УДК 539.3 : 548.053

Н. И. Остросаблин

НАИТЕСНЕЙШИЕ ГРАНИЦЫ ИЗМЕНЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ КОНСТАНТ УПРУГОСТИ АНИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ

В [1] дано представление тензора констант упругости для общего случая анизотропии в виде, обеспечивающем положительную определенность удельной энергии деформации и показывающем наитеснейшие границы для каждой постоянной упругости, там же имеются ссылки на работы, в которых этот вопрос рассматривался ранее и изучались общие свойства тензора констант упругости. Пределы изменяемости констант упругости исследовались и в [2, 3]. В [4] получены формулы для собственных модулей упругости и состояний для всех материалов кристаллографических сингоний.

В настоящей работе на основе представления из [1] для общего случая анизотропии даются явные формулы для практических констант упругости (модули Юнга, сдвига, объемный, коэффициенты Пуассона), показывающие пределы изменяемости этих постоянных. Приведены соответствующие формулы для констант упругости материалов всех кристаллографических сингоний, и установлены наитеснейшие (неулучшаемые) границы постоянных, обеспечивающие положительную определенность удельной энергии деформации.

1. В матричных обозначениях [1, 4] закон Гука и удельная энергия деформации записываются как

$$\sigma_i = A_{ij}\varepsilon_j, \quad \varepsilon_i = a_{ij}\sigma_j; \tag{1.1}$$

$$2\Phi = \sigma_i\varepsilon_i = A_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j = a_{ij}\sigma_i\sigma_j. \tag{1.2}$$

Здесь и далее повторяющиеся индексы означают суммирование от 1 до 6. Матрицы постоянных упругости A_{ij} и a_{ij} симметрические, квадратичная форма (1.2) положительно-определенная.

Как показано в [1], матрицы a_{ij}, A_{ij} представляются в виде

$$\begin{gathered} a_{ij} = d_1c_{i1}c_{j1} + d_2c_{i2}c_{j2} + d_3c_{i3}c_{j3} + \\ + d_4c_{i4}c_{j4} + d_5c_{i5}c_{j5} + d_6c_{i6}c_{j6}, \\ c_{ip} = 0 \ (p > i), \ c_{11} = \ldots = c_{66} = 1; \end{gathered} \tag{1.3}$$

$$\begin{gathered} A_{ij} = d_1^{-1}c_{1i}^{-1}c_{1j}^{-1} + d_2^{-1}c_{2i}^{-1}c_{2j}^{-1} + d_3^{-1}c_{3i}^{-1}c_{3j}^{-1} + d_4^{-1}c_{4i}^{-1}c_{4j}^{-1} + \\ + d_5^{-1}c_{5i}^{-1}c_{5j}^{-1} + d_6^{-1}c_{6i}^{-1}c_{6j}^{-1}, \\ c_{ip}^{-1} = 0 \quad (p > i), \quad c_{11}^{-1} = \ldots = c_{66}^{-1} = 1. \end{gathered} \tag{1.4}$$

При этом в (1.3), (1.4) имеем

$$d_1 > 0, \ d_2 > 0, \ d_3 > 0, \ d_4 > 0, \ d_5 > 0, \ d_6 > 0 \tag{1.5}$$

и элементы матрицы c_{ij}^{-1} вычисляются по рекуррентным формулам

$$c_{ij}^{-1} = \delta_{ij} - c_{ik}c_{kj}^{-1} \quad (k \leqslant i-1, \ i = 1, \ldots, 6) \tag{1.6}$$

(δ_{ij} — единичная матрица).

Условия (1.5) необходимы и достаточны для положительной определенности матриц a_{ij}, A_{ij} [1]. Задавая шесть положительных чисел d_k и 15 произвольных параметров c_{ik} $(i > k)$, по формулам (1.3), (1.4), (1.6) получаем пределы изменения каждой постоянной a_{ij} или A_{ij} для всех анизотропных материалов, какие только могут содержаться в законе Гука (1.1) (ср., например, с [3, 5]). Формулы (1.4), (1.6) позволяют просто находить A_{ij}, т. е. обратную матрицу для a_{ij}. Если a_{ij} заданы, то из (1.3) несложно найти d_k, c_{ik} [1] и проверить условия (1.5). Формулы (1.3), (1.4) совершенно равноправны, т. е. A_{ij} можно представить, как (1.3), тогда a_{ij} будет иметь вид (1.4).

