

## АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ТЕРМОУПРУГИХ НАПРЯЖЕНИЙ НА ПРОЦЕСС КРИСТАЛЛИЗАЦИИ ШАРА В НЕВЕСОМОСТИ

И. В. БЕЛОВА, А. Л. ОВСЯННИКОВА

(Новосибирск)

В процессе кристаллизации шара, первоначально полностью расплавленного, а затем медленно охлаждаемого со всей поверхности, в твердой фазе возникают термоупругие напряжения. Если интенсивность касательных напряжений достигает критического значения — предела текучести, то появляется область пластических деформаций. В [1] описывается проведение экспериментов по кристаллизации медных и серебряных образцов в форме шара (примесь составляла 0,001% в медном образце и 0,004% в серебряном) в условиях невесомости и отмечается, что структура полученных образцов указывает на почти полное отсутствие конвективного движения в расплаве. Представляется интересным исследовать влияние термоупругих напряжений на процесс кристаллизации образцов в невесомости и на структуру получаемых кристаллов.

В [2] указывается на возможность образования усадочной раковины в процессе кристаллизации шара, если плотность твердой фазы больше плотности жидкой фазы. Появление термоупругих напряжений — одна из причин возможного образования усадочных раковин. В модели [2] усадочная раковина возникает сразу же с началом процесса кристаллизации. Поэтому напряжения в твердой фазе обусловлены только несовместными температурными деформациями, но не усадкой материала, и можно ожидать, что возникающие напряжения не оказывают заметного влияния на дальнейший процесс кристаллизации.

В данной работе исследуется процесс кристаллизации без образования усадочной раковины.

1. Материал в жидком состоянии считается несжимаемым, и предполагается, что процесс кристаллизации протекает при отсутствии внешних воздействий (в невесомости и в вакууме).

Процесс кристаллизации исследовался численно для металлов (медь, алюминий, серебро) в [3] и для полупроводниковых материалов (германий, кремний) в [4]. Для всех веществ задача ставилась в изотропном приближении [5].

Вводится сферическая система координат  $r, \varphi, \theta$  с началом в центре шара. Для жидкой фазы имеем соотношения

$$(1.1) \quad \frac{\partial T_2}{\partial t} = \frac{\lambda_2}{\rho_2 c_2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T_2}{\partial r} \right);$$

$$(1.2) \quad P = -p(t)I,$$

где  $T_2, \rho_2, c_2, \lambda_2$  — температура, плотность, коэффициенты теплоемкости и теплопроводности жидкой фазы;  $P$  — тензор напряжений;  $I$  — единичный тензор.

Поведение материала в твердой фазе описывается системой уравнений термоупругопластичности. Благодаря сферической симметрии ненулевыми являются только нормальные компоненты тензора напряжений  $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_\theta$ , причем  $\sigma_\varphi = \sigma_\theta$ . Во всей области твердого состояния вещества справедливо уравнение равновесия

$$(1.3) \quad \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2}{r} (\sigma_r - \sigma_\varphi) = 0.$$

В упругой области выполнены соотношения закона Гука

$$(1.4) \quad \frac{\partial W}{\partial r} = \frac{1}{E} (\sigma_r - 2\nu\sigma_\varphi) + \alpha (T_1 - T_0);$$

$$(1.5) \quad \frac{W}{r} = \frac{1}{E} ((1-\nu)\sigma_\varphi - \nu\sigma_r) + \alpha (T_1 - T_0),$$

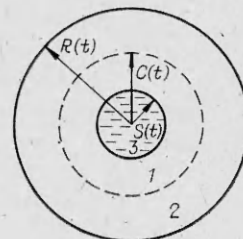
где  $E$  — модуль Юнга;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $\alpha$  — коэффициент теплового расширения;  $W$  — перемещение частиц твердой фазы;  $T_0$  — температура плавления.

На фиг. 1 изображены следующие области, возникающие в процессе кристаллизации шара: 1 — область пластических деформаций, 2 — область упругих деформаций, 3 — жидкая фаза. В пластической области выполняется условие Мизеса

$$(1.6) \quad |\sigma_\varphi - \sigma_r| = \frac{2}{\sqrt{3}} k,$$

где  $k$  — предел текучести.

