

УДК 532.517+532.591

ЭВОЛЮЦИЯ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО СЛОЯ СМЕШЕНИЯ В МЕЛКОЙ ВОДЕ

А. А. Чесноков, В. Ю. Ляпидевский

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,

630090 Новосибирск, Россия

Новосибирский национальный исследовательский государственный университет,

630090 Новосибирск, Россия

E-mails: chesnokov@hydro.nsc.ru, liapid@hydro.nsc.ru

В приближении теории мелкой воды рассматривается горизонтально-сдвиговое движение однородной жидкости в открытом канале. Основное внимание уделяется изучению процесса перемешивания, обусловленного развитием неустойчивости Кельвина — Гельмгольца и действием донного трения. С использованием трехслойной схемы течения выведена осредненная одномерная модель формирования и эволюции горизонтального слоя смешения с учетом трения. Построены стационарные решения уравнений движения и решена задача о структуре слоя смешения. Показано, что учет донного трения приводит к замедлению процесса перемешивания и прекращению увеличения ширины промежуточного слоя смешения. Выполнена верификация предложенной одномерной модели на основе сравнения с известными экспериментальными данными и численным решением двумерных уравнений теории мелкой воды.

Ключевые слова: уравнения мелкой воды, горизонтально-сдвиговое течение, слой смешения, влияние трения.

DOI: 10.15372/PMTF20190217

Введение. Интерес к изучению сдвиговых течений и горизонтального перемешивания в тонком слое жидкости обусловлен многочисленными геофизическими и техническими приложениями [1, 2]. Примерами таких течений в природе являются слои смешения и струи, возникающие в районах слияния и устьях рек, вихревые следы, формирующиеся при обтекании островов и других препятствий. Как правило, для течений такого класса характерное отношение вертикального и горизонтального масштабов весьма мало и развитие сдвиговой неустойчивости может быть описано в рамках теории мелкой воды [3, 4]. При этом характер течения и степень перемешивания определяются взаимодействием горизонтальных вихрей, возникающих на нелинейной стадии развития неустойчивости Кельвина — Гельмгольца, и донным трением, обусловленным малой глубиной водоема.

Выполненное в [5–7] экспериментальное исследование горизонтальных слоев смешения показывает, что в слоях жидкости достаточно большой толщины, а также на начальной стадии развития неустойчивости в более тонких слоях влияние донного трения является несущественным. При уменьшении толщины слоев, движущихся с разными скоростями,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16-01-00156).

© Чесноков А. А., Ляпидевский В. Ю., 2019

увеличение ширины промежуточного слоя смешения прекращается на некотором расстоянии от области слияния потоков. Определение параметров потока, при которых прекращается процесс вовлечения, являлось основной целью экспериментов, описанных в работах [5–7]. Математические модели развития горизонтального слоя смешения с использованием осредненных уравнений теории мелкой воды представлены и верифицированы в работах [8–10]. Результаты численного моделирования процесса горизонтального перемешивания при слиянии потоков, движущихся с разными скоростями, приведены в [11, 12].

Интегродифференциальная модель горизонтально-сдвигового движения жидкости в открытом канале, эквивалентная уравнениям Бенни вихревой мелкой воды [13], выведена и исследована в [14, 15]. Обобщение и усложнение этой модели обусловлены необходимостью описания нелинейной стадии развития неустойчивости Кельвина — Гельмгольца и формирования турбулентного слоя смешения. Метод построения одномерных моделей пространства нелинейных длинноволновых возмущений в сдвиговом течении жидкости с учетом турбулентного перемешивания основан на применении теории многослойной мелкой воды [16]. Этот подход использован в [17] для получения модели приповерхностного турбулентного слоя смешения в плоскопараллельных течениях и описания горизонтального перемешивания в слоях жидкости достаточной большой толщины в открытых каналах [18]. Следует отметить, что на развитие и разработку моделей слоистого движения жидкости существенное влияние оказала известная работа Л. В. Овсянникова, посвященная исследованию моделей двухслойной мелкой воды [19].