Используя (1.3), (1.4), запишем удельную энергию деформации (1.2) следующим образом:

$$(1.7)\quad 2\Phi = d_1(\sigma_1 + c_{21}\sigma_2 + c_{31}\sigma_3 + c_{41}\sigma_4 + c_{51}\sigma_5 + c_{61}\sigma_6)^2 + d_2(\sigma_2 + c_{32}\sigma_3 + c_{42}\sigma_4 + c_{52}\sigma_5 + c_{62}\sigma_6)^2 + d_3(\sigma_3 + c_{43}\sigma_4 + c_{53}\sigma_5 + c_{63}\sigma_6)^2 + d_4(\sigma_4 + c_{54}\sigma_5 + c_{64}\sigma_6)^2 + d_5(\sigma_5 + c_{65}\sigma_6)^2 + d_6\sigma_6^2 =$$
$$= d_1^{-1}\varepsilon_1^2 + d_2^{-1}(c_{21}^{-1}\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 + d_3^{-1}(c_{31}^{-1}\varepsilon_1 + c_{32}^{-1}\varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2 + d_4^{-1}(c_{41}^{-1}\varepsilon_1 + c_{42}^{-1}\varepsilon_2 + c_{43}^{-1}\varepsilon_3 + \varepsilon_4)^2 + d_5^{-1}(c_{51}^{-1}\varepsilon_1 + c_{52}^{-1}\varepsilon_2 + c_{53}^{-1}\varepsilon_3 + c_{54}^{-1}\varepsilon_4 + \varepsilon_5)^2 + d_6^{-1}(c_{61}^{-1}\varepsilon_1 + c_{62}^{-1}\varepsilon_2 + c_{63}^{-1}\varepsilon_3 + c_{64}^{-1}\varepsilon_4 + c_{65}^{-1}\varepsilon_5 + \varepsilon_6)^2.$$

Вместо a_{ij} можно применять технические обозначения [6]:

$$(1.8)\qquad a_{ij} = \nu_{ij}/E_j = \nu_{ji}/E_i, \quad \nu_{11} = \ldots = \nu_{66} = 1$$

(по i, j не суммировать). Здесь E_1, E_2, E_3 — модули Юнга в направлении осей; $E_4 = 2\mu_{23}$, $E_5 = 2\mu_{13}$, $E_6 = 2\mu_{12}$ — модули сдвига; ν_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ — коэффициенты Пуассона; ν_{ij} $(i, j = 4, 5, 6)$ — коэффициенты Ченцова; ν_{ij} $(i = 1, 2, 3, j = 4, 5, 6$ или $j = 1, 2, 3, i = 4, 5, 6)$ — коэффициенты взаимного влияния. В (1.8) в отличие от традиционных обозначений перед коэффициентами Пуассона нет знака минус, это, на наш взгляд, является более естественным.

Пусть n_i, m_i $(i = 1, 2, 3)$ — два ортогональных направления: $n_in_i = 1$, $m_im_i = 1$, $n_im_i = 0$. Обозначим

$$(1.9)\qquad (n)_i = (n_1^2, n_2^2, n_3^2, \sqrt{2}\, n_2n_3, \sqrt{2}\, n_1n_3, \sqrt{2}\, n_1n_2),$$
$$(m)_i = (m_1^2, m_2^2, m_3^2, \sqrt{2}\, m_2m_3, \sqrt{2}\, m_1m_3, \sqrt{2}\, m_1m_2),$$
$$(nm)_i = (n_1m_1,\ n_2m_2,\ n_3m_3,\ \sqrt{2}(n_2m_3 + n_3m_2)/2, \sqrt{2}(n_1m_3 + n_3m_1)/2,\ \sqrt{2}(n_1m_2 + n_2m_1)/2).$$

Теперь, используя формулы (1.3) и (1.9), найдем практические константы упругости. Объемный модуль запишем как

$$(1.10)\qquad 1/K = a_{11} + a_{22} + a_{33} + 2(a_{21} + a_{31} + a_{32}) = d_1(1 + c_{21} + c_{31})^2 + d_2(1 + c_{32})^2 + d_3.$$

Из (1.10) видно, что объемный модуль всегда положителен (ср. с [6]). Модуль Юнга в направлении n_i представляется так:

$$(1.11)\quad 1/E_n = (n)_i a_{ij}(n)_j = d_1(n_1^2 + n_2^2c_{21} + n_3^2c_{31} + \sqrt{2}\, n_2n_3c_{41} + \sqrt{2}\, n_1n_3c_{51} + \sqrt{2}\, n_1n_2c_{61})^2 + d_2(n_2^2 + n_3^2c_{32} + \sqrt{2}\, n_2n_3c_{42} + \sqrt{2}\, n_1n_3c_{52} + \sqrt{2}\, n_1n_2c_{62})^2 + d_3(n_3^2 + \sqrt{2} n_2n_3c_{43} + \sqrt{2}\, n_1n_3c_{53} + \sqrt{2}\, n_1n_2c_{63})^2 + 2d_4(n_2n_3 + n_1n_3c_{54} + n_1n_2c_{64})^2 + 2d_5(n_1n_3 + n_1n_2c_{65})^2 + 2d_6(n_1n_2)^2.$$