Появление термоупругих напряжений рассматривается только в процессе кристаллизации шара, без исследования дальнейшего его остывания. Тогда, считая, что шар



Ф и г. 1

остывает достаточно медленно и поэтому термическое возмущение в процессе кристаллизации будет достаточно малым, можно положить, что модуль Юнга и предел текучести  $k$  не зависят от температуры. Коэффициент Пуассона  $\nu$  практически тоже не зависит от температуры.

Распределение температуры в твердой фазе описывается уравнением теплопроводности [6]

$$(1.7) \quad (1+a) \frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{\lambda_1}{\rho_1 c_1} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T_1}{\partial r} \right),$$

где  $a = \frac{(1+\nu) E \alpha^2 T_0}{(1-2\nu)(1-\nu) c_1 \rho_1}$  — коэффициент связанности.

2. Фронт кристаллизации является поверхностью сильного разрыва. Поэтому на фронте справедливы соотношения [7]

$$(2.1) \quad [\rho(v - D_n)] = 0;$$

$$(2.2) \quad [p_n] = \rho(v - D_n)[v - D_n];$$

$$(2.3) \quad [q] = \rho(v - D_n) \left[ \frac{v^2}{2} + U - \frac{1}{\rho} p_n \right],$$

где  $D_n = dS/dt$  — скорость фронта кристаллизации;  $v_1, v_2$  — абсолютные скорости перемещения частиц среды;  $p_n$  — нормальная составляющая тензора напряжений;  $[q]$  — поток тепла через поверхность  $S(t)$ :

$$[q] = q_1 - q_2 = \lambda_1 \partial T_1 / \partial r|_{r=S(t)} - \lambda_2 \partial T_2 / \partial r|_{r=S(t)};$$

$U$  — внутренняя энергия, скачок которой на фронте равен  $-\gamma$ ; индекс 1 соответствует твердой фазе, 2 — жидкой.

Учитывая, что  $v_2 = 0$ , имеем из (2.1)

$$(2.4) \quad v_1 = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1} D_n.$$

Подставляя (2.4) в (2.2), получим

$$(2.5) \quad [p_n] = -\frac{\rho_2}{\rho_1} (\rho_1 - \rho_2) D_n^2.$$

Теперь из (2.3)–(2.5) с учетом, что  $p_{n2} = p(t)$  — давление в жидкой фазе, найдем соотношение на фронте

$$(2.6) \quad \frac{dS}{dt} \left( \rho_2 \gamma + \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} p(t) \right) = \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} \Big|_{r=S(t)} - \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} \Big|_{r=S(t)} + \left( \frac{dS}{dt} \right)^3 \frac{\rho_2 (\rho_1^3 - \rho_2^3)}{2\rho_1^2}.$$

Нужно определить компоненты тензора напряжений  $\sigma_r, \sigma_\varphi$ , температуру  $T_1, T_2$  и положение фронта  $S(t)$ , удовлетворяющие уравнениям (1.1)–(1.7), (2.6) и начальным условиям при  $t = 0$

$$T_2(r, 0) = \varphi(r), \quad S(0) = R_0, \\ T_2(R_0, 0) = \varphi(R_0) = T_0, \quad f(0) = 0, \quad p(0) = 0,$$

граничным условиям при  $r = R$

$$(2.7) \quad \sigma_r(R, t) = 0, \quad T_1(R, t) = T_0 - f(t),$$

$$W(R, t) = R - R_0, \quad R^3 = S^3 + \frac{\rho_2}{\rho_1} (R_0^3 - S^3).$$

Здесь  $\varphi(r)$  — начальное распределение температуры в шаре по радиусу;  $f(t)$  — функция, определяющая температурное охлаждение шара.

