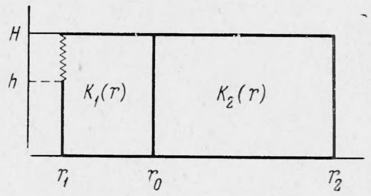
# К ЗАДАЧЕ О НЕСОВЕРШЕННОЙ ПО СТЕПЕНИ ВСКРЫТИЯ СКВАЖИНЕ В КУСОЧНО-РАДИАЛЬНО-НЕОДНОРОДНОМ ПОРИСТОМ ПЛАСТЕ

***В. Д. Алферов (Томск)***

Пористый пласт предполагается кусочно-радиально-неодиородным: коэффициент $k(r)$ проницаемости терпит разрыв непрерывности на некоторой поверхности $r = r_0$. Такая неоднородность имеет место, например, в случае заглизирования после солянокислотной обработки призабойной зоны. Методом, указанным в [1], строится решение задачи при заданных значениях расхода на вскрытой части скважины и давления на контуре питания.




Фиг. 1

Пусть изотропный недеформируемый пористый пласт с кусочно-радиальной неоднородностью и постоянной мощностью $H$ заполнен однородной несжимаемой жидкостью и разрабатывается при напорном режиме одной центральной несовершенной по степени вскрытия скважиной. Перекрывающий и подстилающий горизонты пласта считаем непроницаемыми, фильтрацию установившейся, подчиняющейся закону Дарси. Тогда функция давления $\Phi$ $(r, z)$ будет удовлетворять в области (фиг. 1) фильтрации уравнениям

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rk_i(r)\frac{\partial\Phi^{(i)}}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_i(r)\frac{\partial\Phi^{(i)}}{\partial z}\right)=0, \qquad \Phi^{(i)}=\frac{1}{\mu}(P^{(i)}+\gamma z) \tag{1}$$

$$i=1,\ 2$$

и следующим условиям:

$$\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial r}=\begin{cases}q, & h<z\leqslant H\\ 0, & 0\leqslant z<h\end{cases}, \qquad r=r_1, \qquad q=\frac{Q\mu}{2\pi r_1 k_1(r_1)(H-h)} \tag{2}$$

$$\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial z}=\frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial z}=0, \qquad z=0, \qquad z=H, \qquad r_1\leqslant r\leqslant r_2$$

$$\Phi^{(2)}=\Phi_0=\mathrm{const}, \qquad 0\leqslant z\leqslant H, \qquad r=r_2 \tag{3}$$

$$\Phi^{(1)}=\Phi^{(2)}, \qquad k_1\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial r}=k_2\frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial r}, \qquad 0\leqslant z\leqslant H, \qquad r=r_0 \tag{4}$$

Здесь $p^{(i)}$ — давление в области с $k_i(r)$, $\mu$ — вязкость, $\gamma$ — удельный вес жидкости, $Q$ — дебит несовершенной скважины, $(h, H)$ — интервал вскрытия скважины, $r_1$, $r_2$ — радиусы скважины и контура питания, соответственно, $r$, $z$ — цилиндрические координаты.

Предполагая далее коэффициент проницаемости отличным от нуля всюду в области фильтрации, запишем уравнения (1) в виде

$$\frac{\partial^2\Phi^{(i)}}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\Phi^{(i)}}{\partial r^2}+N_i(r)\frac{\partial\Phi^{(i)}}{\partial r}=0, \qquad N_i(r)=\frac{d}{dr}\ln(rk_i(r)), \qquad i=1,\ 2 \tag{5}$$

Решение (5) представим при помощи ряда [1] следующим образом:

$$\Phi^{(i)}=c_i+\frac{Q\mu}{2\pi(H-h)}\int\limits_{r_i}^{r}\frac{dr}{rk_i(r)}+\sum_{m=0}^{\infty}F_m^{(i)}(r,z)\,f_m^{(i)}(r) \tag{6}$$

где $F_m^{(i)}$ $(r, z)$ — пока неизвестные функции, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{\partial^2 F_m^{(i)}}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 F_m^{(i)}}{\partial r^2}=0, \qquad m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{7}$$

$$C_1=\Phi_0+\frac{Q\mu}{2\pi(H-h)}\left(\int\limits_{r_2}^{r_0}\frac{dr}{rk_2(r)}-\int\limits_{r_1}^{r_0}\frac{dr}{rk_1(r)}\right), \qquad c_2=\Phi_0 \tag{8}$$

На функции $F_m^{(i)}$ $(r, z)$ наложим условия

$$F_m^{(i)}(r,z)=\int F_m^{(i)}(r,z)\,dr, \qquad m=1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{9}$$