Коэффициент Пуассона в направлении m_i при растяжении в направлении n_i имеет вид

$$(1.12)\quad \nu_{mn}/E_n = (m)_i a_{ij}(n)_j = d_1(m_1^2 + m_2^2c_{21} + m_3^2c_{31} + \sqrt{2}\, m_2m_3c_{41} + \sqrt{2}\, m_1m_3c_{51} + \sqrt{2}\, m_1m_2c_{61})(n_1^2 + n_2^2c_{21} + n_3^2c_{31} + \sqrt{2}\, n_2n_3c_{41} + \sqrt{2}\, n_1n_3c_{51} + \sqrt{2}\, n_1n_2c_{61}) + d_2(m_2^2 + m_3^2c_{32} + \sqrt{2}\, m_2m_3c_{42} +$$

$$+ \sqrt{2}\, m_1 m_3 c_{52} + \sqrt{2}\, m_1 m_2 c_{62}) (n_2^2 + n_3^2 c_{32} + \sqrt{2}\, n_2 n_3 c_{42} + \sqrt{2}\, n_1 n_3 c_{52} +$$
$$+ \sqrt{2}\, n_1 n_2 c_{62}) + d_3 (m_3^2 + \sqrt{2}\, m_2 m_3 c_{43} + \sqrt{2}\, m_1 m_3 c_{53} + \sqrt{2}\, m_1 m_2 c_{63}) (n_3^2 +$$
$$+ \sqrt{2}\, n_2 n_3 c_{43} + \sqrt{2}\, n_1 n_3 c_{53} + \sqrt{2}\, n_1 n_2 c_{63}) + 2 d_4 (m_2 m_3 + m_1 m_3 c_{54} +$$
$$+ m_1 m_2 c_{64}) (n_2 n_3 + n_1 n_3 c_{54} + n_1 n_2 c_{64}) + 2 d_5 (m_1 m_3 + m_1 m_2 c_{65}) (n_1 n_3 +$$
$$+ n_1 n_2 c_{65}) + 2 d_6 m_1 m_2 n_1 n_2.$$

Из (1.11), (1.12) получаем

$$E_1^{-1} = d_1 = a_{11},\ E_2^{-1} = d_1 c_{21}^2 + d_2 = a_{22},\ E_3^{-1} = d_1 c_{31}^2 + d_2 c_{32}^2 + \tag{1.13}$$
$$+ d_3 = a_{33},\ \nu_{21} = c_{21},\ \nu_{31} = c_{31},$$
$$\nu_{12} = \frac{d_1 c_{21}}{d_1 c_{21}^2 + d_2},\ \nu_{32} = \frac{d_1 c_{31} c_{21} + d_2 c_{32}}{d_1 c_{21}^2 + d_2},$$
$$\nu_{13} = \frac{d_1 c_{31}}{d_1 c_{31}^2 + d_2 c_{32}^2 + d_3},\ \nu_{23} = \frac{d_1 c_{31} c_{21} + d_2 c_{32}}{d_1 c_{31}^2 + d_2 c_{32}^2 + d_3}.$$

Модуль сдвига между площадками с нормалями n_i и m_i запишем как

$$1/(4\mu_{nm}) = (nm)_i a_{ij} (nm)_j = \tag{1.14}$$
$$= d_1 [n_1 m_1 + n_2 m_2 c_{21} + n_3 m_3 c_{31} + (\sqrt{2}/2)(n_2 m_3 +$$
$$+ n_3 m_2) c_{41} + (\sqrt{2}/2)(n_1 m_3 + n_3 m_1) c_{51} + (\sqrt{2}/2)(n_1 m_2 +$$
$$+ n_2 m_1) c_{61}]^2 + d_2 [n_2 m_2 + n_3 m_3 c_{32} + (\sqrt{2}/2)(n_2 m_3 +$$
$$+ n_3 m_2) c_{42} + (\sqrt{2}/2)(n_1 m_3 + n_3 m_1) c_{52} + (\sqrt{2}/2)(n_1 m_2 +$$
$$+ n_2 m_1) c_{62}]^2 + d_3 [n_3 m_3 + (\sqrt{2}/2)(n_2 m_3 + n_3 m_2) c_{43} +$$
$$+ (\sqrt{2}/2)(n_1 m_3 + n_3 m_1) c_{53} + (\sqrt{2}/2)(n_1 m_2 + n_2 m_1) c_{63}]^2 +$$
$$+ (1/2) d_4 [(n_2 m_3 + n_3 m_2) + (n_1 m_3 + n_3 m_1) c_{54} + (n_1 m_2 +$$
$$+ n_2 m_1) c_{64}]^2 + (1/2) d_5 [(n_1 m_3 + n_3 m_1) + (n_1 m_2 + n_2 m_1) c_{65}]^2 +$$
$$+ (1/2) d_6 (n_1 m_2 + n_2 m_1)^2.$$