3. Решим упругопластическую часть задачи, считая известным распределение температуры. Система уравнений, описывающих состояние материала в упругой области, имеет общее решение [8]:

$$(3.1) \quad \sigma_r^y = -\frac{2C_1}{r^3} + C_2 - \frac{2E\alpha}{(1-\nu)r^3} \int_r^R T^0 r^2 dr;$$

$$(3.2) \quad \sigma_r^y = \frac{C_1}{r^3} + C_2 - \frac{E\alpha}{1-\nu} \left( T^0 - \frac{1}{r^3} \int_r^R T^0 r^2 dr \right),$$

где  $T^0 = T_0 - T_1$ . Подставляя (3.1), (3.2) в (1.5), из условия (2.7) имеем

$$C_1 = \frac{ER^3}{3(1-\nu)} \left( \frac{R-R_0}{R} \right), \quad C_2 = \frac{2C_1}{R^3}.$$

Следовательно,

$$(3.3) \quad \sigma_r^y = -\frac{2E\alpha}{(1-\nu)r^3} \int_r^R T^0 r^2 dr - \frac{2E(R^3-r^3)}{3(1-\nu)r^3} \left( \frac{R-R_0}{R} \right).$$

Подставив (3.3) в (2.5), получим соотношение

$$p(t) = \frac{2E\alpha}{(1-\nu)S^3} \int_S^R T^0 r^2 dr + \frac{2E(R^3-S^3)}{3(1-\nu)S^3} \left( \frac{R-R_0}{R} \right) + B,$$

где 
$$B = -\frac{\rho_2}{\rho_1} (\rho_1 - \rho_2) D_n^2.$$

В каждый момент времени границу  $C$  между упругой и пластической областями можно найти из условия пластичности  $|\sigma_r^y - \sigma_\psi^y|_{r=C} = \frac{2}{\sqrt{3}}k$ . Подставив выражения для  $\sigma_r^y$  и  $\sigma_\psi^y$ , запишем

$$(3.4) \quad -\frac{ER^3}{(1-\nu)C^3} \left( \frac{R-R_0}{R} \right) - \frac{3E\alpha}{(1-\nu)C^3} \int_C^R T^0 r^2 dr + \frac{E\alpha \bar{T}_C}{1-\nu} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}k.$$

Так как распределение температуры известно, то из (3.4) определяется  $C$ .

Уравнение равновесия в области пластических деформаций, используя условие Мизеса, приведем к виду  $d\sigma_r^n/dr = -4k/(\sqrt{3}r)$ . Отсюда

$$(3.5) \quad \sigma_r^n = -\frac{4}{\sqrt{3}}k \ln r + C_3.$$

Константу  $C_3$  можно найти из условия непрерывности нормальных напряжений на границе  $C$ :

$$(3.6) \quad \sigma_r^n|_{r=C} = \sigma_\psi^n|_{r=C}.$$

Подставив (3.5), (3.3) в (3.6), получим

$$C_3 = \frac{4}{\sqrt{3}}k \ln C - \frac{4}{3\sqrt{3}}k - \frac{2E}{3(1-\nu)} \left[ \frac{R-R_0}{R} - \alpha T_C^0 \right].$$

Тогда давление на фронте

$$p(t) = -\frac{4}{\sqrt{3}}k \ln \frac{C}{S} + \frac{4}{3\sqrt{3}}k + \frac{2E}{3(1-\nu)} \left( \frac{R-R_0}{R} - \alpha T_C^0 \right) + B.$$

В некоторый момент времени вся область может перейти в пластическое состояние. Условие пластичности на границе при  $r=R$  имеет вид

$$\frac{E\alpha T^0}{1-\nu} - \frac{(R-R_0)E}{2R(1-\nu)} = \frac{2}{\sqrt{3}}k.$$

Расчеты показывают, что это равенство достигается, когда фронт кристаллизации проходит 0,4–0,8% от первоначального радиуса сферы. При этом давление на фронте

$$p(t) = \frac{4}{\sqrt{3}}k \ln \frac{S}{R} + B.$$

4. Характерное значение перемещения берется равным максимальному, которое достигается при  $S = 0$ :

$$W^* = R_0 \left( \sqrt[3]{\frac{\rho_2}{\rho_1}} - 1 \right).$$

Характерное значение напряжений  $\sigma^* = k/\sqrt{3}$ .

