только второго из уравнений (13). В пользу такого выбора говорят также результаты работы [2]. В сделанных в этой работе предположениях уравнение, аналогичное второму из уравнений (13), приводит к наименьшей скорости флаттера.

Расчетные формулы и результаты расчетов. Из второго уравнения (13) с использованием формул (7), (9) и (10) получим после оценки опущенных членов ряда:

Трехмерная нестационарная теория

$$\begin{aligned} & \left(1 - \Omega^2 - V\bar{\lambda} \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{M^2 - \varepsilon^2}}\right)^{-1} + \left(25 - \Omega^2 - V\bar{\lambda} \frac{(2 + \varepsilon)^2}{\sqrt{5M^2 - (2 + \varepsilon)^2}}\right)^{-1} + \\ & + \left(25 - \Omega^2 - V\bar{\lambda} \frac{(-2 + \varepsilon)^2}{\sqrt{5M^2 - (-2 + \varepsilon)^2}}\right)^{-1} + \left(289 - \Omega^2 - V\bar{\lambda} \frac{(4 + \varepsilon)^2}{\sqrt{17M^2 - (4 + \varepsilon)^2}}\right)^{-1} + \\ & + \left(289 - \Omega^2 - V\bar{\lambda} \frac{(-4 + \varepsilon)^2}{\sqrt{17M^2 - (-4 + \varepsilon)^2}}\right)^{-1} + 0.0025 = 0 \end{aligned}$$

Плоская стационарная теория (после отделения действительной и мнимой части)

$$\begin{aligned} & \frac{1 - \Omega^2}{(1 - \Omega^2)^2 + \lambda^* \varepsilon^2} + \frac{25 - \Omega^2}{(25 - \Omega^2)^2 + \lambda^* (2 + \varepsilon)^2} + \frac{25 - \Omega^2}{(25 - \Omega^2)^2 + \lambda^* (-2 + \varepsilon)^2 (25 - \Omega^2)^2} + \\ & + 2 \frac{289 - \Omega^2}{(289 - \Omega^2)^2 + 16 \lambda^*} + 0.0025 = 0 \\ & \frac{1}{(1 - \Omega^2)^2 + \lambda^* \varepsilon^2} + 2 \frac{(25 - \Omega^2)^2 - \lambda^* (4 - \varepsilon^2)}{[(25 - \Omega^2)^2 + \lambda^* (4 - \varepsilon^2)]^2 + 4 \lambda^* \varepsilon^2} \frac{1}{(25 - \Omega^2)^2} + 0.00003 = 0 \quad (14) \end{aligned}$$

Плоская статическая теория

$$\frac{1}{1 - \Omega^2} + 2 \left[\frac{25 - \Omega^2}{(25 - \Omega^2)^2 + 4 \lambda^*} + \frac{289 - \Omega^2}{(289 - \Omega^2)^2 + 16 \lambda^*} \right] + 0.0025 = 0 \quad (15)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Omega^2 &= \frac{12 \rho a^2 (1 - \sigma^2)}{\pi^4 E (h/a)^2} \omega^2, & \lambda &= k_2^2 M^2, & \lambda^* &= k_2^2 \frac{M^4}{M^2 - 1}, & \varepsilon &= \frac{k_1 \Omega}{M} \\ k_1 &= \frac{\pi}{c} \frac{h}{a} \sqrt{\frac{E}{12 \rho (1 - \sigma^2)}}, & k_2 &= \frac{24 \rho_0 c^2 (1 - \sigma^2)}{\pi^3 E (h/a)^3} \end{aligned}$$

Заменяя в формулах (14) величину λ^* на λ , получим формулы для линейного приближения теории поршня. Такая же замена в (15) даст формулу для статической теории при больших M . Все расчеты проведены при $M > 1$ и $\Omega^2 < 25$ для ρ_0 и c , соответствующих высотам полета 0 и 11 км. В расчетах принято

$$\rho = 2.85 \cdot 10^{-6} \text{ кгсм}^{-3}, \quad E = 0.72 \cdot 10^6 \text{ кгсм}^{-2}, \quad \sigma = 0.33$$

Расчеты выполнены методом подбора.

Результаты расчета представлены на фиг. 2 в виде кривых $M = f(h/a)$. 1 — трехмерная нестационарная теория; 2 — плоская стационарная теория и плоская статическая теория; 3 — линейное приближение теории поршня и статическая теория при больших M . Расчетные кривые для плоской стационарной и плоской статической теории совпадают с точностью до построения. То же относится к линейному приближению теории поршня и статической теории при больших M .

Расчет по трехмерной нестационарной теории дает результаты, несколько отличающиеся от результатов расчетов по приближенным теориям.

Отличие по относительным толщинам (при фиксированном M) невелико и составляет 9—12% при $M > 2$; отличие по числам M значительно больше и даже при сравнительно высоких M (5 и выше) составляет 18—22%.

Часть расчетов выполнена студентом ТГУ им. В. В. Куйбышева Щелоковым А. В., за что автор приносит ему свою благодарность.

Поступила
20 XII 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Hedgepeth J. M., Budiansky B., Leonard R. W. Analysis of Flutter in Compressible Flow of a Panel on Many Supports. JAS, 1954, vol. 21, No. 7, pp. 475—486.
2. Leonard R. W., Hedgepeth J. M. On the Flutter of Infinitely Long Panels on Many Supports, JAS, 1957, vol. 24, No. 5, Readers' Forum.