Из (1.14) имеем

$$1/(2\mu_{23}) = d_1 c_{41}^2 + d_2 c_{42}^2 + d_3 c_{43}^2 + d_4 = a_{44}, \tag{1.15}$$
$$1/(2\mu_{13}) = d_1 c_{51}^2 + d_2 c_{52}^2 + d_3 c_{53}^2 + d_4 c_{54}^2 + d_5 = a_{55},$$
$$1/(2\mu_{12}) = d_1 c_{61}^2 + d_2 c_{62}^2 + d_3 c_{63}^2 + d_4 c_{64}^2 + d_5 c_{65}^2 + d_6 = a_{66}.$$

Придавая в формулах (1.10)—(1.15) произвольные значения параметрам $d_k > 0$, c_{ik} $(i > k)$, n_i, m_i, получим допустимые пределы изменения соответствующей константы упругости для любого анизотропного материала.

2. Рассмотрим теперь материалы, обладающие свойствами симметрии относительно ортогональных преобразований системы координат. Эти материалы (кристаллы) по свойствам симметрии разделяются на семь сингоний и изотропную среду [7]. Матрицы a_{ij}, A_{ij} для материалов кристаллографических сингоний выписываем, следуя [4, 7].

Запишем эти матрицы в виде (1.3), (1.4), а удельную энергию деформации в форме (1.7), из которой будет видно, чему равны матрицы c_{ik}, c_{ik}^{-1} $(i > k)$ для каждой сингонии.

Кубическая сингония

$$(2.1)\qquad a_{ij}=\begin{bmatrix} d_1 & a_{21} & a_{21} & 0 & 0 & 0\\ d_1c_{21} & a_{11} & a_{21} & 0 & 0 & 0\\ a_{21} & a_{21} & a_{11} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & d_4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{44}\end{bmatrix},$$

$$A_{ij}=\begin{bmatrix} \dfrac{1+c_{21}}{d_1(1-c_{21})(1+2c_{21})} & A_{21} & A_{21} & 0 & 0 & 0\\ \dfrac{-c_{21}}{d_1(1-c_{21})(1+2c_{21})} & A_{11} & A_{21} & 0 & 0 & 0\\ A_{21} & A_{21} & A_{11} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & d_4^{-1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44}\end{bmatrix},$$

$$2\Phi=d_1[\sigma_1+c_{21}(\sigma_2+\sigma_3)]^2+d_2\left(\sigma_2+\frac{c_{21}}{1+c_{21}}\sigma_3\right)^2+d_3\sigma_3^2+d_4\left(\sigma_4^2+\sigma_5^2+\sigma_6^2\right)=$$

$$=d_1^{-1}\varepsilon_1^2+d_2^{-1}(-c_{21}\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2+d_3^{-1}\left[\frac{-c_{21}}{1+c_{21}}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)+\varepsilon_3\right]^2+$$

$$+d_4^{-1}\left(\varepsilon_4^2+\varepsilon_5^2+\varepsilon_6^2\right),\quad d_2=d_1\left(1-c_{21}^2\right),$$

$$d_3=d_1(1-c_{21})\frac{1+2c_{21}}{1+c_{21}},\quad d_5=d_6=d_4.$$

Из этих формул видно, что материалы кубической сингонии определяются тремя независимыми параметрами: d_1, d_4, c_{21}, причем из условий (1.5) следует

$$(2.2)\qquad d_1>0,\ d_4>0,\ -1/2<c_{21}<1.$$

Практические константы для материалов кубической сингонии равны

$$(2.3)\qquad 1/K=3d_1(1+2c_{21}),$$

$$1/E_n=d_1+[d_4-d_1(1-c_{21})]\left[1-\left(n_1^4+n_2^4+n_3^4\right)\right],$$

$$\nu_{mn}/E_n=d_1c_{21}-[d_4-d_1(1-c_{21})][(n_1m_1)^2+$$

$$+(n_2m_2)^2+(n_3m_3)^2],$$

$$1/(4\mu_{nm})=(1/2)d_4-[d_4-d_1(1-c_{21})][(n_1m_1)^2+$$

$$+(n_2m_2)^2+(n_3m_3)^2].$$

Для перехода к *изотропному материалу* в формулах (2.1), (2.3) полагаем $d_4=d_1(1-c_{21})$, при этом условия (2.2) остаются.

