

О ДИНАМИЧЕСКОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ТОНКИХ  
ПЛАЗМЕННЫХ ШНУРОВ

*М. Г. Нижулин*

(Москва)

Найдена функция Рауса для тонкого плазменного шнура (тороидального и прямого), испытывающего плавные длинноволновые возмущения типа змеек и перетяжек, в том случае, когда внешнее магнитное поле является комбинацией квадрупольного и продольного полей. Кратко обсуждаются различные варианты динамической стабилизации шнура. Методом усреднения по быстрым осцилляциям исследуется комбинированная динамическая стабилизация прямого шнура с переменным током постоянными квадрупольным и продольным полями.

В работах [1, 2] развит метод исследования устойчивости тонких плазменных шнуров относительно длинноволновых возмущений типа змеек и перетяжек, основанный на том, что плазменный шнур с током рассматривается как электромеханическая система, для которой вычисляется функция Рауса, позволяющая получить уравнения движения шнура вблизи положения равновесия. Этот метод оказывается особенно эффективным при решении задач о динамической стабилизации плазменных шнуров квазистационарными высокочастотными магнитными полями. Как показано в [2], для подобных систем функция Рауса  $R$  может быть записана в виде

$$R = T - W \quad (0.1)$$

Здесь  $T$  — кинетическая, а  $W$  — обобщенная потенциальная энергия, равная сумме внутренней  $U$  и собственной магнитной энергии системы  $W_m$

$$W = U + W_m \quad (0.2)$$

Зная выражения для  $T$  и  $W$ , легко получить потенциальную энергию усредненного по высокочастотным осцилляциям движения в виде квадратичной формы с постоянными коэффициентами, дальнейшее исследование которой уже не представляет труда. Пользуясь методом усреднения, можно сразу оценить эффективность того или иного варианта динамической стабилизации. При необходимости исследования резонансных явлений, характерных для систем с периодически меняющимися параметрами, могут быть непосредственно рассмотрены уравнения движения, получаемые с помощью функции Рауса.

В данной работе найдена собственная магнитная энергия  $W_m$  тонкого кругового плазменного кольца, испытывающего плавные длинноволновые возмущения типа змеек и перетяжек, в том случае, когда внешнее магнитное поле является комбинацией квадрупольного и продольного полей. Вместе с механическим лагранжианом  $L$  ( $L = T - U$ ), вычисленным в [1],  $W_m$  составляет функцию Рауса

$$R = L - W_m \quad (0.3)$$

Путем предельного перехода найден погонный раусиан бесконечного прямого шнура. На основании полученных результатов кратко обсуждаются известные способы стабилизации изгибов плазменного шнура: квадрупольным и продольным магнитными полями, а также исследуется (методом усреднения) совместное воздействие этих полей на прямой шнур с переменным током высокой частоты.

1. Рассмотрим тонкое круговое плазменное кольцо с малым радиусом  $a$  и большим радиусом  $b$ ,  $b \gg a$ . Плазма предполагается идеально проводящей, сжимаемой и невязкой. Кольцо находится во внешнем магнитном поле, имеющем относительно шнура продольную и поперечную компоненты. Основное поперечное поле возбуждает в кольце продольный ток и служит для обеспечения равновесия кольца по большому радиусу. Кроме того, в окрестности плазменного шнура имеется дополнительное поперечное поле квадрупольной структуры, стабилизирующее шнур относительно возмущений типа змеек. Магнитные поля и наводимые ими токи могут иметь высокочастотные составляющие.

Возмущения кольца будем описывать малыми по сравнению с единицей функциями  $\varepsilon(\varphi, t)$ ,  $\delta(\varphi, t)$  и  $\alpha(\varphi, t)$

$$\varepsilon, \delta, \alpha \ll 1 \tag{1.1}$$

при помощи которых уравнения осевой линии и малого радиуса кольца запишутся в виде

$$r(\varphi, t) = b[1 + \varepsilon(\varphi, t)], \quad z(\varphi, t) = b\delta(\varphi, t), \quad a_\perp(\varphi, t) = a[1 + \alpha(\varphi, t)] \tag{1.2}$$

Здесь  $r, \varphi, z$  — цилиндрические координаты осевой линии шнура,  $a_\perp$  — переменный радиус поперечного сечения, перпендикулярного возмущенной оси, которое, таким образом, считается круговым.

