ПМТФ, № 5, 1962

КОНВЕКТИВНАЯ ДИФФУЗИЯ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ С УЧЕТОМ ЯВЛЕНИЯ АДСОРБЦИИ

Э. А. Бондарев, В. Н. Николаевский

(*Москва*)

Статистическое исследование [1] поля локальных скоростей жидкости в пористой среде позволило установить, что рассеивание добавленного в поток динамически нейтрального вещества описывается уравнением диффузионного типа, в некоторой степени аналогичным уравнению турбулентной диффузии. При этом предполагалось, что диффундирующие частицы не меняют свойств жидкости и параметров течения и не адсорбируются на стенках поровых каналов.

Однако большинство добавляемых в фильтрационные потоки меченых частиц в той или иной степени адсорбируется на стенках поровых каналов. В связи с этим представляет существенный интерес учет влияния адсорбции на процесс распространения динамически нейтральной примеси в потоках жидкости в пористых средах. Кроме того, в последнее время возникла проблема захоронения отходов ядерного горючего и сброса радиоактивных вод. Задача определения размеров получающейся при этом зоны загрязнения почвы радиоактивными материалами также непосредственно связана с проблемой распространения нейтральной примеси в фильтрационном потоке с учетом адсорбции.

Процесс диффузии в фильтрационном потоке адсорбируемых на стенках каналов частиц изучался ранее в связи с запросами химической промышленности, причем было показано, что адсорбция таких частиц на реальном зернистом адсорбенте описывается дифференциальными уравнениями [2,3], вполне аналогичными исследуемым в данной работе. В работах [2-7] были указаны некоторые приближенные решения.

1. В том случае, если диффундирующие в фильтрационном потоке частицы адсорбируются на стенках пор, уравнение материального баланса будет иметь вид

$$\frac{\partial a}{\partial t}+\frac{\partial c}{\partial t}=\operatorname{div}(D_{ij}\operatorname{grad}C-\mathbf{u}C)$$
$$(D_{ij}=(\lambda_1-\lambda_2)\,|u|\,\delta_{ij}+\lambda_2 u_i u_j/|u|) \qquad (1.1)$$

где a — концентрация сорбирующегося вещества в пористой среде (число частиц, приходящееся на единицу объема среды в точке x), C — концентрация того же вещества в жидкости, λ_1, λ_2 — коэффициенты продольного и поперечного рассеивания среды, u_i — компоненты средней скорости потока и D_{ij} — коэффициент конвективной диффузии [1].

Адсорбция вещества описывается кинетическим уравнением процесса

$$\frac{\partial a}{\partial t}=\beta(c-y) \qquad (1.2)$$

где β — суммарная константа скорости сорбции, y — концентрация вещества в потоке жидкости, находящегося в равновесии с концентрацией a адсорбировавшегося вещества в данной точке пористой среды. Наиболее простой вид функции $f(a)$, являющейся характеристикой сорбента, соответствует изотерме Генри [2,3,4]

$$y=a\gamma^{-1}\quad(\gamma\text{ — постоянная Генри}) \qquad (1.3)$$

Другой более сложный вид $f(a)$ соответствует изотерме Лэнгмюра [2]

$$a=\frac{y}{c_0+py} \qquad (1.4)$$

где c_0 — концентрация сорбирующегося вещества на входе, p — постоянная.

Следует иметь в виду, что при решении практических задач чаще всего приходится иметь дело с растворами небольшой концентрации, а в этих случаях, как известно, можно считать справедливыми закономерности линейной кинетики сорбции.

В дальнейшем будем рассматривать процесс сорбции вещества, подчиняющегося изотерме Генри (1.3). Тогда уравнение (2) примет вид

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \beta (c - a\gamma^{-1}) \qquad (1.5)$$

что приводит к задаче нахождения функций $c\ (x,\ t)$ и $a\ (x,\ t)$ из системы линейных уравнений (1.1) — (1.5). Заметим, что использование изотермы Лэнгмюра приводит к нелинейному уравнению кинетики сорбции, что резко усложняет исследование.