Тригональная сингония

$$(2.4)\qquad a_{ij}=\begin{bmatrix} d_1 & a_{21} & a_{31} & a_{41} & 0 & 0\\ d_1c_{21} & a_{11} & a_{31} & -a_{41} & 0 & 0\\ d_1c_{31} & a_{31} & d_1\dfrac{2c_{31}^2}{1+c_{21}}+d_3 & 0 & 0 & 0\\ d_1c_{41} & -a_{41} & 0 & d_1\dfrac{2c_{41}^2}{1-c_{21}}+d_4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{44} & \sqrt{2}\,a_{41}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\,a_{41} & d_1(1-c_{21})\end{bmatrix},$$

$$A_{ij}-\begin{bmatrix} \frac{1}{d_1\left(1-c_{21}^2\right)}+\frac{c_{31}^2}{d_3\left(1+c_{21}\right)^2}+\frac{c_{41}^2}{d_4\left(1-c_{21}\right)^2} & A_{21} & A_{31} & A_{41} & 0 & 0 \\ \frac{-c_{21}}{d_1\left(1-c_{21}^2\right)}+\frac{c_{31}^2}{d_3\left(1+c_{21}\right)^2}\quad\frac{c_{41}^2}{d_4\left(1-c_{21}\right)^2} & A_{11} & A_{31} & -A_{41} & 0 & 0 \\ \frac{-c_{31}}{d_3\left(1+c_{21}\right)} & A_{31} & d_3^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-c_{41}}{d_4\left(1-c_{21}\right)} & -A_{41} & 0 & d_4^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} & \sqrt{2}\,A_{41} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\,A_{41} & \frac{1}{d_1\left(1-c_{21}\right)}+\frac{2c_{41}^2}{d_4\left(1-c_{21}\right)^2} \end{bmatrix},$$

$$2\Phi=d_1\left(\sigma_1+c_{21}\sigma_2+c_{31}\sigma_3+c_{41}\sigma_4\right)^2+d_2\left(\sigma_2+\frac{c_{21}}{1+c_{21}}\sigma_3-\frac{c_{41}}{1-c_{21}}\sigma_4\right)^2+$$

$$+d_3\sigma_3^2+d_4\sigma_4^2+d_5\left[\sigma_5+\frac{\sqrt{2}\,d_1c_{41}\left(1-c_{21}\right)}{d_12c_{41}^2+d_4\left(1-c_{21}\right)}\sigma_6\right]^2+d_6\sigma_6^2=d_1^{-1}\varepsilon_1^2+$$

$$+d_2^{-1}\left(-c_{21}\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)^2+d_3^{-1}\left[\frac{-c_{31}}{1+c_{21}}\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)+\varepsilon_3\right]^2+d_4^{-1}\left[\frac{-c_{41}}{1-c_{21}}\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)+\varepsilon_4\right]^2+$$

$$+d_5^{-1}\varepsilon_5^2+d_6^{-1}\left[\frac{-\sqrt{2}\,d_1c_{41}\left(1-c_{21}\right)}{d_12c_{41}^2+d_4\left(1-c_{21}\right)}\varepsilon_5+\varepsilon_6\right]^2,$$

$$d_2=d_1\left(1-c_{21}^2\right),\quad d_5=d_1\frac{2c_{41}^2}{1-c_{21}}+d_4,$$

$$d_6=\frac{d_1d_4\left(1-c_{21}\right)^2}{d_12c_{41}^2+d_4\left(1-c_{21}\right)}.$$

Из формул (2.4) видно, что материалы тригональной сингонии задаются шестью независимыми параметрами: d_1, d_3, d_4, c_{21}, c_{31}, c_{41}, причем

(2.5) $$d_1>0,\ d_3>0,\ d_4>0,\ -1<c_{21}<1.$$

Условия (2.5) обеспечивают положительную определенность удельной энергии деформации для материалов тригональной сингонии. Из (2.5) следует, что для материалов тригональной сингонии нижняя граница коэффициента Пуассона ν_{21} равна -1, а не $-1/2$, как в случае материалов изотропного и кубической сингонии (см. (2.2)). На коэффициенты c_{31}, c_{41} ограничений нет, и они могут быть произвольными.

Если вместо d_3, d_4 за независимые параметры взять модули E_3, $E_4=2\mu_{23}$, то из (2.5) с учетом технических обозначений (1.8) имеем

$$\frac{1}{E_3}>\frac{2\nu_{31}^2}{E_1\left(1+\nu_{21}\right)},\quad \frac{1}{E_4}>\frac{2\nu_{41}^2}{E_1\left(1-\nu_{21}\right)}$$

или после преобразования

(2.6) $$-\sqrt{\frac{E_1}{2E_3}\left(1+\nu_{21}\right)}<\nu_{31}<\sqrt{\frac{E_1}{2E_3}\left(1+\nu_{21}\right)}=f_1;$$

(2.7) $$-\sqrt{\frac{E_1}{2E_4}\left(1-\nu_{21}\right)}<\nu_{41}<\sqrt{\frac{E_1}{2E_4}\left(1-\nu_{21}\right)}=f_2.$$