Удобно ввести дискретное описание, разложив  $\varepsilon, \delta$  и  $\alpha$  в ряды Фурье вида

$$\varepsilon(\varphi, t) = \varepsilon_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} [\varepsilon_{nc}(t) \cos n\varphi + \varepsilon_{ns}(t) \sin n\varphi] \tag{1.3}$$

Возмущения шнура будем считать плавными, т. е. такими, для которых смещение  $\xi$  удовлетворяет неравенству

$$k\xi_k \ll 1 \tag{1.4}$$

где  $k = n/b$  — волновое число данного возмущения. Так как  $\xi \sim b\varepsilon, b\delta, a\alpha$ , то (1.4) можно записать в виде

$$n\varepsilon_{nc}(s), \quad n\delta_{nc}(s), \quad n\frac{a}{b}\alpha_{nc}(s) \ll 1 \tag{1.5}$$

Условия (1.5) для  $\varepsilon$  и  $\delta$  являются более жесткими, чем (1.1), и означают, что в разложениях типа (1.3) высшие гармоники имеют исчезающе малый вес. Будем также считать, что изгибы шнура «переразвиты», т. е.  $\xi \gg a$  или, что то же,  $\varepsilon, \delta \gg a/b$ . Таким образом, в рассматриваемом случае для изгибов выполняются неравенства

$$ka \ll k\xi_k \ll 1 \tag{1.6}$$

Заметим, что при обычном магнитогидродинамическом подходе  $k\xi_k \ll ka$ , зато  $ka$  может быть произвольным.

В принятых выше предположениях кинетическая и внутренняя энергии определяются выражениями [1]

$$T = \frac{1}{4} Mb^2 \left\{ \left( \frac{a}{b} \right)^2 \alpha_0'^2 + 2(\varepsilon_0'^2 + \delta_0'^2) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{4}{n^2} (\alpha_n'^2 + \alpha_n \varepsilon_n') + \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right) \varepsilon_n'^2 + \delta_n'^2 \right] \right\} \tag{1.7}$$

$$U = U^{(0)} - p_0 V^{(0)} [2\alpha + \varepsilon + 2\alpha\varepsilon + \alpha^2 + \frac{1}{2}(\varepsilon'^2 + \delta'^2)] - \frac{1}{2} \gamma (2\alpha_0 + \varepsilon_0)^2 \tag{1.8}$$

Здесь

$$\alpha_n^{\cdot 2} = \alpha_{nc}^{\cdot 2} + \alpha_{ns}^{\cdot 2}, \quad \alpha_n^{\cdot} \varepsilon_n^{\cdot} = \alpha_{nc}^{\cdot} \varepsilon_{nc}^{\cdot} + \alpha_{ns}^{\cdot} \varepsilon_{ns}^{\cdot}$$

$\varepsilon_n^{\cdot 2}$  и  $\delta_n^{\cdot 2}$  имеют структуру, аналогичную  $\alpha_n^{\cdot 2}$ ;  $M$  — масса кольца;  $p_0$  — равновесное газовое давление;  $\gamma$  — показатель адиабаты; верхним индексом (0) отмечены некоторые равновесные величины, точка в позиции штриха означает дифференцирование по времени, штрих — дифференцирование по  $\varphi$ , а угловые скобки — усреднение по  $\varphi$

$$\langle f(\varphi) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi$$

Функции  $T$  и  $U$  получены в предположении глобальной адиабатичности, когда газовое давление связано уравнением адиабаты с полным объемом кольца.

2. Найдем теперь собственную магнитную энергию кольца  $W_m$ . Как показано в [2], в «локально-цилиндрическом» приближении, когда шнур на участках, малых по сравнению с длиной волны возмущения, можно считать цилиндром, а внешнее поле мало меняется на расстоянии порядка радиуса шнура  $a$

$$W_m = \frac{(\Phi_0 - \Phi^e)^2}{2L} + \frac{1}{8\pi} \int [(\mathbf{B}^e \cdot \boldsymbol{\tau})^2 - 2\mathbf{B}^{e2}] dV + \frac{\Phi_i^2}{8\pi} \int \frac{rdl}{S} \quad (2.1)$$

Здесь  $\Phi_0$  и  $\Phi_i$  — сохраняющиеся вследствие идеальной проводимости полный поток магнитного поля через кольцо и поток вмороженного в плазму поля через поперечное сечение шнура,  $\Phi^e$  — поток внешнего поля  $\mathbf{B}^e$  через возмущенное кольцо,  $L$  — коэффициент самоиндукции кольца для продольного тока,  $\boldsymbol{\tau}$  — единичный вектор касательной к осевой линии шнура,  $S$  — площадь поперечного сечения.

