ПМТФ, № 6, 1968

ДИФФУЗИЯ ПЛАЗМЫ В ТОРОИДАЛЬНОМ СТЕЛЛАРАТОРЕ

А. А. Галеев, Р. З. Сагдеев, Г. П. Фюрс[1]

(Новосибирск)

Исследуются траектории частиц в стеллараторе с малой тороидальностью. Определяется функция распределения частиц при отсутствии столкновений.

В магнитных ловушках с вращательным преобразованием силовые линии магнитного поля образуют поверхности. Траектории дрейфа частиц плазмы в таких ловушках, как правило, образуют поверхности, достаточно близкие к магнитным. Однако дрейфовые поверхности частиц, движущихся с малыми скоростями вдоль силовой линии магнитного поля, могут испытывать довольно сильные отклонения от магнитных поверхностей. Возникающее вследствие этого перемешивание может привести к существенному увеличению потоков частиц и тепла. В работе [1] найдены эти потоки для случая тороидальных систем с аксиальной симметрией. Тороидальный стелларатор не обладает аксиальной симметрией. Орбиты частиц, совершающих в таких ловушках довольно сложную прецессию, могут еще дальше отходить от магнитных поверхностей [2-4]. И здесь наиболее опасны частицы с малыми продольными скоростями, в особенности частицы, запертые при своем движении вдоль силовых линий в областях с минимумом величины магнитного поля. Картина такого движения частиц весьма запутанна из-за того, что они находятся в поле, представляющем собой суперпозицию двух потенциальных ям: во-первых, связанной с тороидальностью (как в аксиально-асимметричном случае) и, во-вторых, возникающей от винтового магнитного поля. Поэтому пока не сделано даже оценок возникающего перемешивания.

Ниже рассмотрим предельный случай стелларатора с малой тороидальностью, для которого можно найти интегралы дрейфовых уравнений движения частиц. Тем самым автоматически известна функция распределения частиц при отсутствии столкновений. Влияние же последних учитывается затем по теории возмущений.

1. Движение частиц в стеллараторе с сильным винтовым магнитным полем. Рассмотрим движение частиц в трехзаходном для конкретности винтовом магнитном поле, «согнутом» в тор большого радиуса. Вблизи оси винтового поля можно использовать дополнительные упрощающие задачу приближения:

а) сечения магнитных поверхностей представляют собой концентрические окружности;

б) вклад поперечных составляющих винтового магнитного поля в диамагнитный дрейф частиц будет пренебрежимо малым по сравнению со вкладом из-за неоднородности продольного поля B_z.

Вблизи магнитной оси можно воспользоваться следующим выражением [5]:

$$B_z = B_0\,[1 - \varepsilon_h \cos 3(\vartheta - \alpha z) - \varepsilon_t \cos\vartheta] \qquad \left(\varepsilon_h = \frac{27b}{16B_0}(\alpha r)^3,\ \alpha = \frac{2\pi}{L}\right) \tag{1.1}$$

Здесь α — шаг винтового поля; последнее слагаемое в правой части представляет собой тороидальную поправку, так что

$$\varepsilon_t \ll \varepsilon_h \tag{1.2}$$

Уравнения движения заряженной частицы с энергией E и адиабатическим инвариантом μ в дрейфовом приближении можно представить

---

[1] Лаборатория физики плазмы, Принстонский университет, Принстон, США (Новосибирск, 1967).

в виде ($\Phi(r)$ — электрический потенциал)

$$r\frac{d(\vartheta-\alpha z)}{dt}=-\alpha r\left[v_{\parallel}-\frac{c}{\alpha r B_0}\frac{d\Phi}{dr}\right]-\frac{\mu B_0}{m_j\omega_{cj}r}\left(3\varepsilon_h\cos 3(\vartheta-\alpha r)+\varepsilon_t\cos\vartheta\right) \tag{1.3}$$

$$\frac{dr}{dt}=-\frac{\mu B_0}{m_j\omega_{cj}r}\left(3\varepsilon_h\sin 3(\vartheta-\alpha z)+\varepsilon_t\sin\vartheta\right) \tag{1.4}$$

$$\frac{dz}{dt}=v_{\parallel},\quad v_{\parallel}=\pm\left(\frac{2}{m_j}\left[E-e_j\Phi-\mu B_0\left(1-\varepsilon_h\cos 3(\vartheta-\alpha z)-\varepsilon_t\cos\vartheta\right)\right]\right)^{1/2} \tag{1.5}$$

В уравнении (1.3) опущен член $(B_\vartheta/B_0)\,v_{\parallel}$; предполагается, что он мал по сравнению с первым членом справа; это справедливо вблизи оси[1]. В уравнениях (1.3) и (1.4) не учитывается также центробежный дрейф, так как речь будет идти о запертых частицах (имеющих малые $v_{\parallel}$). Как следует из работы [6], это накладывает также ограничение сверху на величину электрического поля.