Неравенства (2.6), (2.7) определяют наитеснейшие границы изменения ν_{31}, ν_{41} в зависимости от отношений E_1/E_3, E_1/E_4 и от ν_{21}. Области допу-

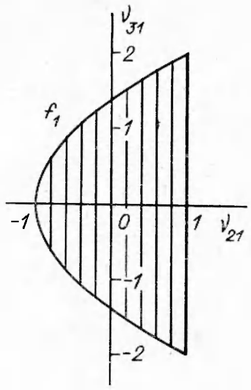

Рис. 1

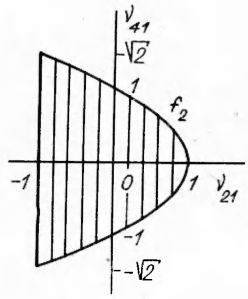

Рис. 2

стимых значений ν_{31}, ν_{41}, ν_{21} показаны на рис. 1, 2 при $E_1 = 4E_3$, $E_1 = 2E_4$ (заштрихованы).

Практические константы для материалов тригональной сингонии равны

$$\frac{1}{K} = 2d_1 \frac{(1 + c_{21} + c_{31})^2}{1 + c_{21}} + d_3, \tag{2.8}$$

$$1/E_n = d_1\left(1 - n_3^2\right)^2 + \left(d_1 2c_{31}^2/(1 + c_{21}) + d_3\right) n_3^4 +$$
$$+ 2\left(d_1 c_{31} + d_4\right)\left(1 - n_3^2\right) n_3^2 + 2\sqrt{2}\, d_1 c_{41}\left(3n_1^2 - n_2^2\right) n_2 n_3,$$

$$\nu_{mn}/E_n = d_1 c_{21} + d_1(c_{31} - c_{21})\left(n_3^2 + m_3^2\right) + \left[d_1(1 - 2c_{31}) + d_1 2c_{31}^2/(1 + c_{21}) +\right.$$
$$\left. + d_3 - 2d_4\right] n_3^2 m_3^2 + \sqrt{2}\, d_1 c_{41}\left[(n_1 m_1 - n_2 m_2)(n_2 m_3 + n_3 m_2) +\right.$$
$$\left. + (n_1 m_3 + n_3 m_1)(n_1 m_2 + n_2 m_1)\right],$$

$$1/(4\mu_{nm}) = (1/2)\, d_1(1 - c_{21}) + (1/2)\left[d_4 - d_1(1 - c_{21})\right]\left(n_3^2 + m_3^2\right) +$$
$$+ \left[d_1(1 - 2c_{31}) + d_1 2c_{31}^2/(1 + c_{21}) + d_3 - 2d_4\right] n_3^2 m_3^2 + \sqrt{2}\, d_1 c_{41} \times$$
$$\times \left[(n_1 m_1 - n_2 m_2)(n_2 m_3 + n_3 m_2) + (n_1 m_3 + n_3 m_1)(n_1 m_2 + n_2 m_1)\right].$$

Для перехода к материалам *гексагональной сингонии* (*трансверсально-изотропным*) надо в формулах (2.4), (2.8) положить $c_{41} = 0$, причем условия (2.5) остаются.

Для перехода к материалам *тетрагональной сингонии* необходимо в формулах (2.4) положить $c_{41} = 0$, а вместо элемента $a_{66} = d_1(1 - c_{21})$ написать $a_{66} = d_6 > 0$ и считать d_6 независимым параметром. Очевидно, что материалы тетрагональной сингонии определяются шестью независимыми параметрами: d_1, d_3, d_4, d_6, c_{21}, c_{31}, при этом условия (2.5) остаются. Объемный модуль имеет вид (2.8). Остальные практические константы для материалов тетрагональной сингонии следующие:

$$1/E_n = d_1\left(1 - n_3^2\right)^2 + \left(d_1 2c_{31}^2/(1 + c_{21}) + d_3\right) n_3^4 + 2\left(d_1 c_{31} + d_4\right)\left(1 - n_3^2\right) n_3^2 +$$
$$+ \left[d_6 - d_1(1 - c_{21})\right] 2\left(n_1 n_2\right)^2,$$

$$\nu_{mn}/E_n = d_1 c_{21} + d_1(c_{31} - c_{21})\left(n_3^2 + m_3^2\right) + \left[d_1(1 - 2c_{31}) + d_1 2c_{31}^2/(1 + c_{21}) +\right.$$
$$\left. + d_3 - 2d_4\right] n_3^2 m_3^2 + \left[d_6 - d_1(1 - c_{21})\right] 2 m_1 m_2 n_1 n_2,$$

$$1/(4\mu_{nm}) = (1/2)\, d_1(1 - c_{21}) + (1/2)\left[d_4 - d_1(1 - c_{21})\right]\left(n_3^2 + m_3^2\right) +$$
$$+ \left[d_1(1 - 2c_{31}) + d_1 2c_{31}^2/(1 + c_{21}) + d_3 - 2d_4\right] n_3^2 m_3^2 +$$
$$+ \left[d_6 - d_1(1 - c_{21})\right](1/2)\left(n_1 m_2 + n_2 m_1\right)^2.$$