Целью данной работы является вывод, анализ и верификация одномерных уравнений трехслойного планового течения однородной жидкости со свободной поверхностью с учетом донного трения и перемешивания в промежуточном слое. Основное внимание уделяется изучению процессов замедления горизонтального перемешивания вследствие влияния трения. Проводится построение стационарных решений задачи об эволюции слоя смешения в открытом канале. Модель верифицируется путем сравнения с известными экспериментальными данными о параметрах потока в слое смешения и результатами численного моделирования течений на основе двумерных уравнений теории мелкой воды.

1. Уравнения движения. Пространственные течения тонкого слоя однородной жидкости со свободной границей в поле силы тяжести над ровным дном описываются уравнениями теории мелкой воды

$$\begin{aligned} h_t + (Uh)_x + (Vh)_y &= 0, \\ (Uh)_t + (U^2h + gh^2/2)_x + (UVh)_y &= -c_f U \sqrt{U^2 + V^2}, \\ (Vh)_t + (UVh)_x + (V^2h + gh^2/2)_y &= -c_f V \sqrt{U^2 + V^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь x, y — пространственные переменные; t — время; U, V — компоненты вектора скорости; h — толщина слоя жидкости; g — ускорение свободного падения; c_f — коэффициент донного трения.

Рассмотрим течение идеальной жидкости в протяженном открытом канале с боковыми стенками $y = Y_1(t, x)$, $y = Y_2(t, x)$ и ровным дном ($z = 0$). Полагая, что движение жидкости происходит преимущественно в направлении оси Ox , в уравнениях (1) выполним масштабирование

$$t \rightarrow \varepsilon^{-1}t, \quad x \rightarrow \varepsilon^{-1}x, \quad V \rightarrow \varepsilon V, \quad c_f \rightarrow \varepsilon c_f$$

и отбросим члены порядка ε^2 ($\varepsilon \ll 1$ — отношение характерного поперечного масштаба канала H_0 к продольному масштабу L_0). В результате получаем уравнения горизонтально-сдвигового течения тонкого слоя жидкости в протяженном открытом канале

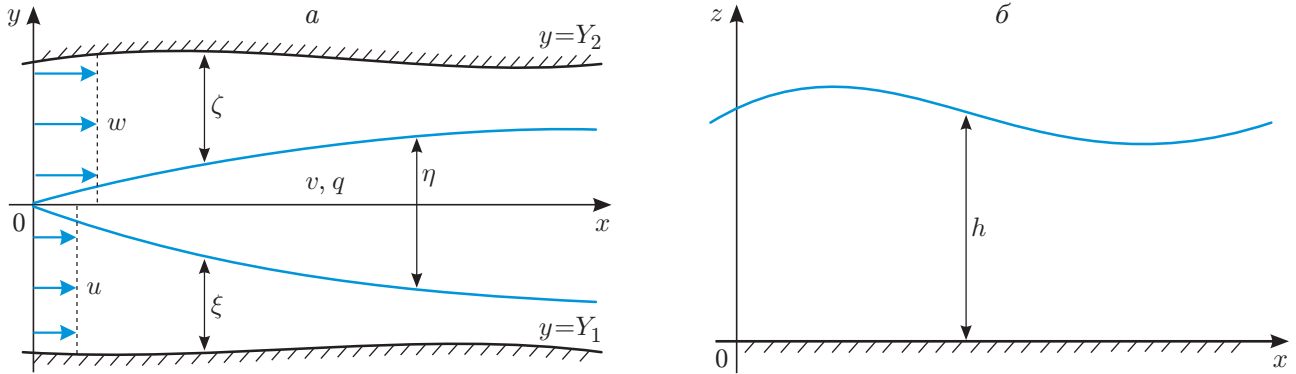


Рис. 1. Горизонтально-сдвиговое течение однородной жидкости в открытом канале:
 а — вид сверху, б — вид сбоку

$$\begin{aligned} h_t + (Uh)_x + (Vh)_y &= 0, & h_y &= 0, \\ (Uh)_t + (U^2h + gh^2/2)_x + (UVh)_y &= -c_f U|U| \end{aligned} \quad (2)$$