Ограничимся в дальнейшем рассмотрением одномерного потока. Исключая функцию $c\ (x,\ t)$ из системы (1.1)— (1.5), получаем

$$\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} + (\beta + k)\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(D\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - u\frac{\partial a}{\partial x}\right) + k\left(D\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - u\frac{\partial a}{\partial x}\right) \qquad \left(k = \frac{\beta}{\gamma}\right) \qquad (1.6)$$

Уравнение (1.6) в том случае, если $u=0$ и в левой части можно пренебречь второй производной по времени, переходит в упрощенное уравнение фильтрации однородной жидкости в трещиноватых пористых средах [6], а именно

$$\beta_0 \frac{\partial P}{\partial t} - \eta\beta_0 \frac{\partial^3 P}{\partial x^2\, \partial t} + \frac{k}{\mu}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \qquad (1.7)$$

где β_0, k, μ, η — постоянные среды и жидкости, P — давление в трещинах.

В связи с этим, для исследования решения уравнения (1.6) можно прибегнуть к способу, аналогичному предложенному в [6].

Решения уравнения (1.6) или системы (1.1)—(1.5) будут обычными решениями, если начальное распределение искомой функции непрерывно и граничные условия согласованы с начальными (т. е. предельные значения начального распределения при подходе к точкам границы равны граничным значениям соответствующих функций в начальный момент). Однако, если начальное распределение концентраций разрывно или же если начальное и граничное условие несогласованы, то получающееся текущее распределение также будет разрывным, и для правильной постановки соответствующих задач необходимо вывести условие на разрывах.

Пусть в достаточно малых окрестностях по обе стороны изолированной поверхности разрыва $x = 0$ (x — координата по нормали к поверхности разрыва) функция a непрерывна и удовлетворяет уравнению (1.6). В области $G\ (-h \leqslant x \leqslant h,\ 0 \leqslant t \leqslant T)$, где h — некоторое малое число, слагаемые уравнения (1.6) кусочнонепрерывны. Интегрируя почленно по области G, получаем

$$\int_{-h}^{h}\left\{\left(\frac{\partial a}{\partial t}\right)_{t=T} - \left(\frac{\partial a}{\partial t}\right)_{t=0} + (\beta + k)\, a_{t=T} - (\beta + k)\, a_{t=0}\right\} dx -$$
$$- \int_{0}^{T}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(D\frac{\partial a}{\partial x} - ua\right) + k\left(D\frac{\partial a}{\partial x} - ua\right)\right\}\Bigg|_{x=-h}^{x=h} dt = 0 \qquad (1.8)$$

При $h \to 0$ первый интеграл стремится к нулю и равенство (1.8) дает

$$\int_{0}^{T}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(D\frac{\partial a}{\partial x} - ua\right) + k\left(D\frac{\partial a}{\partial x} - ua\right)\right] dt = 0$$

Здесь знаком [ ] обозначается, как обычно, разность значений функций по обе стороны поверхности разрыва. Так как T произвольно и подынтегральное выражение — непрерывная функция времени, отсюда вытекает равенство нулю подынтегрального выражения

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(D\frac{\partial a}{\partial x} - ua\right) + k\left(D\frac{\partial a}{\partial x} - ua\right) = 0 \qquad (1.9)$$

Интегрируя (1.9), получаем условие на разрывах в виде

$$\left[D\frac{\partial a}{\partial x}-ua\right]=\left[D\frac{\partial a}{\partial x}-ua\right]_0 e^{-kt} \tag{1.10}$$

Для получения второго условия умножаем (1.6) на x и интегрируем по этой же области G

$$\int_{-h}^{h}\left\{\left(\frac{\partial a}{\partial t}\right)_{t=T}-\left(\frac{\partial a}{\partial t}\right)_{t=0}+(\beta+k)(a_{t=T}-a_{t=0})\right\}xdx-$$

$$-\int_0^T\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(Dx\frac{\partial a}{\partial x}-uxa\right)+k\left(Dx\frac{\partial a}{\partial x}-uxa\right)\right\}\Big|_{x=-h}^{x=h}dt+$$

$$+\int_0^T\left\{D\frac{\partial a}{\partial t}+kDa\right\}\Big|_{x=-h}^{x=h}dt+\int_0^T\int_{-h}^{h}\left(u\frac{\partial a}{\partial t}+kua\right)dxdt=0 \tag{1.11}$$

При $h\to 0$ первой и второй интегралы в (1.11) обращаются в нуль. Последний интеграл преобразуем следующим образом:

$$\int_0^T\int_{-h}^{h}\left(u\frac{\partial a}{\partial t}+kua\right)dx\,dt=\int_{-h}^{h}u\{a\}_0^T dx+k\int_{-h}^{h}u\left\{\int_0^T a dt\right\}dx \tag{1.12}$$