В рассматриваемом случае компоненты внешнего магнитного поля  $\mathbf{B}^e$  в окрестности равновесного кольца с точностью до квадратичных по  $z$  и  $r - b$  членов можно представить в виде

$$B_r^e = zG(t), \quad B_\varphi^e = \frac{b}{r} B_e(t), \quad B_z^e = B_b(t) + (r - b)G(t) \quad (2.2)$$

$$(G = G_b + G_q = (\partial B_z^e / \partial r)_{r=b, z=0})$$

Здесь  $B_e$  и  $B_b$  — значения продольного и поперечного полей на окружности  $r = b, z = 0$ ;  $G_b$  и  $G_q$  — градиенты основного и стабилизирующего поперечных полей в окрестности равновесного шнура.

Будем считать, что  $B_b, G_b$  и продольный ток  $I$ , наводимый в кольце основным поперечным полем, зависят от времени как  $f(t) = f_0 + f_1 \cos \omega t$ , причем в случае, когда обе составляющие отличны от нуля они связаны соотношением

$$I_1 / I_0 = B_{b1} / B_{b0} = G_{b1} / G_{b0} \quad (2.3)$$

Это условие позволяет значительно упростить уравнения движения кольца.

Опуская громоздкие промежуточные выкладки, приведем окончательное выражение для собственной магнитной энергии кольца  $W_m$ , полученное по формуле (2.1) с учетом (1.2), (2.2), (2.3) и выражения для  $L$ , найдем

ГО В [1]

$$\begin{aligned}
 W_m = & W_m^{(0)} + V^{(0)} \{ 2(p_a + p_e - p_i) \alpha_0 + [(K - 2)p_a - p_e + p_i] \varepsilon_0 - \\
 & - \frac{2(l + 4 - K)}{l} p_a \alpha_0 \varepsilon_0 + \frac{4}{l} p_a \alpha_0^2 + (p_e + 3\bar{p}_i - p_a) \langle \alpha^2 \rangle + \\
 & + \frac{(l + 4 - K)^2 - 4l}{4l} p_a \varepsilon_0^2 + \left[ \frac{1}{2} (l + K) p_a + p_e \right] \langle \varepsilon^2 \rangle + 2(p_a - p_e - p_i) \langle \alpha \varepsilon \rangle - \\
 & - \frac{1}{2} p_a \sum_{n=1}^{\infty} n^2 [(\Lambda - g_r(n)) \varepsilon_n^2 + (\Lambda - g_z(n)) \delta_n^2] + \\
 & + \frac{1}{2} (3p_e + p_i) \langle \varepsilon' + \delta' \rangle + \frac{aG B_a}{4\pi} \left( \frac{b}{a} \right)^2 \langle \varepsilon^2 - \delta^2 \rangle - \\
 & - \frac{B_e B_a}{2\pi} \left[ \frac{b}{a} \langle \varepsilon \delta' \rangle + \frac{1}{4} (l + K) \frac{a}{b} \langle \alpha \delta' \rangle \right] \}
 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 p_e = B_e^2 / 8\pi, \quad p_i = B_i^2 / 8\pi \quad (B_i = \Phi_i / \pi a^2), \quad p_a = B_a^2 / 8\pi \quad (B_a = 2I^{(0)} / ca) \\
 K = 4b B_b / a B_a - l, \quad l = 2(\Lambda - 2), \quad \Lambda = \ln(8b/a)
 \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$g_r(n) = 2 \left( 1 - \frac{1}{4n^2} \right) \sum_{i=1}^n \frac{1}{2i-1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n^2}, \quad g_z(n) = 2 \left( 1 - \frac{3}{4n^2} \right) \sum_{i=1}^n \frac{2}{2i-1} + \frac{1}{2}$$

Отметим, что определяемый формулами (2.5) параметр  $K$  постоянен ввиду (2.3). Отношение  $B_b / B_a$  считается положительным, когда направления полей  $B_b$  и  $B_a$  совпадают на внешней стороне кольца.

При выводе (2.4) предполагалось, что  $B_a \gg B_b, aG$ . Более строгое (по сравнению с принятым здесь локально-цилиндрическим) рассмотрение дает в выражении для  $W_m$  относительно малые поправки порядка  $a/b$ .