Система уравнений (1.3) — (1.5) в нулевом приближении ($\varepsilon_t=0$) при помощи замены $\varphi=3(\vartheta-\alpha z)$ приводится к виду, напоминающему уравнения движения частиц в аксиально-симметричном торе, и если пренебречь отклонением частиц Δr от магнитной поверхности (Δr — действительно малая величина, пропорциональная ларморовскому радиусу), то вместо (1.3), (1.5) можно записать уравнение, описывающее движение по координате φ

$$r_0\frac{d\varphi}{dt}=-3\alpha r_0 v\sqrt{\varepsilon_h\left[2\varkappa^2-1+\cos\varphi\right]},\qquad v=\left(\frac{2\mu B_0}{m_j}\right)^{1/2}$$

$$\varkappa^2=\frac{1}{2v^2\varepsilon_h}\left[\left(\frac{2}{m_j}\left[E-e\Phi-\mu B_0(1-\varepsilon_h)\right]\right)^{1/2}-\frac{c}{\alpha B_0 r}\frac{d\Phi}{dr}\right]^2 \tag{1.6}$$

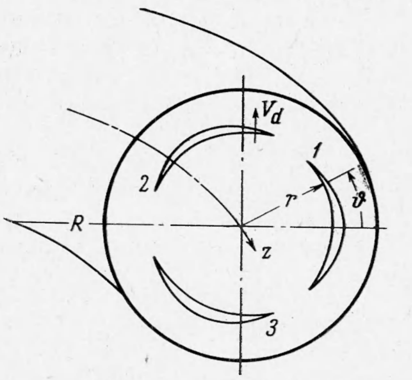
Отсюда следует, что как и в аксиально-симметричном торе [6,7], движение запертых частиц можно описать в терминах эллиптических функций с модулем

$$\varkappa^2\leqslant 1 \tag{1.7}$$

Период колебания запертых частиц равен

$$\tau=\frac{4}{3\alpha v\sqrt{2\varepsilon_h}}\int\limits_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\varkappa^2-\sin^2{}^1/_2\varphi}}=$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{3\alpha v\sqrt{\varepsilon_h}}K(\varkappa) \tag{1.8}$$



Фиг. 1

где $K(\varkappa)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, φ_0 — нуль подкоренного выражения. Соответствующие орбиты (условимся называть их «бананами») в плоскости $\vartheta-\alpha z$, r изображены на фиг. 1. Запертые частицы движутся в интервалах углов

$$^2/_3\pi\left(l-{}^1/_2\right)\leqslant\vartheta-\alpha z\leqslant{}^2/_3\pi\left(l+{}^1/_2\right)\quad(l=0,1,2,\ldots) \tag{1.9}$$

[1] Для пролетных частиц этого делать нельзя даже вблизи оси.

Для дальнейшего будет существенно то, что орбиты частиц в среднем дрейфуют вдоль z. Скорость этого дрейфа можно найти из очевидного условия

$$\frac{d}{dt}\langle\varphi\rangle = 0 \tag{1.10}$$

Это условие дает

$$\left\langle\frac{d\vartheta}{dt}\right\rangle = \alpha\left\langle\frac{dz}{dt}\right\rangle = -\frac{c}{rB_0}\frac{d\Phi}{dr} - \frac{3\,\mu B_0}{m_j\omega_{cj}r^2}\left[\frac{2E(\varkappa)}{K(\varkappa)} - 1\right]\varepsilon_h \tag{1.11}$$

Здесь угловые скобки означают операцию усреднения по периоду колебания запертых частиц согласно правилу

$$\langle A(\varphi)\rangle = \frac{1}{2K(\varkappa)}\int\limits_0^{\varphi_1}\frac{A(\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{\varkappa^2 - \sin^2(^1/_2\varphi)}} \tag{1.12}$$

При наличии слабой тороидальности $\varepsilon_t \neq 0$, очевидно, можно считать, что быстрое бананообразное движение запертых частиц между магнитными пробками сохраняется, но координата банана r, так же как и $\langle\vartheta\rangle$, будет медленно меняться. Уравнение, описывающее это медленное движение, можно найти усреднением уравнения (1.4)

$$\left\langle\frac{dr}{dt}\right\rangle = \frac{dr}{dt} = -\varepsilon_t\frac{\mu B_0}{m_j\omega_{cj}r}\langle\sin\vartheta\rangle \tag{1.13}$$

В использованном здесь приближении $B_\vartheta/B_z \ll \alpha$ (т. е. в пренебрежении вращательным преобразованием) быстрое движение по ϑ отсутствует и, следовательно, $\langle\sin\vartheta\rangle = \sin\langle\vartheta\rangle$.