Из (1.12) следует, что при $h\to 0$ последний интеграл в (1.11) обращается в нуль. В результате из (1.11) получаем

$$D\int_0^T\left[\frac{\partial a}{\partial t}+ka\right]dt=0$$

так что второе условие на поверхности разрыва будет иметь вид

$$\frac{\partial[a]}{\partial t}+k[a]=0 \tag{1.13}$$

Интегрируя это уравнение, получаем окончательно

$$[a]=[a]_0 e^{-kt} \tag{1.14}$$

а из соотношения (1.10) с учетом (1.14) следует, что

$$\left[\frac{\partial a}{\partial x}\right]=\left[\frac{\partial a}{\partial x}\right]_0 e^{-kt} \tag{1.15}$$

Таким образом, возникающие из-за разрывных или несогласованных начальных условий скачки концентрации адсорбировавшегося вещества и ее нормальной производной не уничтожаются мгновенно как скачки температуры и потока тепла и теории теплопроводности и как скачки динамически нейтральной примеси (без учета адсорбции), а убывают по закону $\exp(-kt)$.

Однако, так как процесс определяется в большей степени заданием концентрации примеси в поступающей в адсорбент жидкости, необходимо исследовать поведение функции $c(x, t)$, если начальные и граничные условия для $a(x, t)$ разрывны или несогласованы. Сделаем это следующим образом. Из уравнения (1.5) получим

$$[c]=\frac{1}{\beta}\left\{\frac{\partial[a]}{\partial t}+k[a]\right\} \tag{1.16}$$

Отсюда с учетом (1.13) следует, что

$$[c]=0 \tag{1.17}$$

Для получения второго условия запишем уравнение (1.1) в виде

$$L_1(a, c)=\frac{\partial a}{\partial t}+\frac{\partial c}{\partial t}-D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}+u\frac{\partial c}{\partial x}=0$$

и проинтегрируем почленно по этой же области G

$$\int\limits_G L_1(a, c)\, dx\, dt = \int\limits_{-h}^{h} \{a_{t=T} - a_{t=0} + c_{t=T} - c_{t=0}\}\, dx -$$

$$-\int\limits_0^T \left[D\frac{\partial c}{\partial x} - uc\right]_{x=-h}^{x=h} dt = 0 \qquad (1.18)$$

При $h \to 0$ первый интеграл стремится к нулю и равенство (1.18) дает

$$\int\limits_0^T \left[D\frac{\partial c}{\partial x} - uc\right] dt = 0 \qquad (1.19)$$

Так как T произвольно, из (1.19) вытекает равенство нулю подинтегрального выражения

$$\left[D\frac{\partial c}{\partial x} - uc\right] = D\left[\frac{\partial c}{\partial x}\right] - u\,[c] = 0$$

Из предыдущего равенства с учетом (1.17) следует

$$\left[\frac{\partial c}{\partial x}\right] = 0 \qquad (1.20)$$

Таким образом, скачки концентрации меченых частиц в фильтрующейся жидкости будут затухать мгновенно, т. е. так же, как скачки температуры согласно теории теплопроводности.

Заметим, что из уравнений (1.1), (1.7) и (1.20) следует

$$\frac{\partial\,[a]}{\partial t} = D\left[\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}\right]$$

Отсюда с учетом (1.14) будем иметь

$$D\left[\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}\right] = -k\,[a]_0\, e^{-kt} \qquad (1.21)$$

и при $t \to 0$ получаем

$$D\left[\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}\right]_0 = -k\,[a]_0 \qquad (1.22)$$

т. е. наличие скачка в количестве адсорбированных частиц будет сказываться только на изменения второй производной от концентрации c.

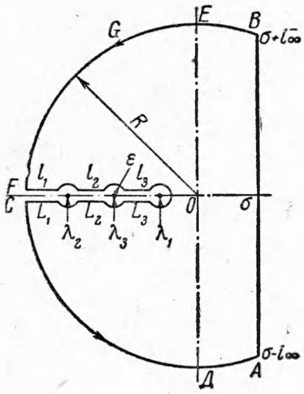
Таким образом, при постановке краевых задач для системы (1.1)—(1.5) нужно учитывать, что начальные скачки концентрации c и производной $\partial c/\partial x$ мгновенно размываются, а наличие скачка для a или $\partial a/\partial x$ в начальный момент времени необходимо приводит к условиям (1.14) или (1.15) соответственно в произвольный момент времени t. В том случае, если система (1.1)—(1.5) сводится к одному уравнению относительно c, то условию (1.14) будет соответствовать (1.21), а в начальный момент времени — условие (1.22).