Ромбическая сингония (ортотропия)

$$
a_{ij}=\begin{bmatrix}
d_1 & a_{21} & a_{31} & 0 & 0 & 0\\
d_1c_{21} & d_1c_{21}^2+d_2 & a_{32} & 0 & 0 & 0\\
d_1c_{31} & d_1c_{31}c_{21}+d_2c_{32} & d_1c_{31}^2+d_2c_{32}^2+d_3 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & d_4 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & d_5 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_6
\end{bmatrix},
$$

$$
A_{ij}=\begin{bmatrix}
d_1^{-1}+d_2^{-1}c_{21}^2+d_3^{-1}(-c_{31}+c_{32}c_{21})^2 & A_{21} & A_{31} & 0 & 0 & 0\\
-d_2^{-1}c_{21}-d_3^{-1}c_{32}(-c_{31}+c_{32}c_{21}) & d_2^{-1}+d_3^{-1}c_{32}^2 & A_{32} & 0 & 0 & 0\\
d_3^{-1}(-c_{31}+c_{32}c_{21}) & -d_3^{-1}c_{32} & d_3^{-1} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & d_4^{-1} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & d_5^{-1} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_6^{-1}
\end{bmatrix},
$$

$$
2\Phi=d_1(\sigma_1+c_{21}\sigma_2+c_{31}\sigma_3)^2+d_2(\sigma_2+c_{32}\sigma_3)^2+d_3\sigma_3^2+d_4\sigma_4^2+d_5\sigma_5^2+d_6\sigma_6^2=
$$
$$
=d_1^{-1}\varepsilon_1^2+d_2^{-1}(-c_{21}\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2+d_3^{-1}[(-c_{31}+c_{32}c_{21})\varepsilon_1-c_{32}\varepsilon_2+\varepsilon_3]^2+
$$
$$
+d_4^{-1}\varepsilon_4^2+d_5^{-1}\varepsilon_5^2+d_6^{-1}\varepsilon_6^2.
$$

Из этих формул видно, что ортотропные материалы определяются девятью независимыми параметрами: d_1, d_2, ..., d_6, c_{21}, c_{31}, c_{32}, причем выполняются условия (1.5). Если вместо d_2, d_3 за независимые параметры взять модули E_2, E_3, то из (1.5) с учетом технических обозначений (1.8) имеем

$$
\frac{1}{E_2}>\frac{\nu_{21}^2}{E_1},\quad \frac{1}{E_3}>\frac{\nu_{31}^2}{E_1}+\frac{(\nu_{32}/E_2-\nu_{31}\nu_{21}/E_1)^2}{1/E_2-\nu_{21}^2/E_1}. \tag{2.9}
$$

Объемный модуль примет вид (1.10). Остальные практические константы для ортотропного материала следующие:

$$
1/E_n=d_1(n_1^2+n_2^2c_{21}+n_3^2c_{31})^2+d_2(n_2^2+n_3^2c_{32})^2+d_3n_3^4+2d_4(n_2n_3)^2+
$$
$$
+2d_5(n_1n_3)^2+2d_6(n_1n_2)^2,
$$
$$
\nu_{mn}/E_n=d_1(m_1^2+m_2^2c_{21}+m_3^2c_{31})(n_1^2+n_2^2c_{21}+n_3^2c_{31})+d_2(m_2^2+m_3^2c_{32})(n_2^2+
$$
$$
+n_3^2c_{32})+d_3m_3^2n_3^2+2d_4m_2m_3n_2n_3+2d_5m_1m_3n_1n_3+2d_6m_1m_2n_1n_2,
$$
$$
1/(4\mu_{nm})=d_1(n_1m_1+n_2m_2c_{21}+n_3m_3c_{31})^2+
$$
$$
+d_2(n_2m_2+n_3m_3c_{32})^2+d_3(n_3m_3)^2+d_4(1/2)(n_2m_3+
$$
$$
+n_3m_2)^2+d_5(1/2)(n_1m_3+n_3m_1)^2+d_6(1/2)(n_1m_2+n_2m_1)^2.
$$

Если за ось симметрии второго порядка взять ось x_1, то формулы для материалов *моноклинной сингонии* получим из общих формул (1.3), (1.4), (1.7), (1.10)—(1.15), полагая в них $c_{5i}=0$ ($i=1, \ldots, 4$), $c_{6i}=0$ ($i=1, \ldots, 5$), при этом матрица c_{ki}^{-1} имеет вид

$$
c_{ki}^{-1}=\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-c_{21} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-c_{31}+c_{32}c_{21} & -c_{32} & 1 & 0 & 0 & 0\\
-c_{41}+c_{42}c_{21}+c_{43}(c_{31}-c_{32}c_{21}) & -c_{42}+c_{43}c_{32} & -c_{43} & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}.
$$