с граничными условиями на боковых стенках

$$Y_{it} + UY_{ix} - V|_{y=Y_i} = 0 \quad (i = 1, 2). \quad (3)$$

Уравнения движения (2), (3) при отсутствии донного трения ($c_f = 0$) получены и исследованы в [14, 15].

Следствием системы (2) является уравнение баланса энергии

$$E_t + ((E + P)U)_x + ((E + P)V)_y = -c_f |U|^3, \quad (4)$$

где $E = (U^2 + gh)h/2$; $P = gh^2/2$. Также отметим, что потенциальная завихренность $\Omega = U_y/h$ удовлетворяет уравнению

$$\Omega_t + U\Omega_x + V\Omega_y = -2c_f |U|\Omega/h \quad (5)$$

и при отсутствии донного трения сохраняется вдоль траекторий.

1.1. *Вывод модели трехслойного течения.* Предлагаемая ниже осредненная модель предназначена для описания горизонтального слоя смешения, формирующегося в открытом канале между двумя почти потенциальными слоями шириной $\xi(t, x)$ и $\zeta(t, x)$. Схема течения показана на рис. 1. Будем полагать, что профиль скорости $U(t, x, y)$ удовлетворяет условию

$$U_y = \begin{cases} O(\varepsilon^\beta), & y \in (Y_1, Y_1 + \xi) \cup (Y_2 - \zeta, Y_2), \\ O(\varepsilon^\gamma), & y \in (Y_1 + \xi, Y_2 - \zeta) \end{cases} \quad (6)$$

с параметрами $\beta \in (1, 2]$ и $\gamma \in (0, 1)$. Случай $\beta = 2$ соответствует потенциальному течению в прослойках шириной $\xi(t, x)$ и $\zeta(t, x)$.

Для описания трехслойного течения введем средние по ширине слоев скорости жидкости и среднеквадратичное отклонение (сдвиговую скорость q) в промежуточном слое:

$$u = \frac{1}{\xi} \int_{Y_1}^{Y_1+\xi} U dy, \quad w = \frac{1}{\zeta} \int_{Y_2-\zeta}^{Y_2} U dy, \quad v = \frac{1}{\eta} \int_{Y_1+\xi}^{Y_2-\zeta} U dy, \quad q^2 = \frac{1}{\eta} \int_{Y_1+\xi}^{Y_2-\zeta} (U - v)^2 dy. \quad (7)$$

Для упрощения дальнейших выкладок будем полагать, что $U(t, x, y) \geq 0$ и, следовательно, средние скорости в слоях u , v , w неотрицательны.

Процесс вовлечения жидкости из почти потенциальных прослоек в слой смешения учитывается кинематическими условиями на внутренних границах раздела

$$\begin{aligned} (Y_1 + \xi)_t + U(Y_1 + \xi)_x - V|_{y=Y_1+\xi} &= -M, \\ (Y_2 - \zeta)_t + U(Y_2 - \zeta)_x - V|_{y=Y_2-\zeta} &= M. \end{aligned} \quad (8)$$

При этом предполагается симметричность процесса вовлечения жидкости в прослойку из внешних слоев. Следуя [16, 18], полагаем, что скорость вовлечения жидкости в вихревую прослойку пропорциональна скорости “больших вихрей”, генерируемых в окрестности границы раздела слоев за счет сдвиговой неустойчивости. Поэтому далее полагаем

$$M = \sigma q.$$

Согласно [16] коэффициент пропорциональности σ приближенно равен 0,15.