Магнитная энергия  $W_m$  (2.4) вместе с выражениями для  $T$  (1.7) и  $U$  (1.8) согласно (0.1) — (0.3) дает обобщенную потенциальную энергию  $W$  и функцию Рауса  $R$  возмущенного плазменного кольца.

Приравнявая нулю постоянные составляющие коэффициентов при  $\alpha_0$  и  $\varepsilon_0$  в потенциальной энергии  $W = U + W_m$ , получим условия равновесия кольца по малому и большому радиусам

$$\bar{p}_a + \bar{p}_e - p_i - p_0 = 0, \quad (K - 2)\bar{p}_a - \bar{p}_e + p_i - p_0 = 0 \quad (2.6)$$

Здесь и ниже прямая черта сверху означает усреднение по времени. Строго говоря, в случае высокочастотных полей, когда радиусы кольца совершают вынужденные колебания, условия (2.6) отражают тот факт, что эти колебания происходят около значений  $a$  и  $b$  соответственно.

3. Полученные выше результаты позволяют в принципе исследовать равновесие и устойчивость плазменного кольца при различных схемах стабилизации с использованием квадрупольного и продольного полей. Однако из-за наличия связи между отдельными модами возмущения строгое аналитическое исследование устойчивости представляет довольно сложную задачу.

Ситуация значительно упрощается в предельном случае бесконечного прямого шнура: в частности, исчезает связь между возмущениями типа змеек и перетяжек. Результаты исследования устойчивости прямого шнура должны быть применимы и для кольцевого шнура малой тороидальности, во всяком случае для возмущений с  $n \gg 1$ .

Чтобы осуществить предельный переход к прямому шнуру, положим  $x = b\varepsilon, z = b\delta, \rho = a\alpha$  и устремим  $b$  и  $n$  к бесконечности при конечном

отношении  $n/b = \kappa$ . Для погонных кинетической  $T_1$  и потенциальной  $W_1$  энергий получим выражения

$$T_1 = \frac{1}{2} \pi a^2 \sigma_0 \left\{ \frac{1}{2} \rho_0^2 + x_0^2 + z_0^2 + \sum_{k \neq 0} \left[ 2 \frac{\rho_k^2}{(ka)^2} + \frac{1}{2} (x_k^2 + z_k^2) \right] \right\} \quad (3.1)$$

$$W_1 = W_1^{(0)} + \pi \{ 2(p_{c\omega} + p_{e\omega}) a \rho_0 + 2\gamma p_0 \rho_0^2 + (p_e + 3p_i - p_a - p_0) \langle \rho^2 \rangle + \\ + \frac{1}{2} \sum_{k \neq 0} (ka)^2 \left[ p_e + p_i - p_a \ln \frac{2}{\beta ka} + \frac{1}{2} (p_{a\omega} + p_{e\omega}) \right] (x_k^2 + z_k^2) + \\ + \frac{aG_q B_a}{4\pi} \langle x^2 - z^2 \rangle + \frac{B_e B_a}{4\pi} \sum_{k \neq 0} ka (x_{ks} z_{kc} - x_{kc} z_{ks}) \} \quad (3.2)$$

Здесь  $\rho$ ,  $x$  и  $z$  разложены в ряды вида (1.3), в которых вместо  $\rho$  стоит  $ky$ , где  $y$  — координата, отсчитываемая вдоль оси невозмущенного шнура;  $\sigma_0$  — равновесная плотность плазмы;  $\ln \beta = 0.577\dots$  — постоянная Эйлера; индексом  $\omega$  отмечены высокочастотные составляющие соответствующих величин.

Рассмотрим подробнее устойчивость шнура относительно возмущений изгиба. Кинетическая энергия (3.1) для изгибов принимает вид

$$T_1 = \frac{1}{2} \pi a^2 \sigma_0 \sum_{k \neq 0} (x_k^2 + z_k^2) \quad (3.3)$$

Приращение  $W_1^{(1)}$  потенциальной энергии (3.2) удобно представить в форме

$$W_1^{(1)} = \frac{1}{2} \pi \bar{p}_a \sum_{k \neq 0} [C_k (x_k^2 + z_k^2) + D_q (x_k^2 - z_k^2) + 2D_{ek} (x_{ks} z_{kc} - x_{kc} z_{ks})] \quad (3.4)$$

Здесь

$$C_k = (ka)^2 [p_e^* + p_i^* - p_a^* \ln(2/\beta ka) + 1/2 (p_{a\omega}^* + p_{e\omega}^*)]$$

$$D_q = aG_q B_a / 4\pi \bar{p}_a, \quad D_{ek} = ka B_e B_a / 4\pi \bar{p}_a$$

а звездочкой отмечены отношения соответствующих величин к  $\bar{p}_a$ . В дальнейшем, если это не будет вызывать осложнений, индекс  $k$  будем опускать.