Из уравнения (1.13) видно, что вследствие тороидальности банан сдрейфовывает поперек магнитной поверхности. В процессе колебаний частицы между областями с сильным винтовым магнитным полем тороидальный дрейф по радиусу сохраняет свой знак до тех пор, пока вследствие медленного движения по азимуту $\langle\vartheta\rangle$ частица не попадает в область тороидального дрейфа противоположного знака. Чем медленнее движется банан по $\langle\vartheta\rangle$ (и, соответственно, по $\langle z\rangle$), тем большим будет его отклонение от первоначальной магнитной поверхности. Движение же по $\langle\vartheta\rangle$ в приближении малой тороидальности описывается уравнением (1.11).

Рассмотрим сначала случай, когда электрическое поле $d\Phi/dr \equiv 0$. Тогда при $\varkappa^2 = \varkappa_0^2 = 0.83$ дрейфовая скорость банана вдоль оси z обращается в нуль (обращается в нуль правая часть уравнения (1.11)). Такие бананы в процессе медленного дрейфового движения оказываются запертыми в пределах ограниченных участков силовых линий и имеют аномально большое отклонение от магнитной поверхности. Разложим выражение для скорости дрейфа $d\langle\vartheta\rangle/dt$ по малым отклонениям от точки $(\varkappa_0,\ r_0)$

$$\frac{d\langle\vartheta\rangle}{dt} = -\frac{3\mu B_0\varepsilon_h}{m_j\omega_{cj}r_0K(\varkappa_0)}\frac{d}{d\varkappa_0^2}\left[2E(\varkappa_0) - K(\varkappa_0)\right]\left[\varkappa^2 - \varkappa_0^2 + (r - r_0)\frac{d\varkappa^2}{dr}\right] \tag{1.14}$$

В переменных

$$\tau = \frac{\mu B_0}{m_j\omega_{cj}r_0^2}t, \qquad x = \frac{r - r_0}{r_0} \tag{1.15}$$

система уравнений движения дрейфовых орбит (бананов) (1.11) и (1.14) имеет простую форму

$$\dot{x}_\tau = -\varepsilon_t\sin\vartheta,\ \dot{\vartheta}_\tau = 5.4\varepsilon_h(\varkappa^2 - \varkappa_0^2) - 5.4\varepsilon_h x \tag{1.16}$$

Решая систему (1.16) при начальном условии $x\ (\vartheta = \pi) = 0$, находим, что в процессе движения сохраняется величина

$$I = x + \frac{\sigma}{2}\frac{\sqrt{\varepsilon_t}}{\sqrt{1.35\,\varepsilon_h}}\sqrt{2\eta^2 - (1 + \cos\vartheta)} \tag{1.17}$$

а изменение $\langle\vartheta\rangle$ описывается уравнением

$$r\frac{d\langle\vartheta\rangle}{dt} = \frac{3\mu B_0}{m_j\omega_{cj}r}\,\sigma\sqrt{1.2\,\varepsilon_h\varepsilon_t\,[2\eta^2 - (1 + \cos\vartheta)]} \tag{1.18}$$

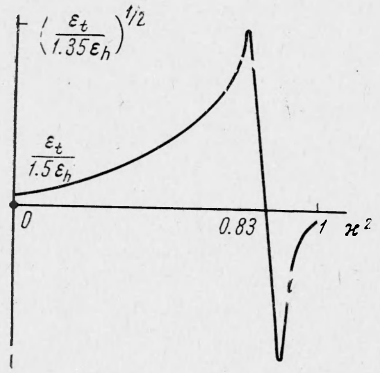
$$2\eta^2 = 2.7\frac{\varepsilon_h}{\varepsilon_t}[\varkappa^2 - \varkappa_0^2]^2 \tag{1.19}$$

Отсюда видно, что дрейфовые орбиты частиц с параметром $0 < \eta^2 \leqslant 1$ прецессируют в пределах ограниченных участков силовых линий с периодом

$$T_{tj} = \frac{2m_j\omega_{cj}r^2K\,(\eta)}{\mu B_0\sqrt{2.7\,\varepsilon_t\,\varepsilon_h}} \tag{1.20}$$

На фиг. 2 изображен график максимального удаления $(r - r_0)$ от магнитной поверхности в зависимости от $\varkappa^2$. Наибольшее смещение имеют бананы на границе захвата $\eta^2 = 1$

$$\Delta r_t\Big|_{\eta^2=1} = \left(\frac{\varepsilon_t}{1.35\,\varepsilon_h}\right)^{1/2} r_0 \tag{1.21}$$