При осреднении уравнений движения (2), (4) по ширине канала возникает необходимость приближенного вычисления интегралов по переменной y от величин U^2 и U^3 . Для почти потенциальных слоев имеем следующие оценки:

$$\int_{Y_1}^{Y_1+\xi} U^2 dy = \xi u^2 + O(\varepsilon^{2\beta}), \quad \int_{Y_2-\zeta}^{Y_2} U^2 dy = \zeta w^2 + O(\varepsilon^{2\beta}) \quad (1 < \beta \leq 2).$$

Поскольку при выводе модели (2) члены порядка ε^2 не учитываются, при осреднении уравнений движения в области слабосдвигового течения скорость U заменяется на соответствующие средние величины u и w , определенные формулами (7).

Используя очевидное тождество $U = v + (U - v)$, вычислим интегралы в промежуточном слое смешения:

$$\int_{Y_1+\xi}^{Y_2-\zeta} U^2 dy = (v^2 + q^2)\eta, \quad \int_{Y_1+\xi}^{Y_2-\zeta} U^3 dy = (v^2 + 3q^2)v\eta + P_3, \quad P_3 = \int_{Y_1+\xi}^{Y_2-\zeta} (U - v)^3 dy. \quad (9)$$

В силу вытекающих из условия (6) оценок $P_3 = O(\varepsilon^{3\gamma}) \ll \eta v q^2 = O(\varepsilon^{2\gamma})$, $0 < \gamma < 1$. Поэтому величина P_3 является малой по сравнению с другими членами и может быть отброшена [20]. При отсутствии донного трения ($c_f = 0$) потенциальная завихренность $\Omega = U_y/h$ сохраняется вдоль траекторий, поэтому для получения приведенных выше оценок достаточно выполнения условия (6) в начальный момент времени. Эти оценки сохраняются в случае $c_f > 0$, поскольку правая часть уравнения (5) пропорциональна величине потенциальной завихренности Ω с некоторым отрицательным множителем. В результате осреднения уравнения энергии (4) получаем замыкающее соотношение для переменной q , характеризующей пространственную неоднородность течения в слое смешения.

С учетом принятых предположений трехслойная модель эволюции горизонтального слоя смешения имеет вид

$$\begin{aligned} (\xi h)_t + (u\xi h)_x &= -\sigma q h, & (\eta h)_t + (v\eta h)_x &= 2\sigma q h, & (\zeta h)_t + (w\zeta h)_x &= -\sigma q h, \\ u_t + (u^2/2 + gh)_x &= -c_f u^2/h, & w_t + (w^2/2 + gh)_x &= -c_f w^2/h, \\ Q_t + (u^2\xi h + (v^2 + q^2)\eta h + w^2\zeta h + gh^2 Y/2)_x &= gh^2 Y_x/2 - c_f(u^2\xi + (v^2 + q^2)\eta + w^2\zeta), \\ (u^2\xi h + (v^2 + q^2)\eta h + w^2\zeta h + gh^2 Y)_t + (u^3\xi h + (v^2 + 3q^2)v\eta h + w^3\zeta h + 2gQh)_x &= \\ &= -gh^2 Y_t - \kappa\sigma h q^3 - 2c_f(u^3\xi + (v^2 + 3q^2)v\eta + w^3\zeta). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь $Y = \xi + \eta + \zeta$ — заданная ширина канала; $Q = (u\xi + v\eta + w\zeta)h$ — расход жидкости; неотрицательные постоянные c_f , σ , \varkappa — эмпирические параметры, характеризующие донное трение, массообмен и диссипацию энергии. Уравнения (10) образуют замкнутую систему для определения толщины слоя жидкости h , поперечных размеров потенциальных (ξ , ζ) и турбулентного ($\eta = Y - \xi - \zeta$) слоев, скоростей жидкости u , w , v в этих слоях, а также сдвиговой скорости q в слое смешения.