Для рассматриваемых материалов вблизи точки плавления  $k \approx 10^4$  дин/см<sup>2</sup> (в системе СГС). Характерная температура — температура плавления, характерный радиус —  $R_0$ .

Предполагается, что шар радиуса  $R_0 = 1$  см охлаждается со скоростью 1°C/мин. Тогда время кристаллизации в классической задаче (без учета термоупругих напряжений)  $t^* \approx 10^2$  с. Среднюю скорость  $D_{11}^*$  возьмем равной  $R_0/t^* \approx 10^{-2}$  см/с. Следовательно, квадратом и кубом скорости движения фронта, входящими в условие на фронте, можно пренебречь, так как коэффициенты перед ними в безразмерной записи имеют второй и четвертый порядок малости по сравнению с коэффициентами перед другими членами уравнения. Тогда (2.5) примет вид  $[p_n] = 0$ , (2.6) преобразуется к виду

$$\frac{dS}{dt} \left( \rho_2 \gamma + \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} p(t) \right) = \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} \Big|_{r=S} - \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} \Big|_{r=S}.$$

Отметим, что  $(\rho_2 - \rho_1)p(t)/\rho_1 \geq 0$  для случаев, когда  $\rho_2 > \rho_1$  и  $\rho_2 < \rho_1$ .  
Перейдем к безразмерным переменным по формулам:

$$\bar{T}_1 = \frac{T_1}{T_0}, \quad \bar{T}_2 = \frac{T_2}{T_0}, \quad \bar{f} = \frac{f}{T_0}, \quad \bar{\varphi} = \frac{\varphi}{T_0}, \quad \bar{\sigma}_r = \frac{\sigma_r}{\sigma^*}, \quad \bar{\sigma}_\varphi = \frac{\sigma_\varphi}{\sigma^*},$$

$$\bar{p} = \frac{p}{\sigma^*}, \quad \bar{W} = \frac{W}{W^*}, \quad \bar{S} = \frac{S}{R_0}, \quad \bar{R} = \frac{R}{R_0}, \quad \bar{r} = \frac{r}{R_0}, \quad \bar{t} = \frac{t}{t^*}.$$

Т а б л и ц а 1

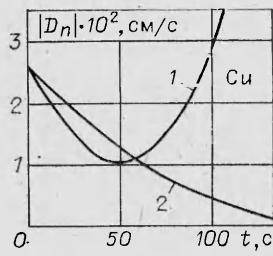
Вариант	Cu	Al	Ag	Ge	Si
Классический	95,3	87,5	638,7	426,2	581,1
С учетом напряжений ( $S = 0$ )	159	198	951	1004	1475
С учетом напряжений ( $S = 0,33R_0$ )	92	127	554	670	919

Т а б л и ц а 2

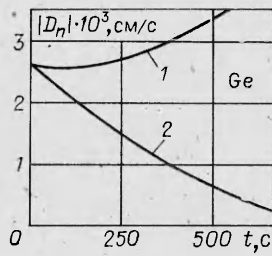
Вариант	Cu	Al	Ag	Ge	Si
Классический	1,6	1,56	10,7	9,5	9,7
С учетом напряжений ( $S = 0$ )	2,65	3,3	15,87	16,7	24,6
С учетом напряжений ( $S = 0,33R_0$ )	1,53	2,12	9,23	11,2	15,3

Т а б л и ц а 3

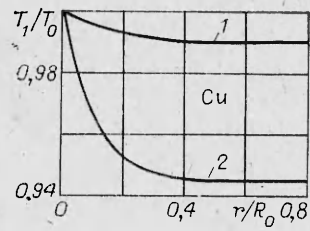
Давление	Cu	Al	Ag	Ge	Si
Начальное $\times 10^4$	-0,67	-0,47	-0,14	0,08	0,14
Среднее	-66	-35	-85	51	16
Конечное $\times 10^{-8}$	-0,12	-0,14	-0,26	0,09	0,17