Фиг. 2

Дрейфовые орбиты, которые в процессе дрейфа обходят вокруг всего тороида (их будем называть пролетными бананами), уделяются от магнитной поверхности значительно меньше

$$\Delta r_u\Big|_{\varkappa^2=0.1} \approx \frac{2\varepsilon_t}{3\varepsilon_h}\,r \tag{1.22}$$

Период прецессии таких бананов равен

$$T_{uj} = \frac{2\pi m_j\omega_{cj}r^2}{3\mu B_0\varepsilon_h}\left[\frac{2E\,(\varkappa)}{K\,(\varkappa)} - 1\right]^{-1} \tag{1.23}$$

При наличии достаточно сильного электрического поля

$$-\frac{c}{B_0}\frac{d\Phi}{dr} \equiv v_E \gg \frac{\mu B_0\varepsilon_h}{m_j\omega_{cj}r} \tag{1.24}$$

скорость дрейфа $\langle\dot\vartheta\rangle$ нигде не обращается в нуль. Вследствие этого дрейфовые орбиты движутся вдоль тора с почти постоянной скоростью и постепенно обходят участки с различными знаками тороидального дрейфа. Траекторий же, заключенных в ограниченной области силовых линий магнитного поля, в этом случае не существует вообще. Решая уравнение

$$\frac{d\langle\vartheta\rangle}{dt} = -\frac{c}{B_0}\frac{d\Phi}{dr} \tag{1.25}$$

совместно с уравнением (1.13), получаем

$$r(\langle\vartheta\rangle) - r_0 = \varepsilon_t\frac{\mu B_0}{m_j\omega_{cj}v_E}(\cos\langle\vartheta\rangle + 1), \quad T_E = \frac{r_0}{v_E} \quad \left(v_E \approx -\frac{c}{B_0}\frac{d\Phi}{dr}\right) \tag{1.26}$$

2. Банановое кинетическое уравнение. В качестве следующего шага оказывается естественным написать кинетическое уравнение, описывающее усредненное движение бананов. Оно получается в результате усреднения обычного дрейфового кинетического уравнения по периоду быстрого движения запертых частиц в магнитном поле. Введем функцию распределения для бананов $F_j(r, \langle\vartheta\rangle, \mu, \varkappa^2, t)$. Она подчиняется кинетическому уравнению

$$\frac{\partial F_j}{\partial t}+\frac{d\langle\vartheta\rangle}{dt}\frac{\partial F_j}{\partial\vartheta}+\frac{dr}{dt}\frac{\partial F_j}{\partial r}+\frac{\partial\varkappa^2}{\partial r}\frac{\partial r}{dt}\frac{dF_j}{\partial\varkappa^2}=\langle S\{F_j\}\rangle \qquad (2.1)$$

где для $d\langle\vartheta\rangle/dt$ и dr/dt следует воспользоваться уравнениями дрейфа бананов (1.11) и (1.13), а

$$\frac{\partial\varkappa^2}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{4\pi\mu B_0\varepsilon_h(r)}\left\{m_j\left(\frac{2}{m_j}\left[E-e_j\Phi(r)-\mu B_0(1-\varepsilon_h(r))\right]\right)^{1/2}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{c}{\alpha B_0 r}\frac{d\Phi}{dr}\right\}^2\right]$$

Элемент фазового объема для бананов после интегрирования по периоду 3 ($\vartheta-\alpha z$) имеет вид

$$\frac{4\pi d\mu B_0}{m_j}d\,\frac{1}{2\pi}\oint v_\parallel\,dt=4\pi\frac{d\mu B_0}{m_j}d\oint\left(2\varepsilon_h\frac{\mu B_0}{m_j}\left[2\varkappa^2-(1-\cos t)\right]\right)^{1/2}\frac{dt}{2\pi}=$$
$$=8\sqrt{\varepsilon_h}\left(\frac{\mu B_0}{m_j}\right)^{1/2}d\,\frac{\mu B_0}{m_j}K(\varkappa)\,d\varkappa^2 \qquad (\varkappa^2\leqslant 1) \qquad (2.2)$$

Интеграл столкновений в (2.1) для бананов можно получить из следующих соображений. При $\varepsilon_h\ll 1$ число бананов мало по сравнению с пролетными частицами. И следовательно, интеграл столкновений можно линеаризовать, пренебрегая столкновениями бананов с бананами. Будем исходить из известного выражения для линеаризованного интеграла столкновения [8]

$$S\{F_j\}=\sum_{j'}\frac{2\pi\lambda e_j^2e_{j'}^2}{m_j}\frac{\partial}{\partial v_\alpha}\left\{\left(\eta_{j'}+\eta_{j'}'-\frac{\eta_{j'}}{2x_{j'}}\right)\left[\frac{\delta_{\alpha\beta}}{v}-\frac{v_\alpha v_\beta}{v^3}\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{v_\alpha v_\beta}{v^3}\frac{\eta_{j'}}{x_j'}\right\}\left(\frac{\partial F_j}{m_j\partial v_\beta}+\frac{2v_\beta}{m_{j'}v_{Tj'}^2}F_j\right) \qquad (2.3)$$

$$\eta_j\equiv\eta(x_j)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x_j}e^{-t}\sqrt{t}\,dt,\quad \eta'=\frac{\partial\eta(x)}{\partial x},\quad x_j=\frac{v^2}{v_{Tj}^2}$$