Вывод модели (10) основан на осреднении уравнений (2), (4) по ширине канала с учетом предположения (6) и граничных условий (3), (8). Интегрируя первое уравнение системы (2) по переменной y в каждом из слоев с использованием граничных условий, получаем первые три уравнения системы (10). Заметим, что сумма этих трех уравнений представляет собой закон сохранения массы $(Yh)_t + Q_x = 0$. В результате осреднения последнего уравнения системы (2) и уравнения энергии (4) по ширине одного из слабосдвиговых слоев имеем

$$\begin{aligned} (u\xi h)_t + (u^2\xi h)_x + g\xi h h_x + c_f \xi u^2 + \sigma q h U|_{y=Y_1+\xi} &= 0, \\ (u^2\xi h + gh^2\xi)_t + (u^3\xi h + 2gh^2u\xi)_x + gh^2\xi_t + 2c_f \xi u^3 + \sigma q h (U^2|_{y=Y_1+\xi} + 2gh) &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Осреднение по другому слабосдвиговому слою позволяет получить такие же уравнения с точностью до замены u , ξ и $U|_{y=Y_1+\xi}$ на w , ζ и $U|_{y=Y_2-\zeta}$. Следуя [21], для определения скорости U на внутренних границах слоев используем условие совместности осредненных уравнений баланса массы, импульса и энергии в почти потенциальных слоях. Непосредственные вычисления показывают, что первое уравнение в (10), уравнения (11), а также аналогичные соотношения для второго слабосдвигового слоя являются совместными лишь при выполнении условий

$$U|_{y=Y_1+\xi} = u, \quad U|_{y=Y_2-\zeta} = w. \quad (12)$$

С учетом (12) уравнения импульса в почти потенциальных слоях принимают вид четвертого и пятого уравнений системы (10). В результате осреднения уравнения импульса в (2) по ширине всего канала получаем предпоследнее уравнение (10). Последнее уравнение системы (10) (в случае $\varkappa = 0$) получено путем осреднения уравнения баланса энергии (4). При моделировании реальных течений целесообразно учитывать диссипацию энергии, поэтому в правую часть последнего уравнения (10) добавлено слагаемое, содержащее эмпирический параметр \varkappa . Согласно [16] значение \varkappa находится в интервале от 2 до 6.

Отметим, что при $c_f = 0$ уравнения системы (10) совпадают с уравнениями движения, полученными в [18] при более жестких условиях для профиля скорости U (предполагалось, что $U_y = 0$ при $y \in (Y_1, Y_1 + \xi) \cup (Y_2 - \zeta, Y_2)$).

1.2. *Двухслойная и однослойная модели.* В случае отсутствия одного или обоих слабосдвиговых слоев система уравнений (10) упрощается. Пусть $\zeta = 0$, $w = 0$, что соответствует двухслойной схеме течения и формированию турбулентной струи. Уравнения движения принимают вид

$$\begin{aligned} (\xi h)_t + (u\xi h)_x &= -\sigma q h, \quad (\eta h)_t + (v\eta h)_x = \sigma q h, \quad u_t + (u^2/2 + gh)_x = -c_f u^2/h, \\ Q_t + (u^2\xi h + (v^2 + q^2)\eta h + gh^2Y/2)_x &= gh^2Y_x/2 - c_f (u^2\xi + (v^2 + q^2)\eta), \\ (u^2\xi h + (v^2 + q^2)\eta h + gh^2Y)_t + (u^3\xi h + (v^2 + 3q^2)v\eta h + 2gQh)_x &= \\ &= -gh^2Y_t - \varkappa \sigma h q^3 - 2c_f (u^3\xi + (v^2 + 3q^2)v\eta). \end{aligned} \quad (13)$$

В случае однослойного течения дополнительно полагаем $\xi = 0$, $u = 0$. В результате модель (13) редуцируется к следующей системе уравнений:

$$(Yh)_t + (vYh)_x = 0, \quad (vYh)_t + ((v^2 + q^2)Yh + gYh^2/2)_x = gh^2Y_x/2 - c_f Y(v^2 + q^2),$$

$$\begin{aligned} ((v^2 + q^2)Yh + gYh^2)_t + ((v^2 + 3q^2)vYh + 2gvYh^2)_x = & \\ = -gh^2Y_t - \varkappa\sigma hq^3 - 2c_f vY(v^2 + 3q^2). & \end{aligned} \quad (14)$$

В случае канала постоянной ширины ($Y = \text{const}$) уравнения системы (14) сводятся к газодинамическим уравнениям вихревой мелкой воды [20].