Перейдем к новым координатам  $u$  и  $v$  по формулам

$$\sqrt{2} x_{kc} = u_{kc} + v_{ks}, \quad \sqrt{2} z_{kc} = v_{kc} + u_{ks} \\ \sqrt{2} x_{ks} = u_{ks} - v_{kc}, \quad \sqrt{2} z_{ks} = v_{ks} - u_{kc}$$

При этом

$$T_1 = \frac{1}{4} \pi a^2 \sigma_0 \sum_{k \neq 0} (u_k^2 + v_k^2) \quad (3.5)$$

$$W_1^{(1)} = \frac{1}{2} \pi \bar{p}_a \sum_{k \neq 0} [C_k (u_k^2 + v_k^2) + D_{ek} (u_k^2 - v_k^2) + 2D_q (u_{ks} v_{kc} - u_{kc} v_{ks})] \quad (3.6)$$

$$(u_k^2 = u_{kc}^2 + u_{ks}^2, \quad v_k^2 = v_{kc}^2 + v_{ks}^2)$$

Сравнивая выражения (3.3), (3.4), с одной стороны, и (3.5), (3.6), с другой, замечаем, что для системы с одним квадрупольным полем, когда  $D_e = 0$ , нормальными колебаниями являются плоские змейки  $x$ ,  $z$ , а для системы с одним продольным полем, когда  $D_q = 0$ , нормальными колебаниями являются  $u$  и  $v$ . Последнее, как нетрудно убедиться, представляют собой пространственные винты, соответствующие возмущениям с азимутальным волновым числом  $m = \pm 1$  при обычном магнитогидродинамическом подходе.

Формальное сходство выражений для  $W_1^{(1)}$  (3.4) и (3.6) свидетельствует об определенной аналогии, существующей между двумя рассматриваемыми способами стабилизации: квадрупольным и продольным полями. Однако различие коэффициентов не позволяет непосредственно перенести результаты исследования одного способа стабилизации на другой.

Уравнения движения в обоих частных случаях, когда есть или только квадрупольное или только продольное поле, можно записать в виде

$$\xi'' + \Omega^2(C \pm D)\xi = 0 \quad (\Omega^2 = 2\bar{p}_a / a^2\epsilon_0) \quad (3.7)$$

Здесь  $\Omega$  — некоторая характерная частота системы, знак плюс берется для координат  $z$  и  $v$ , а знак минус — для  $x$  и  $u$ .

В случае постоянных полей условие устойчивости решения уравнения (3.7), очевидно, есть  $C - D > 0$ . Отсюда сразу следует, что шнур с постоянным током без стабилизирующего поля неустойчив.

Действительно, при этом  $D = 0$ , а  $C = -(ka)^2 \ln(2/\beta ka) < 0$  для достаточно длинноволновых возмущений. Постоянное квадрупольное поле не стабилизирует шнур (в принятом приближении оно даже не входит в выражение для коэффициента  $C$ ). В то же время большое постоянное продольное поле может обеспечить устойчивость: выбирая  $B_e = B_i \gg B_a$ , приходим к известному критерию Шаффранова — Крускала

$$B_e > B_a / ka \quad (3.8)$$

Если ток в шнуре или внешнее поле меняется с высокой частотой, возможности стабилизации значительно расширяются: оказывается возможной стабилизация квадрупольным полем, а в случае продольного поля удастся существенно ослабить критерий (3.8).

Различные варианты динамической стабилизации тонкого шнура с использованием квадрупольного поля рассмотрены в работах [1,3]. С помощью приведенных выше уравнений аналогично решается задача о динамической стабилизации тонкого плазменного шнура продольным магнитным полем. Получающиеся при этом результаты фактически совпадают с теми, которые получены обычным магнитогидродинамическим методом в работах [4,5]. Разработанный выше аппарат позволяет исследовать и общий случай, когда имеются оба стабилизирующих поля — продольное и квадрупольное. В следующем разделе такое исследование приведено для одного из вариантов комбинированной динамической стабилизации, когда в шнуре возбуждается высокочастотный ток, а стабилизирующие поля постоянны.