Это выражение можно еще более упростить, если учесть, что распределение запертых частиц наиболее чувствительно к изменениям продольной скорости и поэтому в уравнении (1.3) можно пренебречь всеми остальными производными. Переходя, кроме того, к новым переменным μ, $\varkappa^2$, φ согласно соотношению, следующему из уравнений (1.3) и (1.6), имеем

$$v_\parallel=\frac{c}{\alpha B_0 r}\frac{d\Phi}{dr}+2\sigma\left[\frac{\mu B_0}{m_j}\varepsilon_h\left(\varkappa^2-\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\right]^{1/2} \qquad (2.4)$$

Переписываем (2.3) в форме [1]

$$S\{F_j\}=\frac{\nu_j}{\varepsilon_h}A(x_j)\,\sigma\sqrt{\varkappa^2-\sin^2{}^1/_2\varphi}\,\frac{\partial}{\partial\varkappa^2}\left\{\sigma\sqrt{\varkappa^2-\sin^2{}^1/_2\,\varphi}\right.$$
$$\left.\left(\frac{\partial F_j}{\partial\varkappa^2}+2x_j\varepsilon_hF_j\right)+c_j\sqrt{2x_j\varepsilon_h}\,F_j\right\} \qquad (2.5)$$

Здесь

$$\nu_j = \frac{16\sqrt{\pi}\,\lambda e^4 n}{3\sqrt{m_j}\,v_{Tj}^3}, \qquad A(x_j) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}\sum_{j'}\left(\eta_{j'} + \eta_{j'}' - \frac{\eta_{j'}}{2x_{j'}}\right)x_j^{-3/2}$$

$$c_j = \frac{c}{\alpha B_0 r v_{Tj}}\frac{d\Phi}{dr}.$$

Наконец, чтобы получить отсюда интеграл соударений для бананов, это выражение следует усреднить по периоду быстрого движения запертых частиц в магнитном поле согласно правилу (1.12). В результате находим

$$\langle S\{F_j\}\rangle = \frac{\nu_j}{\varepsilon_h}A(x_j)\frac{1}{K(\varkappa)}\frac{\partial}{\partial\varkappa^2}\int\limits_0^{\varkappa^2}K(t^{1/2})\,dt\left(\frac{\partial F_j}{\partial\varkappa^2} + 2x_j\varepsilon_h F_j\right) \tag{2.6}$$

Следует иметь в виду, что банановое кинетическое уравнение (3.1) справедливо лишь тогда, когда за период быстрого движения запертая частица совсем не испытывает соударений

$$\frac{\nu_j}{\varepsilon_h} \ll \frac{1}{\tau_j} \approx \alpha v_{Tj}\sqrt{\varepsilon_h} \tag{2.7}$$

В противном случае само понятие банан не имеет смысла.

3. Коэффициенты переноса плазмы в отсутствие электрического поля. Электрическое поле $\Phi(r)$ в конечном счете должно быть определено из условия амбиполярности диффузии. Ниже рассмотрим специальный предельный случай, когда, как будет видно, диффузия амбиполярна при $d\Phi/dr = 0$. Поскольку именно в этом случае частицы сильно отклоняются от магнитных поверхностей, здесь следует ожидать большой диффузии.

Рассмотрим ситуацию, когда частота столкновений запертых частиц лежит в интервале между обратными периодами прецессии запертых и пролетных бананов

$$T_{uj}^{-1} \gg \frac{\nu_j}{\varepsilon_h} \gg \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_h}T_{tj}^{-1} \tag{3.1}$$

Тогда в малой окрестности «энергий» $\varkappa^2$ запертых бананов столкновения успевают установить максвелловское распределение и поэтому полное решение бананового кинетического уравнения (2.1) можно искать в виде разложения по малому параметру $(\varepsilon_t/\varepsilon_h) \ll 1$. Для этого записываем функцию распределения F_j в виде максвелловской функции $F_j^{(0)}$ и малой добавки к ней $F_j^{(1)}$ за счет тороидальности системы

$$F_j = F_j^{(0)}(r, E) + F_j^{(1)}(r, \vartheta, \mu, \varkappa^2) \tag{3.2}$$

$$F_j^{(0)}(r, E) = \frac{n_{0j}(r)}{\pi^{3/2}v_{Tj}^3}\exp\left\{-\frac{2E}{m_j v_{Tj}^2}\right\}$$