1.3. *Дифференциальные следствия.* Для дальнейшего анализа уравнений движения и проведения расчетов целесообразно получить ряд следствий. В силу любой из систем уравнений (10), (13) или (14) средняя скорость потока v в вихревой прослойке и переменная q удовлетворяют уравнениям

$$v_t + vv_x + 2qq_x + \frac{q^2}{\eta} \eta_x + \left(g + \frac{q^2}{h}\right) h_x = f_1, \quad q_t + (vq)_x = f_2. \quad (15)$$

Для трехслойного течения (модель (10)) правые части уравнений (15) имеют вид

$$f_1 = \frac{\sigma q}{\eta} (u - 2v + w) - \frac{c_f}{h} (v^2 + q^2), \quad f_2 = \frac{\sigma}{2\eta} ((u - v)^2 + (w - v)^2 - (2 + \varkappa)q^2) - \frac{2c_f}{h} vq.$$

Для двухслойного течения (модель (13)) функции f_i в уравнениях (15) задаются следующим образом:

$$f_1 = \frac{\sigma q}{\eta} (u - v) - \frac{c_f}{h} (v^2 + q^2), \quad f_2 = \frac{\sigma}{2\eta} ((u - v)^2 - (1 + \varkappa)q^2) - \frac{2c_f}{h} vq.$$

Следствием системы уравнений для однослойного течения (14) являются соотношения (15) (при этом следует положить $\eta = Y$) с правыми частями

$$f_1 = -\frac{c_f}{h} (v^2 + q^2), \quad f_2 = -\frac{\sigma \varkappa q^2}{2Y} - \frac{2c_f}{h} vq.$$

С помощью дифференциальных следствий (15) нетрудно показать, что уравнения для однослойного течения (14) являются гиперболическими (скорости распространения характеристик $dx/dt = v \pm \sqrt{gh + 3q^2}$). Как показано в [18], двух- и трехслойные модели (13), (10) в общем случае не являются гиперболическими, но всегда имеют, по меньшей мере, три вещественные характеристики (одну контактную $dx/dt = v$ и две звуковые). Наличие вещественных характеристик позволяет использовать стандартные численные методы, разработанные для решения гиперболических уравнений.

2. Стационарные решения. Для решения задачи о структуре слоя смешения в канале постоянного сечения достаточно рассмотреть стационарные течения.

2.1. *Горизонтальный слой смешения.* Установившиеся течения жидкости в рамках трехслойной модели (10) с учетом соотношений (15) определяются из решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} (u\xi h)' &= -\sigma qh, & (v\eta h)' &= 2\sigma qh, & (w\zeta h)' &= -\sigma qh, \\ uu' + gh' &= -c_f u^2/h, & ww' + gh' &= -c_f w^2/h, \\ vv' + 2qq' + \frac{q^2}{\eta} \eta' + \left(g + \frac{q^2}{h}\right) h' &= \frac{\sigma q}{\eta} (u + w - 2v) - \frac{c_f}{h} (v^2 + q^2), \\ (vq)' &= \frac{\sigma}{2\eta} ((u - v)^2 + (w - v)^2 - (2 + \varkappa)q^2) - \frac{2c_f}{h} vq \end{aligned}$$