4. Известно (см., например, [1,3-5]), что квадрупольное магнитное поле лучше стабилизирует длинноволновые изгибы токнесущего плазменного шнура, а продольное — коротковолновые.

Естественно предположить, что, комбинируя квадрупольное поле с продольным, можно расширить диапазон стабилизируемых возмущений или соответственно уменьшить величины стабилизирующих полей. Наиболее целесообразной представляется система, в которой шнур с переменным током  $I^{(0)} = I_1 \cos \omega t$  стабилизируется постоянными квадрупольным и продольным полями. Для коэффициентов потенциальной энергии при этом имеем

$$C = C_0 + C_2 \cos 2\omega t, \quad D_q = D_{q1} \cos \omega t, \quad D_e = D_{e1} \cos \omega t$$

где  $C_0, C_2, D_{q1}$  и  $D_{e1}$  постоянны. При такой зависимости  $D_q$  и  $D_e$  от времени координаты  $x$  и  $z$  (или  $u$  и  $v$ ) входят в выражение для  $W_1^{(1)}$ , как и в выражение для  $T_1$ , совершенно симметрично. В этом случае, как известно (см., например, [6]), в системе имеет место так называемый «разностный» резонанс связи, при котором происходит перекачка энергии из одного парциального колебания в другое, а суммарная энергия остается постоянной и, следовательно, амплитуда каждого из колебаний не может неограниченно возрастать. Таким образом, связь в данном случае не нарушает устойчивости системы: если шнур устойчив с одним из стабилизирующих полей, то он остается устойчивым и при введении другого поля. Это означает, что критерии устойчивости, полученные для шнура с переменным током в квадрупольном [3] и продольном [5] полях, являются достаточными условиями устойчивости и в общем случае комбинированной стабилизации.

Одновременный учет обоих стабилизирующих полей должен, очевидно, привести к менее жесткому, чем в [3] или [5], критерию устойчивости. Однако провести этот учет строго, исследуя систему связанных уравнений с периодическими коэффициентами, весьма затруднительно. Поэтому, имея в виду сказанное выше, ограничимся рассмотрением усредненного по быстрым осцилляциям движения, предполагая, что частота  $\omega$  значительно превышает характерную частоту колебаний или инкремент неустойчивости системы в отсутствие осцилляций.

Эффективная потенциальная энергия усредненного движения определяется по формуле [7]

$$W_{eff} = \overline{W} + \frac{1}{2} \sum_j \frac{1}{\omega_j^2} \sum_{i,k} a_{ik}^{-1} \frac{\partial W_{j\omega}}{\partial \xi_i} \frac{\partial W_{j\omega}}{\partial \xi_k}$$

Здесь  $W_{j\omega}$  — составляющая потенциальной энергии, осциллирующая с частотой  $\omega_j$ ;  $a_{ik}^{-1}$  — элементы матрицы, обратной матрице коэффициентов в кинетической энергии системы. В рассматриваемом случае после соответствующих выкладок получаем

$$W_{eff}^{(1)} = \frac{1}{2} \pi \bar{p}_a \sum_{k \neq 0} (ka)^2 \left\{ p_e^* + p_i^* - \ln \frac{2}{\beta ka} + \frac{4}{v^2} \left[ \frac{p_q^*}{(ka)^2} + p_e^* + \frac{1}{32} (ka)^2 \left( \ln \frac{2}{\beta ka} - \frac{1}{2} \right)^2 \right] \right\} (x_k^2 + z_k^2) \quad (4.1)$$

где  $v = \omega / \Omega$ , а  $p_q = (aG_q)^2 / 8\pi$ . Важной особенностью выражения (4.1) является отсутствие перекрестных членов. Это означает, что в плавном движении отдельные гармоники возмущения не связаны между собой, т. е. являются нормальными модами системы.

