

УДК 533.9.01

*В. А. Швейгерт*

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАЦИОНАРНОЙ ФУНКЦИИ  
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ  
В СЛАБОИОНИЗИРОВАННОМ ГАЗЕ  
В НЕОДНОРОДНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЯХ**

Исследование ряда проблем физики газового разряда (структура приэлектродных областей, неподвижные страты и т. д.) требует привлечения кинетического подхода для описания движения электронов. При наличии пространственных переменных наиболее эффективным методом численного моделирования является метод Монте-Карло. Однако его статистическая погрешность сравнительно медленно ( $\sim N_t^{-1/2}$ ) убывает с увеличением числа прослеживаемых траекторий  $N_t$ , и решение кинетического уравнения, особенно при небольших напряженностях поля  $E$ , требует значительных затрат машинного времени. Обычно полное транспортное сечение рассеяния  $\sigma_t$  много больше сечения неупругого рассеяния  $\sigma$ , и  $f_0(\epsilon, r)$  — функцию распределения электронов по энергиям (ФРЭЭ) — с удовлетворительной точностью можно найти в рамках двучленного приближения (ДП) [1]

$$(1) \quad - \left( \frac{\partial}{\partial r} - eE \frac{\partial}{\partial \epsilon} \right) \frac{v^2}{3N\sigma_t} \left( \frac{\partial}{\partial r} - eE \frac{\partial}{\partial \epsilon} \right) f_0 = st \{f_0\}.$$

Здесь  $v$  — скорость электронов;  $N$  — концентрация атомов;  $st\{f_0\}$  — столкновительный член, описывающий обмен энергии при электрон-атомных соударениях; межэлектронные столкновения не учитываются. Корректность использования ДП в широком диапазоне изменения  $E/N$  в различных газах продемонстрирована для пространственно-однородных ситуаций в ряде работ (см., например, [2—4]), где проводилось сравнение с результатами решения полного кинетического уравнения. Хотя диффузионно-дрейфовая модель описания движения электронов, вытекающая из уравнения (1), является основой исследования газового разряда, анализ погрешности ДП в неоднородных полях не проводился. Рассматривалось только поведение ФРЭЭ в однородном поле около идеально поглощающего анода в модельном (отсутствовали неупругие соударения) газе [5, 6]. Формально ДП применимо на больших ( $N\sigma_t l \gg 1$ ) расстояниях от электродов при условии  $N\sigma_t l \gg 1$  ( $l$  — характерная длина изменения напряженности электрического поля). Проведенные ниже расчеты ФРЭЭ в неоне показывают, что фактически диапазон применимости ДП гораздо шире. В работе также анализируется выбор граничных условий к уравнению (1) и излагается экономичный алгоритм его численного решения.

**Граничные условия.** Возможности современных ЭВМ заставляют ограничиться одномерным случаем, например исследованием поведения ФРЭЭ между бесконечными плоскопараллельными электродами. Рассмотрим наиболее сложную с точки зрения применимости ДП ситуацию, когда отражение электронов от электродов незначительно. Тогда на функцию распределения электронов  $f(\epsilon, \mu, x)$  накладываются граничные условия

$$(2) \quad f(\epsilon, \mu > 0, x = 0) = f_i(\epsilon, \mu), \quad f(\epsilon, \mu < 0, x = d) = 0,$$

где  $\mu$  — косинус угла между направлением электрического поля и скоростью электрона;  $f_i$  — функция распределения инжектируемых с катода электронов; точка  $x = 0$  соответствует катоду, а  $x = d$  — аноду. В рамках ДП имеем

$$f(\epsilon, \mu, x) = \frac{1}{2} f_0(\epsilon, x) + \frac{3}{2} \mu f_1(\epsilon, x), \quad f_1 = - \frac{1}{3N\sigma_t} \left( \frac{\partial}{\partial x} - eE \frac{\partial}{\partial \epsilon} \right) f_0,$$

и можно только приближенно удовлетворить условиям (2). Поэтому выбор граничных условий к уравнению (1) несколько произволен. Наиболее

широкое распространение получили граничные условия Маршака

$$(3) \quad \int_0^1 \mu f(\varepsilon, \mu, x=0) d\mu = \int_0^1 \mu f_i(\varepsilon, \mu) d\mu, \quad \int_{-1}^0 \mu f(\varepsilon, \mu, x=d) d\mu = 0$$

и Марка

$$(4) \quad f(\varepsilon, \mu = \mu_*, x=0) = f_i(\varepsilon, \mu = \mu_*), \quad f(\varepsilon, \mu = -\mu_*, x=d) = 0$$