(штрих означает производную по x). В результате преобразований эта система приводится к разрешенному относительно производных виду

$$h' = \frac{G}{\Delta}, \quad \xi' = \frac{c_f \xi}{h} - \frac{\sigma q}{u} - \frac{(u^2 - gh)\xi}{u^2 h} h', \quad \zeta' = \frac{c_f \zeta}{h} - \frac{\sigma q}{w} - \frac{(w^2 - gh)\zeta}{w^2 h} h',$$

$$u' = -\frac{gh'}{u} - \frac{c_f u}{h}, \quad w' = -\frac{gh'}{w} - \frac{c_f w}{h}, \quad v' = \frac{2\sigma q - vY'}{\eta} + \frac{v}{\eta}(\xi' + \zeta') - \frac{v}{h}h', \quad (16)$$

$$q' = -\frac{q}{v}v' + \frac{\sigma}{2\eta v}((u-v)^2 + (w-v)^2 - (2+\kappa)q^2) - \frac{2c_f}{h}q,$$

где

$$G = \frac{\sigma q}{(v^2 - 3q^2)v}((u-v)^2 + (w-v)^2 - (6+\kappa)q^2 - (u+w-4v)v) - \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{w}\right)\sigma q - Y' + \frac{c_f Y}{h},$$

$$\Delta = \frac{Y}{h} - \frac{g\xi}{u^2} - \frac{g\zeta}{w^2} - \frac{g\eta}{v^2 - 3q^2}.$$

Знак переменной Δ определяет докритический ($\Delta < 0$) или сверхкритический ($\Delta > 0$) тип течения.

2.2. *Стационарные двухслойные и однослойное течения.* В процессе эволюции сдвигового течения однородной жидкости слой смешения может достигнуть одной из боковых границ. В стационарном случае из уравнений (13) с использованием следствий (15) получаем систему

$$(u\xi h)' = -\sigma q h, \quad (v\eta h)' = \sigma q h, \quad uu' + gh' = -c_f u^2/h,$$

$$vv' + gh' + \frac{1}{\eta h}(q^2\eta h)' = \frac{\sigma q}{\eta}(u-v) - \frac{c_f}{h}(v^2 + q^2),$$

$$(vq)' = \frac{\sigma}{2\eta}((u-v)^2 - (1+\kappa)q^2) - \frac{2c_f}{h}vq.$$

Эти уравнения также приводятся к разрешенному относительно производных виду, причем дифференциальное уравнение для определения толщины h совпадает с первым уравнением (16), где функции Δ и G следует заменить на Δ_1 и G_1 , задаваемые формулами

$$\Delta_1 = \frac{Y}{h} - \frac{g\xi}{u^2} - \frac{g\eta}{v^2 - 3q^2}, \quad G_1 = \frac{c_f Y}{h} - Y' + \frac{\sigma q}{v} \frac{(u-v)^2 - (3+\kappa)q^2 - (u-2v)v}{v^2 - 3q^2} - \frac{\sigma q}{u}.$$

На последнем участке развития слоя смешения (область однослойного течения) стационарные решения модели (14) находятся из уравнений

$$h' = \frac{G_2}{\Delta_2}, \quad v' = -\frac{v}{h}h' - \frac{v}{Y}Y', \quad q' = -\frac{q}{v}v' - \frac{\sigma\kappa q^2}{2vY} - \frac{2c_f q}{h},$$

$$G_2 = \frac{c_f Y}{h} - Y' - \frac{\sigma\kappa q^3}{(v^2 - 3q^2)v}, \quad \Delta_2 = \frac{Y}{h} - \frac{gY}{v^2 - 3q^2}.$$

Как и в рассмотренном выше случае, знак Δ_j ($j = 1, 2$) определяет докритический ($\Delta_j < 0$) и сверхкритический ($\Delta_j > 0$) типы течения.