Условие применимости метода усреднения имеет вид

$$v^2 \gg (ka)^2 \left| p_e^* + p_i^* - \ln \frac{2}{\beta ka} \right|, p_q^{*1/2} \quad (4.2)$$

Если, учитывая (4.2), пренебречь в (4.1) последним слагаемым в квадратных скобках, то критерий устойчивости шнура относительно изгибов запишется в виде

$$p_q^* / (ka)^2 + (1 + 1/4 v^2) p_e^* + 1/4 v^2 p_i^* > 1/4 v^2 \ln(2/\beta ka) \quad (4.3)$$

Полагая  $p_q^* = 0$  или  $p_e^* = 0$ , получаем условия устойчивости шнура в частных случаях, когда есть только одно продольное или квадрупольное, стабилизирующее поле.

Фиг. 1 и 2 иллюстрируют критерий (4.3) при  $B_e = B_i$  и  $v = 2$ , удовлетворяющем условию (4.2). Как и ожидалось, введение продольного поля позволяет уменьшить квадрупольное (точнее, его градиент) и тем сильнее, чем больше  $ka$ , т. е. чем меньше длина волны возмущения (фиг. 1), и, наоборот, квадрупольное поле дает возможность уменьшить продольное и тем сильнее, чем меньше  $ka$ , т. е. чем больше длина волны возмущения (фиг. 2).

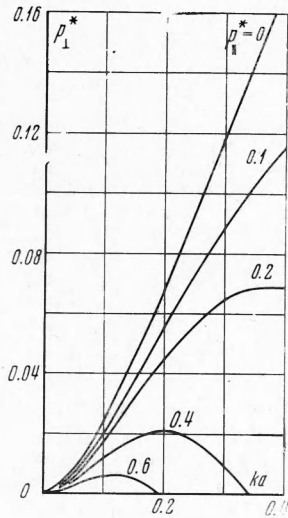
С увеличением параметра  $v$  стабилизирующие поля, как это видно из (4.3), растут, причем квадрупольное значительно быстрее, чем продольное.

Остановимся теперь кратко на устойчивости шнура относительно возмущений типа перетяжек. Как легко убедиться, для этих возмущений получаются формально те же уравнения, что и в [3] для случая  $B_e = 0$ . Если  $v \geq 1$ , то условие устойчивости собственно перетяжек ( $k \neq 0$ ) практически совпадает с известным критерием стабилизации заморожен-

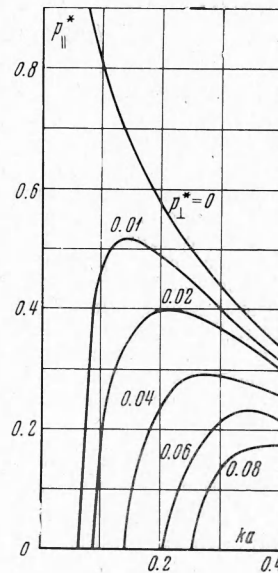
НЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

$$p_1^* > 1/2 \quad (4.4)$$

Колебания радиуса шнура при выполнении (4.4) также оказываются устойчивыми, если не принимать во внимание еще более узких, чем в [3], полос параметрического резонанса. Сужение резонансных областей



Фиг. 1



Фиг. 2

происходит вследствие увеличения жесткости системы за счет постоянного внешнего магнитного поля  $B_e$ .

Если известна относительная «цена» квадрупольного и продольного полей, то, пользуясь диаграммами, подобными приведенным на фиг. 1, 2, и учитывая критерий (4.4), можно подобрать оптимальный режим работы системы.

В заключение автор благодарит М. Л. Левина за полезные обсуждения и советы.

Поступила 3 II 1969

## ЛИТЕРАТУРА

1. Левин М. Л., Рабинович М. С. Метод сильной фокусировки для стабилизации прямых и тороидальных разрядов. Ж. техн. физ., 1963, т. 33, вып. 2.
2. Никулин М. Г. О функции Рауса тонкого плазменного шнура, ПМТФ, 1969, № 2.
3. Никулин М. Г. Стабилизация плазменного шнура с переменным током квадрупольным магнитным полем. ПМТФ, 1968, № 6.
4. Бобырев Н. А., Федянин О. И. Стабилизация цилиндра с током высокочастотным магнитным полем. Ж. техн. физ., 1963, т. 33, вып. 10.
5. Никулин М. Г. Динамическая стабилизация плазменного шнура в продольном магнитном поле. Ж. техн. физ., 1969, т. 39, вып. 12.
6. Коломенский А. А., Лебедев А. Н. Теория циклических ускорителей. М., Физматгиз, 1962.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. М., Физматгиз, 1958.