Очевидно, что материалы моноклинной сингонии определяются 12 независимыми параметрами: d_1, d_2, ..., d_6, c_{21}, c_{31}, c_{41}, c_{32}, c_{42}, c_{43}, причем выполняются условия (1.5). Если вместо d_2, d_3, d_4 за независимые параметры взять модули E_2, E_3, $E_4=2\mu_{23}$, то из (1.5) с учетом технических обозначений (1.8) получим условия (2.9) и

$$\frac{1}{E_4} > \frac{\nu_{41}^2}{E_1} + \frac{(\nu_{42}/E_2 - \nu_{41}\nu_{21}/E_1)^2}{1/E_2 - \nu_{21}^2/E_1} + \tag{2.10}$$

$$+ \frac{\left[\frac{\nu_{43}}{E_3} - \frac{\nu_{41}\nu_{31}}{E_1} - \frac{(\nu_{42}/E_2 - \nu_{41}\nu_{21}/E_1)(\nu_{32}/E_2 - \nu_{31}\nu_{21}/E_1)}{1/E_2 - \nu_{21}^2/E_1}\right]^2}{\frac{1}{E_3} - \frac{\nu_{31}^2}{E_1} - \frac{(\nu_{32}/E_2 - \nu_{31}\nu_{21}/E_1)^2}{1/E_2 - \nu_{21}^2/E_1}}.$$

Для материалов *триклинной сингонии* матрицы a_{ij}, A_{ij} имеют общий вид и следует использовать формулы для общего случая анизотропии (1.3)—(1.7), (1.10)—(1.15). Условия $d_5 > 0$, $d_6 > 0$, учитывая технические обозначения (1.8), можно переписать аналогично неравенствам (2.9), (2.10), но из-за громоздкости формул не будем их выписывать.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Остросаблин Н. И.** О наитеснейших границах констант упругости и приведении удельной энергии деформации к каноническому виду // Изв. АН СССР. МТТ.— 1989.— № 2.
2. **Черных К. Ф.** Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах.— Л.: Машиностроение, 1986.
3. **Черных К. Ф.** Введение в анизотропную упругость.— М.: Наука, 1988.
4. **Остросаблин Н. И.** Собственные модули упругости и состояния для материалов кристаллографических сингоний // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./АН СССР, Спб. отд-ние, Ин-т гидродинамики.— 1986.— Вып. 75.
5. **Грах И. И., Сидорин Я. С.** Об ограничениях на упругие коэффициенты анизотропных твердых тел // Механика полимеров.— 1974.— № 1.
6. **Абрамчук С. С., Булдаков В. П.** Допустимые значения коэффициентов Пуассона анизотропных материалов // Механика композит. материалов.— 1979.— № 2.
7. **Федоров Ф. И.** Теория упругих волн в кристаллах.— М.: Наука, 1965.

г. Новосибирск *Поступила 12/VII 1990 г., в окончательном варианте — 23/XI 1990 г.*

УДК 539.3

Х. И. Альтенбах, А. А. Золочевский

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ВАРИАНТ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ И ДЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ АНИЗОТРОПНЫХ И ИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ, РАЗНОСОПРОТИВЛЯЮЩИХСЯ РАСТЯЖЕНИЮ — СЖАТИЮ

В настоящее время в механике твердого тела сформировался новый самостоятельный раздел — теория ползучести сред, неодинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию [1—15]. Ее интенсивное развитие связано с большими инженерными приложениями, поскольку легкие сплавы, серые чугуны, полимерные, керамические, композитные и другие материалы, ползучесть которых зависит от вида нагружения, нашли широкое применение в различных областях техники. С другой стороны, в литературе [16—26] значительное внимание уделяется механике поврежденных сред. Большинство из существующих в этой области подходов представляют собой развитие и обобщение концепции Работнова [27] о параметре поврежденности материала.

Очевидно, что деформирование и накопление поврежденности протекают в условиях ползучести параллельно друг другу и оказывают взаимное влияние. Для описания этих явлений весьма удобно использовать уравнения состояния в энергетической форме, позволяющие совместить расчет на ползучесть с отысканием времени разрушения конструкции. При этом в уравнениях необходимо отразить влияние вида нагружения на ползучесть и длительную прочность.

1. Для построения связи между компонентами симметричных тензоров скоростей деформаций ползучести $\dot{\varepsilon}$ и напряжений σ (тензоров второго ранга) в анизотропных средах воспользуемся существованием потенциала

$$F = \sigma_e^2. \tag{1.1}$$