В уравнении (2.1) для $F_j^{(1)}$ ограничимся τ-приближением для интеграла столкновений и подставим явные выражения для скоростей дрейфа бананов из (1.11) и (1.13). Полученное уравнение

$$-\frac{3\mu B_0}{m_j\omega_{cj}r^2}\varepsilon_h\left(\frac{2E(\varkappa)}{K(\varkappa)} - 1\right)\frac{\partial F_j^{(1)}}{\partial\vartheta} + \frac{\nu_j}{\varepsilon_h}F_j^{(1)} = \frac{\mu B_0}{m_j\omega_{cj}r}\sin\vartheta\,\frac{\partial F_j^{(0)}}{\partial r} \tag{3.3}$$

имеет следующее решение:

$$F_j^{(1)} = -\frac{\varepsilon_t}{3\varepsilon_h}\frac{\partial F_j^{(0)}}{\partial\ln r}\left\{P\frac{\cos\vartheta}{2E(\varkappa)/K(\varkappa) - 1} - \pi\sin\vartheta\,\delta\left(\frac{2E(\varkappa)}{K(\varkappa)} - 1\right)\right\} \tag{3.4}$$

Здесь символ P используется для обозначения главного значения сингулярного выражения.

Домножая функцию (3.4) на дрейфовую скорость банана dr/dt и интегрируя по фазовому объему бананов (2.2), находим поток плазмы поперек магнитного поля

$$\langle n v_{rj}{}^{\vartheta} \rangle = -8 \varepsilon_h{}^{1/2} \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{2\pi} \int\limits_0^{\infty} \left(\frac{\mu B_0}{m_j} \right)^{1/2} d\, \frac{\mu B_0}{m_j} \int\limits_0^1 d\varkappa^2 K(\varkappa)$$

$$F_j{}^{(1)} \frac{\mu B_0 \varepsilon_t}{m_j \omega_{cj} r} \sin\vartheta = -\frac{\varepsilon_t{}^2}{4.3\, \varepsilon_h{}^{1/2}} \frac{v_{Tj}{}^2}{\omega_{cj}} \frac{dn(r)}{dr} \tag{3.5}$$

Отсюда следует, что при выполнении неравенств на частоту столкновений ионов и электронов (3.1) (которые, кстати, не всегда могут быть выполнены одновременно для обоих сортов частиц) диффузия частиц в изотермической плазме будет амбиполярной.

Если же частота столкновений выходит за пределы неравенств (3.1), то требование амбиполярности диффузии в плотной плазме накладывает ограничение на величину электрического поля следующего вида:

$$e_j n \frac{d\Phi(r)}{dr} = -m_j v_{Tj}{}^2 \frac{dn(r)}{dr} \tag{3.6}$$

Здесь индекс j относится к тому сорту частиц, диффузия которых в отсутствие электрического поля больше.

4. Влияние невозмущенного электрического поля на процессы переноса. Электрическое поле с амплитудой (3.6) значительно уменьшает величину отклонения орбит от магнитной поверхности, а также сильно сглаживает зависимость этого отклонения от энергии частицы, поэтому естественно ожидать значительного уменьшения коэффициентов переноса в разреженной плазме.

Рассмотрим сначала случай не очень редких столкновений, когда дрейфовые орбиты частиц не успевают совершить полный период прецессии по траектории (1.26) за время соударения, т. е.

$$\frac{\nu_j}{\varepsilon_h} > T_E{}^{-1} \tag{4.1}$$

Тогда в качестве характерного масштаба размешивания входит длина свободного пробега дрейфовой орбиты до столкновения

$$\lambda_j \sim \frac{\mu B_0 \varepsilon_t}{m_j \omega_{cj} r} \Big/ \frac{\nu_j}{\varepsilon_h} \tag{4.2}$$

С уменьшением частоты столкновений этот масштаб размешивания растет и, соответственно, коэффициенты переноса увеличиваются. Для численного расчета последних ищем решение кинетического уравнения (2.1) в виде разложения по малости длины свободного пробега в форме (3.2). При выполнении условия (4.1) в кинетическом уравнении (2.1) достаточно учесть лишь соударения и тороидальный дрейф. Далее, из-за малости смещения пролетных частиц от магнитной поверхности поправка к максвелловской функции распределения также оказывается значительно меньше, чем для бананов. Поэтому требование непрерывности функции распределения представляет собой условие обращения в нуль поправки