Ф и г. 2



Ф и г. 3



Ф и г. 4

В безразмерных переменных (черту опускаем) задача имеет следующий вид: уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = F \nu_i \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T_i}{\partial r} \right), \quad i = 1, 2,$$

$$Fo_1 = \frac{t^* \lambda_1}{R_0^2 \left( \rho_1 c_1 + \frac{F \alpha (1 + \nu)}{1 - \nu} \right)} \approx 10^{-1}, \quad Fo_2 = \frac{t^* \lambda_2}{R_0^2 \rho_2 c_2} \approx 10^2,$$

где число Фурье  $Fo_i$  выражает определенное соответствие между темпом изменения условий в окружающей среде и темпом перестройки температурного поля внутри тела; термоупругопластическая часть

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2}{r} (\sigma_r - \sigma_\varphi) = 0, \quad \frac{dW}{dr} = b (\sigma_r - 2\nu\sigma_\varphi) + d(T_1 - 1),$$

$$\frac{W}{r} = b((1 - \nu)\sigma_\varphi - \nu\sigma_r) + d(T_1 - 1),$$

$$b = \frac{k}{E(\sqrt[3]{\rho^0} - 1)} \approx 10^{-3}, \quad d = \frac{\alpha T_0}{\sqrt[3]{\rho^0} - 1} \approx 10^{-1}, \quad \rho^0 = \rho_2/\rho_1,$$

где число  $b$  показывает отношение пластических напряжений к упругим; число  $d$  выражает соответствие между деформациями, вызванными охлаждением шара и изменением плотности на фронте кристаллизации;

условие на фронте кристаллизации

$$\frac{dS}{dt} (\alpha_1 + \bar{F}_1 \bar{\nu}) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{\partial T_1}{\partial r} \Big|_{r=S} - \frac{\partial T_2}{\partial r} \Big|_{r=S},$$

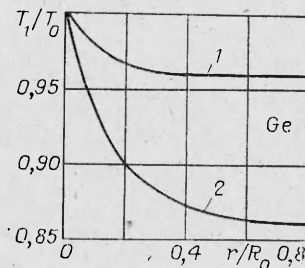
$$\alpha_1 = \frac{\rho_2 \gamma R_0^2}{t^* \lambda_2 T_0} \approx 10^{-1}, \quad F_1 = (\rho^0 - 1) \frac{R_0^2 k}{t^* \lambda_2 T_0} \approx 10^1,$$

где числа  $\alpha_1$  и  $\bar{F}_1$  показывают отношение скорости воздействия на фронт кристаллизации соответственно перестройки температурного поля внутри шара и возникающих термоупругопластических напряжений к скорости изменения условий в окружающей среде.

Численные результаты, полученные для исследуемых материалов, приведены в табл. 1—3 (время кристаллизации, с; разность начальной и конечной температур на внешней границе, °C; давление в жидкой фазе, дин/см<sup>2</sup>, соответственно).

На фиг. 2, 3 показана зависимость скорости кристаллизации по времени, на фиг. 4, 5 — распределение температуры по радиусу. Линии 1, 2 на фиг. 2—5 соответствуют классической задаче и задаче с учетом напряжений.

В заключение авторы выражают благодарность за активную поддержку и ценные советы В. В. Пухначеву, Б. Д. Аншину, А. Н. Черепанову.



Ф и г. 5

## ЛИТЕРАТУРА

1. Zenskov V. S., Belorukova I. N. et al. Solidification of copper and silver in near-zero-g experiments.— Acta Astronaut., 1982, v. 9, N 10.
2. Вайнберг А. М. Об одном существенном уточнении классической постановки задачи Стефана.— Тр. Второй конф. «Дифференциальные уравнения и приложения». Болгария. Руссе, 1982.
3. Кикони И. К. Таблицы физических величин. М.: Атомиздат, 1976.
4. Акустические кристаллы/Под ред. М. П. Шаскольской. М.: Наука, 1976.
5. Галактионов Е. В., Тропи Э. А. Асимптотический метод расчета термоупругих напряжений в тонком стержне.— Изв. АН СССР. Сер. физ., 1976, т. 40, № 7.
6. Коваленко А. Д. Термоупругость. Киев: Вища шк., 1975.
7. Овсянников Л. В. Введение в механику сплошных сред. Новосибирск: НГУ, 1976.
8. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. М.: Мир, 1969, т. 2.