( $\mu_* = 1/\sqrt{3}$  [7]). В [5, 6] использовалось выражение (4) с  $\mu_* = 1$ . Однако такой выбор  $\mu_*$  дает, как показали результаты наших расчетов, большую погрешность, чем наилучшее из условий (3), (4). Пусть распределение инжектируемых электронов по углам подчиняется закону косинуса  $f_i(\varepsilon, \mu) = 3\mu f_i(\varepsilon)$ , что верно, например, для случая ионно-электронной эмиссии [8]. Тогда выражения (3), (4) принимают вид

$$(5) \quad C_0 f_0(\varepsilon, x=0) + C_1 f_1(\varepsilon, x=0) = f_i(\varepsilon), \\ C_2 f_0(\varepsilon, x=d) - f_1(\varepsilon, x=d) = 0,$$

где  $C_1 = 1/2$ ; для условий Маршака  $C_0 = 1/4$ ,  $C_2 = C_1$ ; для условий Марка  $C_0 = 1/2\sqrt{3}$ ,  $C_2 = 1/\sqrt{3}$ . При  $\sigma_t \gg \sigma$  в однородном электрическом поле средняя энергия электронов много больше энергии  $\varepsilon_* = eE/N\sigma_t$ , набираемой на длине свободного пробега. Поэтому функция распределения электронов по скоростям близка к сферически-симметричной, что и обуславливает хорошую точность ДП. Если энергия инжектируемых электронов меньше  $\varepsilon_*$ , то около катода электроны движутся преимущественно вдоль направления электрического поля и ДП дает завышенное значение коэффициента прохождения электронов. Аналогичная ситуация возникает при больших градиентах поля в прианодной области, куда поступают низкоэнергетические электроны. Погрешность ДП можно уменьшить за счет выбора граничных условий (5) с переменными значениями  $C_1$ ,  $C_2$ , зависящими от отношения  $\kappa = \varepsilon_*/\varepsilon$ . Нетрудно показать, что при  $\kappa \gg 1$  необходимо положить  $C_1 = C_2 = 1$ . Для  $\kappa \ll 1$  в некотором строгом смысле наилучшими являются условия Маршака [7]. Уже простейшая интерполяция между этими предельными случаями

$$(6) \quad C_1 = C_2 = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\kappa}{1+\kappa} \right), \quad C_0 = \frac{1}{4}$$

позволяет получить удовлетворительную точность ДП в широком диапазоне изменения  $E/N$  и  $N\sigma_t l$ .

**Алгоритм численного решения.** Решение уравнения (1) достаточно трудоемко. Однако в ряде ситуаций напряженность электрического поля в межэлектродном промежутке не меняет знак, и можно построить экономичный алгоритм численного решения (1). Обычно температура электронов много больше температуры газа, и нагревом электронов при упругих столкновениях с атомами и ударах второго рода можно пренебречь. Тогда после замены переменных  $\varepsilon = W + e\varphi$  ( $\varphi$  — потенциал электрического поля) уравнение (1) и граничные условия (5) записываются в виде

$$(7) \quad -\frac{\partial}{\partial x} \frac{v^2}{3N\sigma_t} \frac{\partial f_0}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial W} \frac{2m}{M} Nv^2\sigma_t \varepsilon f_0 + \nu f_0 = \\ = 4\nu_i(2\varepsilon + I) f_0(2W + e\varphi + I, x) + \sum_k \nu_k (W + \varepsilon_k) f_0(W + \varepsilon_k, x), \\ C_0 f_0 - \frac{C_1}{3N\sigma_t} \frac{\partial f_0}{\partial x} \Big|_{x=0} = j_i, \quad C_2 j_0 + \frac{1}{3N\sigma_t} \frac{\partial f_0}{\partial x} \Big|_{x=d} = 0.$$

Здесь  $m$ ,  $M$  — массы электрона и атома;  $\nu_k = Nv^2\sigma_k$ ;  $\nu_i = Nv^2\sigma_i$ ;  $\nu = \nu_i + \sum_k \nu_k$ ;  $\sigma_k$ ,  $\varepsilon_k$  — сечение и порог возбуждения  $k$ -го уровня;  $\sigma_i$ ,  $I$  — сечение и потенциал ионизации; предполагается, что после акта ионизации энергии первичного и вторичного электрона равны. Для решения