2. Рассмотрим одномерную задачу о динамике сорбции в пористой среде, где имеет место продольная диффузия. Пусть в поглощающей пористой среде с линейной скоростью u движется жидкость, содержащая сорбирующее вещество концентрации c. На входе поддерживается постоянная концентрация сорбирующегося вещества c_0. В таком случае задача сводится к решению системы (1.1) — (1.5) при дополнительных условиях:

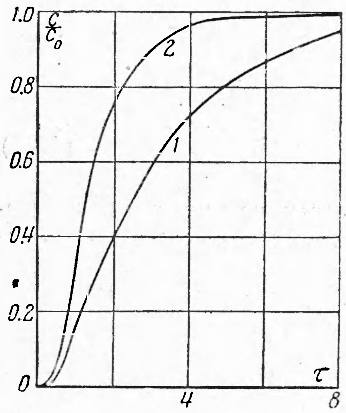
$$c(x, 0) = 0, \qquad a(x, 0) = 0, \qquad c(0, t) = c_0, \qquad c(\infty) = 0 \qquad (2.1)$$

Приведем систему (1.1) — (1.5) к безразмерному виду, вводя новые переменные

$$\xi = \frac{ux}{2D}, \qquad \tau = \frac{u^2 t}{4D}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

В этом случае вместо (1.1) — (1.5) получаем

$$\frac{\partial a}{\partial \tau} + \frac{\partial c}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial c}{\partial \xi} \tag{2.2}$$

$$\alpha\gamma \frac{\partial a}{\partial t} = \gamma c - a, \qquad \alpha = \frac{u^2}{4\beta D} \tag{2.3}$$

Решение системы (2.2) — (2.3) будем искать при следующих начальных и граничных условиях:

$$c(\xi, 0) = 0, \qquad a(\xi, 0) = 0$$

$$c(0, \tau) = c_0, \quad c(\infty) = 0 \tag{2.4}$$

Применяя преобразование Лапласа [9]

$$C(\xi, \lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda\tau} c(\xi, \tau)\, d\tau$$

$$A(\xi, \lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda\tau} a(\xi, \tau)\, d\tau$$

к системе (2.2) — (2.3) и исключая затем функцию $A(\lambda)$, получим для $C(\lambda)$ обыкновенное линейное уравнение

$$\frac{d^2C}{d\xi^2} - 2\frac{dC}{d\xi} - \left(\lambda + \frac{\gamma\lambda}{\alpha\gamma\lambda + 1}\right) C = 0 \tag{2.5}$$

решение которого должно удовлетворять граничным условиям

$$C(0, \lambda) = \frac{c_0}{\lambda}, \quad C(\infty) = 0 \tag{2.6}$$

Решение уравнения (2.5) при условиях (2.6) имеет вид

$$C(\xi, \lambda) = c_0 e^{\xi} \frac{1}{\lambda} \exp\left[-\xi \sqrt{\frac{(\lambda+\lambda_1)(\lambda+\lambda_2)}{\lambda+\lambda_3}}\right] \tag{2.7}$$

где

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha\gamma}\right) \mp \sqrt{\frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha\gamma}\right)^2 - \frac{1}{\alpha\gamma}}$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{\alpha\gamma} \tag{2.8}$$

Применяя к (2.7) известную формулу обращения, получаем

$$c(\xi, \tau) = c_0 e^{\xi} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \exp\left[\lambda\tau - \xi \sqrt{\frac{(\lambda+\lambda_1)(\lambda+\lambda_2)}{\lambda+\lambda_3}}\right] \frac{d\lambda}{\lambda} \tag{2.9}$$

Изображение $C(\lambda)$ имеет простой полюс в точке $\lambda = 0$ и вследствие наличия в качестве показателя экспоненты квадратного корня точки разветвления, определяются из соотношения (2.8).