Поступила 18/IX 1984 г.

УДК 535.211 : 536.4

### ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ ГАЗОКУМУЛЯТИВНОЙ ТРУБКИ НА ПОВЕРХНОСТЬ СТАЛЬНОЙ СТЕНКИ

А. И. БЫВШИХ, В. И. КИРКО, Н. И. ПАК

(Красноярск)

В [1] экспериментально исследована возможность термической обработки внутренней поверхности стального канала газоккумулятивным зарядом. Поверхностный слой образца, подвергнутого воздействию, обычно состоит из зоны застывшего расплава  $\sim 20$  мкм и зоны термического влияния  $\sim 30$  мкм, где в стали происходили структурные превращения  $\alpha - \gamma - \alpha'$ . Воздействие взрыва газоккумулятивного заряда сопровождается значительным уносом массы с поверхности канала. Глубина унесенного слоя может достигать 100 мкм. Подобные значения глубин зон расплава и термического влияния, а также глубины унесенного слоя трудно объяснить тепловым влиянием на стенку сгустком ударно-сжатого газа, образующегося перед газоккумулятивной струей продуктов взрыва (СПВ). В основу механизма уноса, а также появления зон расплава и термической закалки следует положить конвективное воздействие СПВ, следующей за ударно-сжатым газом. Действительно, расчет тепловых потоков в стенку канала со стороны плазменного сгустка и СПВ можно провести по формуле [2]  $q = St \rho u (h + u^2/2)$ , которая удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными [3]. Для оценки параметров плазмы и кумулятивной струи можно рассмотреть приближенную модель газодинамического течения в газоккумулятивных зарядах [4]. В соответствии с ударной адиабатой воздуха при массовой скорости  $u = 10,5$  км/с давление  $p = 1600 \cdot 10^5$  Н/м<sup>2</sup>, а значения плотности и энтальпии в ударно-сжатом газе  $\rho_1 = 1,4 \cdot 10^{-2}$  г/см<sup>3</sup>,  $h_1 = 66$  кДж/г, а в СПВ  $\rho_2 = 0,54$  г/см<sup>3</sup>,  $h_2 = 0,58$  кДж/г. Число Рейнольдса для плазмы (при вязкости воздуха  $\nu_1 = 2 \times 10^{-3}$  г/(см·с) [5]) имеет значение  $Re_1 = 8 \cdot 10^6$ , а для СПВ по выбранной модели  $Re_2 = 10^8$  (при  $\nu_2 = 10^{-3}$  г/(см·с)). Критерий теплоотдачи  $St$  (число Стантона) для возникающего турбулентного пограничного слоя вычисляется по формуле [3]  $St = 0,0288 Re^{-1/5} Pr^{-2/3}$ . Числа Рейнольдса  $Re$  и Прандтля  $Pr$  определялись из физических свойств пограничного слоя при характерной температуре

$$T = T_r + 0,5(T_c - T_r) + 0,22(T_0 - T_r),$$

где  $T_r$ ,  $T_c$  — температура ядра газового потока и стенки соответственно;  $T_0$  — температура торможения:

$$T_0 = T_r \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right);$$

$\gamma$  — показатель адиабаты;  $M$  — число Маха. При данных предположениях тепловой поток на стенку канала из ударно-сжатого газа  $q_1 = 5,7 \cdot 10^8$  Вт/см<sup>2</sup>, а из продуктов детонации  $q_2 = 10^8$  Вт/см<sup>2</sup>. Большее значение  $q_2$  обеспечивается главным образом за счет большего значения плотности  $\rho_2$ . Приведенные оценки показывают доминирующее влияние кумулятивной струи продуктов взрыва на процесс теплообмена с каналом.

Возможны два механизма уноса вещества с поверхности канала. Первый объясняет унос за счет расплавления поверхности и непрерывного сноса расплава газовым потоком вследствие высоких значений касательных напряжений на границе продукты взрыва — металл. Второй механизм предусматривает достижение поверхностью стенки температуры кипения и интенсивное диффузионное испарение через ламинарный подслои течения с последующим перемешиванием испарившихся атомов в турбулентном ядре потока.