уравнения (7) применялась конечно-разностная схема второго порядка аппроксимации по пространственной переменной и первого — по энергии. При этом получается система линейных уравнений с треугольной матрицей

$$(8) \quad -a_{ij}f_{ij+1} - b_{ij}f_{ij-1} - c_{ij}f_{i+1j} + p_{ij}f_{ij} = \Psi(f_{n>i,j}),$$

где первый индекс соответствует  $W$ , а второй —  $x$ . Используя дополнительное граничное условие при больших энергиях  $f_{i0j} = 0$ , систему алгебраических уравнений (8) легко разрешить методом прогонки, который является устойчивым ( $p_{ij} \geq a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}$ ,  $a_{ij} > 0$ ,  $b_{ij} > 0$ ,  $c_{ij} > 0$ ). Сначала находится решение при  $i = i_0 - 1$ , затем — при  $i = i_0 - 2$  и т. д. Легко видеть, что метод решения безытерационный и требует применения всего одного двумерного массива  $f_{ij}$ . Последнее обстоятельство довольно существенно, так как алгоритм реализовался на ЭВМ БЭСМ-6, главный недостаток которой в данном случае заключался в ограниченном размере оперативной памяти. Приведенные ниже результаты получены в основном на сетке  $150 \times 130$ . При этом погрешность решения находилась на уровне 1–2 %, а характерное время расчета одного варианта составляло  $\sim 10$  с. Для сравнения отметим, что затраты машинного времени при решении полного кинетического уравнения методом Монте-Карло с примерно такой же статистической погрешностью ( $N_t \sim 2 \cdot 10^4$ ) составляли около 1 ч.

**Результаты численных расчетов.** Сечения рассеяния электрона на атомах неона брались из [9]. Совокупность электронных уровней заменялась эффективным уровнем с энергией возбуждения  $\varepsilon_1 = 16,6$  эВ. Для исследования корректности ДП проводилось решение полного кинетического уравнения методом Монте-Карло с использованием техники нулевых столкновений. Распределение инжектируемых электронов по энергиям задавалось в виде

$$f_i(0 < \varepsilon < \varepsilon_1) \sim \sin(\pi\varepsilon/\varepsilon_1)/\sqrt{\varepsilon}, \quad f_i(\varepsilon > \varepsilon_1) = 0_x$$

качественно описывающем экспериментальные данные по ионно-электронной эмиссии [10]. Межэлектродный потенциал равнялся 100 В. Рассматривались как однородное поле  $E(x) = E_0$ , так и линейное распределение поля в прикатодной

$$(9) \quad E(x \leq l) = \frac{2U_1}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) + E_{1x}, \quad E(x > l) = E_1$$

и прианодной

$$(10) \quad E(x < d - l) = E_{1x}, \quad E(x > d - l) = \frac{2U_1}{l} \left(1 - \frac{d}{l} + \frac{x}{l}\right) + E_1$$

областях. При фиксированных значениях  $U_1 = 80$  В,  $E_1/N = 5 \times 10^{-16}$  В·см<sup>2</sup> варьировался характерный масштаб неоднородности поля  $Nl = (0,125-4) \cdot 10^{16}$  см<sup>-2</sup>. Для сравнения укажем, что в неоне длина свободного пробега  $\lambda$  меняется сравнительно слабо и при  $\varepsilon = \varepsilon_1$   $N\lambda \approx 0,35 \cdot 10^{16}$  см<sup>-2</sup>.

Влияние выбора граничных условий на погрешность ДП показывают данные, представленные в таблице, где  $K$  — коэффициент прохождения электронов, т. е. отношение тока электронов на катоде к току эмиссии;

$Nl, 10^{16}$ см <sup>-2</sup>	$K$			$N_i/K$			$N_i/K$			$V_a, 10^3$ см/с						
4,0	0,71	0,67	0,86	0,52	2,44	2,46	2,45	2,44	1,59	1,62	1,65	1,63	2,17	2,23	1,66	1,94
2,0	0,81	0,76	1,08	0,67	2,45	2,41	2,41	2,40	0,97	1,02	1,07	1,04	2,64	2,75	1,93	2,26
1,0	0,88	0,84	1,30	0,82	2,22	2,14	2,13	2,13	0,51	0,51	0,56	0,54	3,20	3,41	2,25	2,64
0,5	0,93	0,90	1,50	0,96	2,06	1,94	1,93	1,93	0,25	0,25	0,29	0,27	3,91	4,12	2,53	2,96
0,25	0,96	0,94	1,64	1,06	1,99	1,83	1,83	1,83	0,14	0,14	0,17	0,16	4,51	4,77	2,71	3,16
0,125	0,97	0,96	1,73	1,13	1,92	1,77	1,77	1,77	0,10	0,10	0,12	0,11	4,99	5,25	2,81	3,26