Рассмотрим контур, изображенный на фиг. 1. Так как $\xi > 0$, то на дугах BF и CA интеграл (2.9) стремится к нулю при $R \to \infty$, а вдоль маленьких окружностей стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Вычет в точке $\lambda = 0$ равен exp $(-\xi)$. Таким образом, вместо (2.9) имеем

$$c(\xi, \tau) = c_0 \left(1 - e^{\xi} \frac{1}{2\pi i} \int_S \exp\left[\lambda\tau - \xi \sqrt{\frac{(\lambda+\lambda_1)(\lambda+\lambda_2)}{\lambda+\lambda_3}}\right] \frac{d\lambda}{\lambda}\right)$$

$$(S = l_1 + l_2 + l_3 + L_1 + L_2 + L_3) \tag{2.10}$$

Вычислим интеграл в (2.10), полагая $\lambda = re^{i\pi}$ на верхнем берегу разреза и $\lambda = re^{-i\pi}$ на нижнем берегу разреза

$$I = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda_2}^{\infty}\frac{e^{-r\tau}}{r}\exp\left[-i\xi\sqrt{\frac{(r-\lambda_1)(r-\lambda_2)}{r-\lambda_3}}\right]dr -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda_3}^{\lambda_2}\frac{e^{-r\tau}}{r}\exp\left[-\xi\sqrt{\frac{(r-\lambda_1)(\lambda_2-r)}{r-\lambda_3}}\right]dr -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda_1}^{\lambda_3}\frac{e^{-r\tau}}{r}\exp\left[-i\xi\sqrt{\frac{(r-\lambda_1)(\lambda_2-r)}{\lambda_3-r}}\right]dr +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda_1}^{\lambda_3}\frac{e^{-r\tau}}{r}\exp\left[+i\xi\sqrt{\frac{(r-\lambda_1)(\lambda_2-r)}{\lambda_3-r}}\right]dr +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda_3}^{\lambda_2}\frac{e^{-r\tau}}{r}\exp\left[-\xi\sqrt{\frac{(r-\lambda_1)(\lambda_2-r)}{r-\lambda_3}}\right]dr +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda_2}^{\infty}\frac{e^{-r\tau}}{r}\exp\left[+i\xi\sqrt{\frac{(r-\lambda_1)(r-\lambda_2)}{r-\lambda_3}}\right]dr =$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{\lambda_1}^{\lambda_3}\frac{e^{-r\tau}}{r}\sin\xi\sqrt{\frac{(r-\lambda_1)(\lambda_2-r)}{\lambda_3-r}}\,dr + \frac{1}{\pi}\int_{\lambda_2}^{\infty}\frac{e^{-r\tau}}{r}\sin\xi\sqrt{\frac{(r-\lambda_1)(r-\lambda_2)}{r-\lambda_3}}\,dr$$

Для концентрации $c(\xi, \tau)$ получаем окончательно

$$c(\xi,\tau) = c_0\left\{1 - \frac{e^{\xi}}{\pi}\left[\int_{\lambda_1}^{\lambda_3}\frac{e^{-r\tau}}{r}\sin\xi\sqrt{\frac{(r-\lambda_1)(\lambda_2-r)}{\lambda_3-r}}\,dr + \int_{\lambda_2}^{\infty}\frac{e^{-r\tau}}{r}\sin\xi\sqrt{\frac{(r-\lambda_1)(r-\lambda_2)}{r-\lambda_3}}\,dr\right]\right\} \tag{2.11}$$

Расчеты по формуле (2.11) могут быть выполнены различными численными методами интегрирования, причем для больших значений ξ наиболее удобен метод Филона [10].

Представляет интерес асимптотическое поведение решения (2.11) при малых значениях τ. Оценку поведения решения при малых τ можно дать, воспользовавшись решением (2.7) задачи в изображениях по Лапласу.

Разлагая в ряд показатель экспоненты в (2.7), получим для больших λ

$$\sqrt{\frac{(\lambda+\lambda_1)(\lambda+\lambda_2)}{\lambda+\lambda_3}} \approx \sqrt{\lambda}\left(1+\frac{b}{\lambda}\right) \qquad \left(b = \frac{\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3}{2} = \frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)$$

и тогда для малых τ будем иметь

$$C(\xi,\lambda) = c_0 e^{\xi}\frac{1}{\lambda}\,e^{-\xi\sqrt{\lambda}}e^{-b\xi\sqrt{\lambda}} \tag{2.12}$$

Разлагая в ряд по степеням λ функцию $\exp(-b\xi/\sqrt{\lambda})$ и ограничиваясь первыми тремя членами разложения, вместо (2.12) получаем

$$C(\xi,\lambda) = c_0 e^{\xi}\left(\frac{e^{-\xi\sqrt{\lambda}}}{\lambda} - b\xi\frac{e^{-\xi\sqrt{\lambda}}}{\lambda\sqrt{\lambda}} + \frac{b^2\xi^2}{2}\frac{e^{-\xi\sqrt{\lambda}}}{\lambda^2}\right)$$

Переходя от изображений к оригиналам и пользуясь разложением функций $\operatorname{erfc} x$ в ряд [11] при больших значениях x, имеем

$$c(\xi,\tau) = c_0\frac{2e^{\xi}}{\xi}\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4\tau}\right)\left[1 - 2\tau\left(b+\frac{1}{\xi^2}\right)\right] \tag{2.13}$$

Из (2.13) следует, что для малых τ значение концентрации c не зависит от коэффициента Генри γ. Результаты расчетов по формулам (2.11) и (2.13) для случая $\alpha = \gamma = 1$ приведены на фиг. 2 (кривая *1*).