$F_j^{(1)}$ для бананов на границе их фазового объема

$$F_j^{(1)}\big|_{\varkappa^2=1-0} = 0 \tag{4.3}$$

Используя граничное условие (4.3), находим решение линеаризованного уравнения (2.1)

$$F_j^{(1)} = -\frac{\mu B_0}{m_j} \frac{\varepsilon_t \varepsilon_h}{\omega_{cj} r \nu_j A(x_j)} (\varkappa^2 - 1) \frac{\partial F_j^{(0)}}{\partial r} \sin\vartheta \tag{4.4}$$

Выражение для диффузионного потока частиц поперек магнитного поля находим путем подстановки полученного результата в уравнение (3.5)

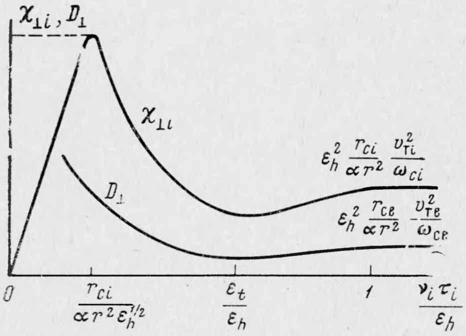
$$\langle n v_{rj}{}^{\vartheta} \rangle = \frac{\varepsilon_t^2 \varepsilon_h^{1/2}}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{r_{cj} v_{Tj} \varepsilon_h}{\nu_j r^2} \right) \frac{v_{Tj}^2}{\omega_{cj}} \int\limits_0^\infty e^{-x_j} \frac{x_j^{5/2} dx_j}{A(x_j)} \left(\frac{dn}{dr} - \frac{2 e_j \Phi}{m_j v_{Tj}^2} n \right)$$

$$\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_h} \tau_j^{-1} > \frac{\nu_j}{\varepsilon_h} > T_E^{-1} \tag{4.5}$$

Здесь левое неравенство на частоту соударений отражает тот факт, что прецессия бананов становится существенной только в достаточно редкой плазме, когда длина свободного тороидального дрейфа банана (4.2) превышает толщину самого банана. В противном случае размешивание плазмы в процессе быстрого движения запертой частицы по банану, рассмотренное ранее в работе [1], дает больший вклад в коэффициенты переноса, чем слабая прецессия банана (фиг. 3).

Из уравнения (4.5) непосредственно следует, что поток ионов и электронов поперек магнитного поля будет амбиполярным лишь при условии, что электрическое поле почти полностью компенсирует давление ионов (случай $j = i$ в формуле (3.6)). При этом скорость амбиполярной диффузии определяется электронами, а коэффициент ионной температуропроводности $\chi_{\perp i}$ остается значительно больше, чем для электронов, и может быть легко найден тем же методом, что и поток частиц. Максимум

$$\chi_{\perp i} \sim \varepsilon_h^{1/2} \varepsilon_t^2 \frac{v_{Ti}^2}{\omega_{ci}}$$



Фиг. 3

достигается при частоте столкновений порядка одного периода прецессии орбиты, а затем начинает падать линейно с ν (см. фиг. 3). Найденное выражение (1.26) для длины размешивания в этом случае позволяет без вычислений оценить величину $\chi_{\perp i}$

$$\chi_{\perp i} \simeq \varepsilon_h^{1/2} \left(\frac{\nu_i}{\varepsilon_h} \right) (\Delta r)^2 = \nu_i \varepsilon_t^2 \varepsilon_h^{-1/2} \left(\frac{d \ln n_0}{dr} \right)^{-2}, \quad \frac{\nu_i}{\varepsilon_h} \ll T_E^{-1} \tag{4.6}$$

С дальнейшим уменьшением частоты столкновений электрическое поле меняет знак и наибольший вклад в теплопроводность начинают давать электроны.

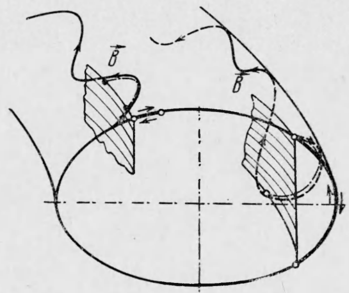
5. Движение запертых частиц в крутом стеллараторе. Рассмотрим теперь случай, противоположный исследованному ранее, а именно случай очень крутого стелларатора.