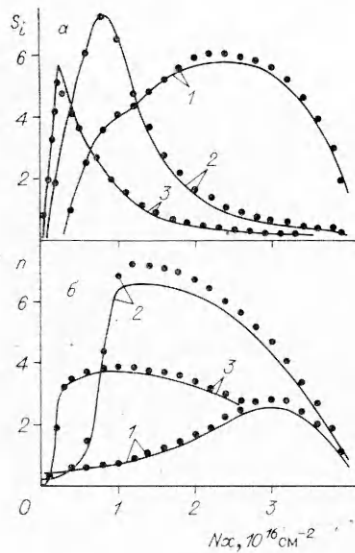


Рис. 1

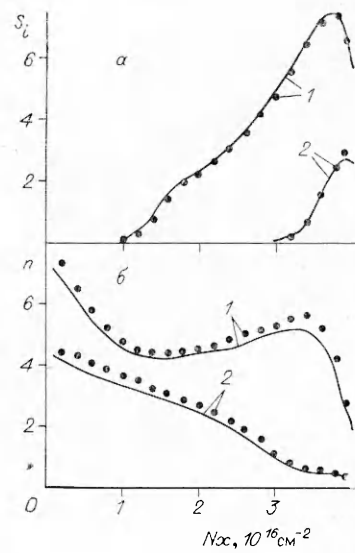


Рис. 2

$N_i$  — количество актов ионизации, приходящееся на один инжектируемый электрон;  $V_a$  — средняя скорость электронов на аноде: первое значение — результаты расчетов методом Монте-Карло, второе — ДП с граничными условиями (6), третье — ДП с условиями Маршака, четвертое — с условиями Марка. Второй и третий столбцы относятся к профилю поля (9), а последние два — к (10). При увеличении  $\kappa$  условия Маршака и Марка дают заниженное значение  $V_a$  и завышенное  $K$ ,  $N_i$ . Для приведенной величины  $N_i/K$  погрешность ДП существенно меньше. Использование граничных условий (6) позволяет добиться хорошей точности вычисления значения  $N_i$ , которое в первую очередь определяет характеристики анодного и катодного слоев (даже при  $l < \lambda$ ).

Согласие с точным решением наблюдается и в пространственном поведении различных функционалов от ФРЭЭ. На рис. 1, 2 изображены профили скорости ионизаций  $S_i$  (а) и плотности электронов  $n$  (б) в относительных единицах для неоднородного распределения поля соответственно в катодной и анодной областях (1—3 для  $Nl = 4; 1; 0,25 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$ , сплошная линия — ДП с граничными условиями (6), точки — расчет методом Монте-Карло). Анализ ФРЭЭ на поверхности поглощающего анода представляет интерес с точки зрения задач диагностики плазмы и проводился для аргона в [11] при помощи метода Монте-Карло. В данной работе отметим хорошее согласие (рис. 3) между ДП с граничными условиями (6) и решением полного кинетического уравнения (точки) в однородном электрическом поле (отнормированная на единицу ФРЭЭ на аноде при  $E_0/N = 5 \cdot 10^{-16}$  и  $2 \cdot 10^{-15} \text{ В} \cdot \text{см}^2$  — линии 1 и 2).

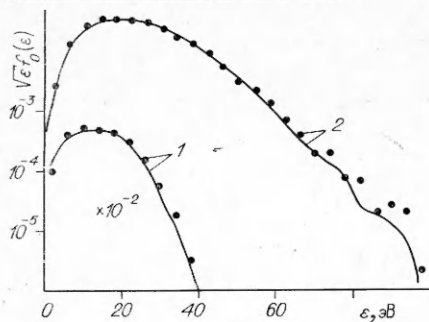


Рис. 3

Использование ДП с общепринятыми граничными условиями Маршака и Марка в ряде ситуаций приводит к большой погрешности при вычислении ФРЭЭ в приэлектродных областях. Однако уже простейшая модификация граничных условий позволяет снизить погрешность ДП до уровня 5—10 %, который вполне приемлем с точки зрения надежности самих сечений рассеяния, используемых при расчетах ФРЭЭ. Отметим, что статистическая погрешность метода Монте-Карло зна-