учитывая которые для $f_0^{(i)}(r)$ получим реккурентные соотношения

$$\frac{d}{dr}f_0^{(i)} + N_i f_0^{(i)} = 0, \qquad 2\frac{d}{dr}f_m^{(i)} + N_i f_m^{(i)} = -\left(\frac{d^2}{dr^2}f_{m-1}^{(i)} + N_i\frac{d}{dr}f_{m-1}^{(i)}\right) \tag{10}$$

При определении $f_0^{(i)}(r)$ ограничимся частными решениями уравнений (10), т. е. выделяем определенный класс решений уравнений (5), зависящий только от произвольных функций $F_0^{(i)}(r, z)$; все остальные $F_m^{(i)}(r, z)$ выражаются через предыдущие и в конечном счете через $F_0^{(i)}(r, z)$. Из (10) с учетом (5) находим

$$f_0^{(i)} = (rk_i(r))^{-1/2}, \qquad f_m^{(i)} = -\frac{1}{2}(rk_i(r))^{-1/2}\int (rk_i(r))^{-1/2}\left(\frac{d^2}{dr^2}f_{m-1}^{(i)} + N_i\frac{d}{dr}f_{m-1}^{(i)}\right)dr$$
$$(m=1,2,\ldots) \tag{11}$$

Интегралы в (11 могут быть вычислены для значений функций $k_i(r)$.

Функции $F_0^{(i)}(r, z)$ возьмем в виде

$$F_0^{(i)} = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n^{(i)}e^{\lambda_n r} + b_n^{(i)}e^{-\lambda_n r})\cos\lambda_n z, \qquad \lambda_n = \frac{n\pi}{H} \tag{12}$$

Согласно (9), для $F_m^{(i)}(r, z)$ имеем

$$F_m^{(i)} = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n^{(i)}e^{\lambda_n r} + (-1)^m b_m^{(i)}e^{-\lambda_n r})\lambda_n^{-m}\cos\lambda_n z, \qquad m = 1, 2\ldots \tag{13}$$

Введем обозначения

$$\alpha_n^{(i)}(r) = \sum_{n=0}^{\infty}e^{\lambda_n r}\lambda_n^{-m}f_m^{(i)}(r), \qquad \beta_n^{(i)}(r) = \sum_{n=0}^{\infty}e^{-\lambda_n r}(-1)^m\lambda_n^{-m}f_m^{(i)}(r) \tag{14}$$

при помощи которых (6) запишется в виде

$$\Phi^{(i)} = c_i + \frac{Q\mu}{2\pi(H-h)}\int_{r_i}^{r}\frac{dr}{rk_i(r)} + \sum_{n=0}^{\infty}(a_n^{(i)}\alpha_n^{(i)}(r) + b_n^{(i)}\beta_n^{(i)}(r))\cos\lambda_n z \tag{15}$$

Первые граничные условия (3) выполнены. Подчиняя решение оставшимся условиям, получим линейную систему алгебраических уравнений относительно $a_n^{(i)}$ и $в_n^{(i)}$

$$a_n^{(1)}(\alpha_n^{(1)})'_{r=r_1} + b_n^{(1)}(\beta_n^{(1)})'_{r=r_1} = -q\sin\lambda_n h/\lambda_n, \qquad a_n^{(2)}\alpha_n^{(2)}(r_2) + b_n^{(2)}\beta_n^{(2)}(r_2) = 0$$
$$(a_n^{(1)}\alpha_n^{(1)} + b_n^{(1)}\beta_n^{(1)})_{r=r_0} = (a_n^{(2)}\alpha_n^{(2)} + b_n^{(2)}\beta_n^{(2)})_{r=r_0} \tag{16}$$
$$k_1(r_0)(a_n^{(1)}\alpha_n^{(1)} + b_n^{(1)}\beta_n^{(1)})'_{r=r_0} = k_2(r_0)(a_n^{(2)}\alpha_n^{(2)} + b_n^{(2)}\beta_n^{(2)})'_{r=r_0}$$

При $h \to 0$ величины $q \to Q\mu / 2\pi r_1 k_1(r_1)H$, $\sin\lambda_n h \to 0$, т. е. система уравнений (16) становится однородной, при этом $a_n^{(i)} = в_n^{(i)} = 0$; в (6) останутся первые два члена, дающие решение плоско-радиальной фильтрации к совершенной скважине. Если положить $k_1 = k_2$, получим решение для случая непрерывно изменяющегося коэффициента проницаемости. Аналогичным путем нетрудно построить решение и для случая, когда пласт имеет постоянную анизотропию и $N$ поверхностей разрыва непрерывности $k(r)$.

Поступила 26 IX 1967

## ЛИТЕРАТУРА

1. Назаров Г. И. Давление газовой струи на равнобокий клин. ПМТФ, 1962, № 1.
2. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. Гостоптехиздат, 1949.