В качестве модели используем здесь магнитное поле двухзаходного стелларатора вблизи оси [5]

$$\mathbf{B} = B_0\{1 - \varepsilon_l \cos\vartheta\}\mathbf{e}_z + \alpha r b\{\cos 2(\vartheta - \alpha z) - {}^1/_2 b/B_0\}\mathbf{e}_\vartheta + \\ + \alpha r b \sin 2(\vartheta - \alpha z)\mathbf{e}_r \qquad (5.1)$$

$$\varepsilon_l \gg \left(\frac{b}{B_0}\right)^2 (\alpha r)^2, \qquad \frac{b}{B_0} \ll 1$$

Следует различать два сорта запертых частиц. Одни из них имеют достаточно большую продольную скорость и свободно проходят сквозь локальные магнитные пробки, возникающие из-за быстрых колебаний силовой линии около ее среднего положения. Поэтому в процессе движения таких частиц происходит усреднение по периоду винтового поля и этот случай сводится к уже рассмотренному случаю аксиально-симметричного поля со средним вращательным преобразованием [1].



Фиг. 4

Однако существует также группа частиц с очень малой продольной скоростью

$$v_\parallel \lesssim v_\perp \left(\frac{b\varepsilon_l}{2B_0}\right)^{1/2} \qquad (5.2)$$

которые оказываются запертыми в пределах одного периода винтового поля. Причина этого заключается в том, что силовая линия за период дважды пересекает поверхность постоянного магнитного поля, на которой достигается максимальное значение поля для данного участка силовой линии (см. фиг. 4; траектория изображена пунктиром, а ее проекция на плоскость $z = \mathrm{const}$ — жирной линией). Также как и в п. 2, разбиваем движение на быстрые колебания вдоль силовой линии и дрейф в тороидальном магнитном поле. Решая усредненное по быстрым колебаниям уравнение для дрейфа, получаем траекторию частиц в отсутствие электрического поля

$$\langle r(\langle\vartheta\rangle)\rangle = \frac{r_0}{\cos\langle\vartheta\rangle + (b/B_0)(E(\varkappa)/K(\varkappa) - 0.5)} \qquad (5.3)$$

$$\varkappa^2 = \frac{E - \mu B_0(1 - \langle\varepsilon_l\rangle\cos\langle\vartheta\rangle - ({}^1/_2 b/B_0)\langle\varepsilon_l\rangle)}{\mu b\langle\varepsilon_l\rangle} \qquad (5.4)$$

Из (5.3) и (5.4) находим, что частица дрейфует приблизительно в плоскости постоянного магнитного поля до тех пор, пока не выходит из захвата при изменении параметра $\varkappa^2$. Правда, за это время она выдрейфовывает на расстояние порядка размеров системы. При наличии равновесного электрического поля (40) тороидальный дрейф запертых частиц усредняется из-за быстрого дрейфа по углу ϑ (см. п. 2) и их траектория совпадает с ранее найденной (1.26). Отклонение частиц от магнитной поверхности при этом значительно уменьшается по сравнению со случаем без элекрического поля.

Коэффициенты переноса могут быть вычислены аналогично тому, как это сделано в § 5. Запертые частицы первого типа дают основной вклад в процессы переноса при частых соударениях, а второго типа — при редких. Зависимость коэффициентов $D_{\perp}$ и $\chi_{\perp i}$ от частоты соударений качественно описываются по-прежнему фиг. 3.

Для получения количественных оценок следует иметь в виду, что число частиц второго типа значительно меньше, а частота соударений больше, чем у частиц первого типа

$$\frac{\delta n}{n_0} \approx \frac{2}{\pi}\left(\frac{b\varepsilon_t}{B_0}\right)^{1/2}, \qquad \nu_{eff} \simeq \nu_j \Big/ \left(\frac{b\varepsilon_t}{B_0}\right) \tag{5.5}$$

Поступила 1 III 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Галеев А. А., Сагдеев Р. З. Явления переноса в разреженной плазме в тороидальных магнитных ловушках. ЖЭТФ, 1967, т. 53, № 7.
2. Попрядухин А. П. Возмущения движения частиц в стеллараторе. Атомная энергия, 1965, т. 18, № 2.
3. Grad H. Toroidal containment of a plasma. Phys. Fluid., 1967, vol. 10, No. 1.
4. Gibson A. and Taylor J. B. Single particle motion in toroidal stellarator fields. Preprint of Culham Laboratory CLM-P137. Abingdon Berks., 1967.
5. Морозов А. И., Соловьев Л. С. Геометрия магнитного поля. Сб. «Вопросы теории плазмы», т. 2, Атомиздат, 1963.
6. Berk H. L. and Galeev A. A. Velocity space instabilities. Phys. Fluid., 1967, vol. 10, No. 2.
7. Кадомцев Б. Б., Погуце О. П. Неустойчивость плазмы на запертых частицах в тороидальной геометрии. ЖЭТФ, 1966, т. 51, № 12.
8. Трубников Б. А. Столкновения частиц в полностью ионизованной плазме. Сб. «Вопросы теории плазмы», т. 1. Атомиздат, 1963.