чительно осложняет его использование при решении самосогласованных задач, и в этих случаях можно рекомендовать двучленное приближение.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гинзбург В. Л., Гуревич А. В. Нелинейные явления в плазме, находящейся в переменном электрическом поле // УФН.— 1960.— Т. 70, № 2.
2. Reid I. D. An investigation of the accuracy of numerical solutions of Boltzmann's equation for electron swarms in gases with large inelastic cross sections // Austral. J. Phys.— 1979.— V. 32.— P. 231.
3. Pitchford L. C., O'Neil S. V., Rumble J. R. Extended Boltzmann analysis of electron swarm experiments // Phys. Rev. A.— 1981.— V. 23, N 1.
4. Ness K. F., Robson R. E. Velocity distribution function and transport coefficients of electron swarms in gases. II. Moment equations and applications // Phys. Rev. A.— 1986.— V. 34, N 3.
5. Lowke J. J., Parker J. H., Hall C. A. Electron diffusion under the influence of an electric field near absorbing boundaries // Phys. Rev. A.— 1977.— V. 15, N 3.
6. Braglia G. L., Lowke J. J. Comparison of Monte-Carlo and Boltzmann calculation of electron diffusion to absorbing electrodes // J. Phys. D.: Appl. Phys.— 1979.— V. 12.— P. 1831.
7. Кейз К., Цвайфель П. Линейная теория переноса.— М.: Мир, 1972.
8. Abbot R. G., Berry H. W. Measurement of the angular distribution of electrons ejected from tungsten by helium ions // J. Appl. Phys.— 1959.— V. 30.— P. 871.
9. Thomas W. R. L. The determination of the total excitation cross section in neon by comparison of theoretical and experimental values of Townsend's primary ionization coefficient // J. Phys. B: Atom. Mol. Phys.— 1969.— V. 2.— P. 551.
10. Hagstrum H. D. Theory of Auger ejection of electrons from metals by ions // Phys. Rev.— 1954.— V. 96.— P. 336.
11. Braglia G. L., Romana L. On the accuracy of experimental electron energy distributions in gases // Nuovo Cim.— 1985.— V. 85 B, N 2.

г. Новосибирск

Поступила 28/XII 1987 г.,  
в окончательном варианте — 27/IV 1988 г.

УДК 538.24.42+517.956

С. М. Пономарев

### О ПРОНИКНОВЕНИИ ИМПУЛЬСНЫХ СИЛЬНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В ПРОВОДНИК

В данной работе рассматривается процесс проникновения импульсного магнитного поля в несжимаемый проводник с учетом выделения джоулева тепла. Получены решения для случая проникновения постоянного сильного магнитного поля (значительно превышающего поля насыщения) в проводящее полупространство с плоской границей при постоянной удельной теплоемкости и теплопроводности. Показано, что учет влияния тока смещения, когда граничное магнитное поле задано в виде ступенчатой функции, имеет принципиальное значение как в вопросе о нагреве поверхности проводника, так и в вопросе о сохранении сильных магнитных полей в любых экспериментальных устройствах с плоскими границами.

Известно [1, 2], что проникновение сильного магнитного поля  $H(x, t)$  в плоский несжимаемый проводник ( $x > 0$ ) может быть описано уравнениями (в системе единиц МКСА):

$$(1) \quad -\partial H/\partial x = j + \varepsilon_0 \varepsilon_R \partial E/\partial t, \quad \partial E/\partial x = -\mu_0 \mu_R \partial H/\partial t, \quad j = \sigma E, \\ \partial Q/\partial t = j^2/\sigma - \partial q/\partial x, \quad q = -\lambda \partial \theta/\partial x - \tau_0 \partial q/\partial t, \quad Q = c_V \theta,$$

где  $j(x, t)$  — объемная плотность тока проводимости;  $E(x, t)$  — напряженность электрического поля;  $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  А·с/(В·м);  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  В·с/(А·м);  $\mu_R, \varepsilon_R$  — относительные проницаемости, которые считаем постоянными (причем либо  $\mu_R = \varepsilon_R = 1$ , либо  $\mu_R = 1, \varepsilon_R = 0$ , если пренебрегаем в задаче током смещения по сравнению с током проводимости);  $\sigma = \text{const}$  — проводимость среды;  $Q(x, t)$  — прирост теплосодержания по отношению к состоянию при  $0^\circ\text{C}$ ;  $q(x, t)$  — плотность теплового потока;  $\theta(x, t)$  — температура проводника;  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности;  $\tau_0 = \text{const}$  — время релаксации теплового потока;  $c_V$  — удельная теплоемкость проводника.