Сравним решение (2.11) с решением соответствующей задачи теории распространения динамически нейтральной примеси в напорном фильтрационном потоке [12], которое получается из (2.11) при $\beta = 0$. Действительно из (2.8) следует, что в этом случае $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$, а $\lambda_2 = 1$ и решение (2.11) примет вид

$$c_1(\xi, \tau) = c_0 \left[1 - \frac{e^{\xi}}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{e^{-r\tau}}{r} \sin \xi \sqrt{r-1}\, dr\right] \qquad (2.14)$$

Вводя новую переменную $u = \sqrt{r-1}$ вместо (2.14), получим

$$c_1(\xi, \tau) = c_0 \left[1 - e^{\xi-\tau} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u^2\tau}}{u^2+1} \sin(\xi u) u du\right]$$

Однако

$$\frac{u}{u^2+1} = \int_0^{\infty} e^{-x} \sin ux\, dx$$

Следовательно,

$$c_1(\xi, \tau) = c_0 \left[1 - e^{\xi-\tau} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-u^2\tau} \left(\int_0^{\infty} e^{-x} \sin ux \sin u\xi dx\right) du\right] = \qquad (2.15)$$

$$= c_0 \left[1 - e^{\xi-\tau} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-x} \left\{\int_0^{\infty} e^{-u^2\tau} \left[\cos u(x-\xi) - \cos u(x+\xi)\right] du\right\} dx\right] =$$

$$= c_0 \left\{1 - e^{\xi-\tau} \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \left[\int_0^{\infty} \exp\left[-x - \frac{(x-\xi)^2}{4\tau}\right] dx - \int_0^{\infty} \exp\left[-x - \frac{(x+\xi)^2}{4\tau}\right] dx\right]\right\} =$$

$$= c_0 \left\{\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-z^2} dx - \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz - \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{z_-} e^{-z^2} dz + \right.$$

$$\left. + e^{2\xi} \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{z_+}^{\infty} e^{-z^2} dz\right\} = \frac{c_0}{2} \left[e^{2\xi} \operatorname{erfc}(z_+) + \operatorname{erfc}(z_-)\right] \qquad \left(z_{\pm} = \frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} \pm \sqrt{\tau}\right)$$

На фиг. 2 (кривая 2) приведены результаты расчетов по формуле (2.15) для сравнительной оценки влияния адсорбции на распространение динамически нейтральной примеси в фильтрационных потоках.

Поступила 8 VII 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Николаевский В. Н. Конвективная диффузия в пористых средах, ПММ, 1959, т. 20, вып. 6.
2. Жуховицкий А. А., Тихонов А. Н., Забежинский Я. Л. Поглощение газа из тока воздуха слоем зернистого материала. ЖФХ, 1945, т. 19, вып. 6.
3. Тихонов А. Н., Жуховицкий А. А., Забежинский Я. Л. Поглощение газа из тока воздуха слоем зернистого материала. ЖФХ, 1946, т. 20, вып. 10.
4. Рачинский В. В., Тодес О. М. Теория динамики ионного обмена. ЖФХ, 1956, т. 30, вып. 2.
5. Биксон Я. М. К оценке длины работающего слоя сорбента в динамике сорбции на реальном зернистом адсорбенте. ЖФХ, 1953, т. 27, вып. 10.
6. Шестаков В. М. К теории динамики сорбции при фильтрации в зернистых материалах. ЖФХ, 1961, т. 35, вып. 10.
7. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. Гостехиздат, 1953.
8. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5.
9. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. Пер. с нем. Физматгиз, М., 1960.
10. Трантер К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике Пер. с англ. Гостехиздат, М., 1956.
11. Carslaw H. D., Jaeger S. C. Conduction of heat in solids, Oxford, Clarendon press, 1959.
12. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. Гостехиздат. 1956.