2.3. *Начальный участок слоя смешения.* Выше получены дифференциальные уравнения для описания стационарного слоя смешения. Для построения решения необходимо задать условия в точке формирования слоя смешения, т. е. найти асимптотику стационарного решения (16) при $\eta \rightarrow 0$. Без ограничения общности будем полагать, что $\eta = 0$ при $x = 0$ и значениям функций в этой точке соответствует нижний индекс “0”. Пусть на входе в область смешения заданы параметры слабосдвиговых слоев u_0, w_0, ξ_0, ζ_0 и их общая толщина h_0 , при этом все величины положительны и $\xi_0 + \zeta_0 = Y$. Будем считать, что при $x \rightarrow 0$ (или $\eta \rightarrow 0$) существуют конечные пределы функций $v \rightarrow v_0 > 0, q \rightarrow q_0 > 0$. Найдем эти значения.

Полагая искомые функции и их производные ограниченными, в силу второго и шестого уравнений (16) имеем $\eta' \rightarrow 2\sigma q_0/v_0$, $\eta' \rightarrow (u_0 + w_0 - 2v_0)\sigma/q_0$. Исключая из этих соотношений предельное значение η' , получаем

$$q_0^2 = (u_0 + w_0 - 2v_0)v_0/2. \quad (17)$$

Из последнего уравнения системы (16) следует соотношение

$$(u_0 - v_0)^2 + (w_0 - v_0)^2 - (2 + \varkappa)q_0^2 = 0. \quad (18)$$

Из формул (17), (18) получаем квадратное уравнение для определения v_0 :

$$v_0^2 - \frac{(3 + \varkappa/2)(u_0 + w_0)}{4 + \varkappa}v_0 + \frac{u_0^2 + w_0^2}{4 + \varkappa} = 0.$$

Условия существования вещественных корней этого уравнения приведены в [18]. По физическим соображениям выбирается значение v_0 , удовлетворяющее неравенству $u_0 < v_0 < w_0$ (или $w_0 < v_0 < u_0$). Однозначное определение такого корня достигается вариацией параметра \varkappa .

3. Результаты численных расчетов и их сравнение с экспериментальными данными. Ниже приводятся результаты расчетов на основе стационарных и нестационарных уравнений слоистого горизонтально-сдвигового течения жидкости в открытом канале. Для удобства сравнения с экспериментальными данными [8] расчеты выполнены для прямого канала длиной 16 м и шириной 3 м. Во всех приведенных ниже примерах (за исключением примера, представленного на рис. 3,б) используются параметры набегающего потока, приведенные в работе [8] (случай А): $u_0 = 0,118$ м/с, $w_0 = 0,238$ м/с, $h_0 = 0,052$ м. Далее полагаем $\xi_0 = \zeta_0 = 1,5$ м, $g = 9,8$ м/с², $c_f = 0,003$ и используем следующие значения эмпирических постоянных модели (10): $\sigma = 0,15$, $\varkappa = 4$. Отметим, что в случае А набегающий поток является докритическим.

3.1. Стационарный слой смешения. Верификация модели. Численная реализация стационарного решения задачи о развитии горизонтального слоя смешения не вызывает существенных затруднений, поскольку описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производных. С использованием полученной выше асимптотики при $\eta \rightarrow 0$ решение может быть построено как для докритических ($\Delta < 0$), так и для сверхкритических ($\Delta > 0$) течений.

Пусть в сечении $x = 0$ потоки, движущиеся с указанными выше скоростями u_0 и w_0 , сливаются и формируется промежуточный слой смешения. При выбранных значениях скоростей и параметра \varkappa по формулам (17), (18) однозначно определяются значения $v_0 \approx 0,171$ и $q_0 \approx 0,035$, что позволяет численно построить решение уравнений (16) с заданными значениями искомых функций при $x = 0$. Обозначим через $\Delta_U = w - u$ и $U_c = (u + w)/2$ разность скоростей в слабосдвиговых слоях и их среднюю скорость соответственно.

На рис. 2 приведены распределения величин Δ_U , U_c и h вдоль канала, полученные в результате решения уравнений (16) (штриховые линии). Из рис. 2 следует, что теоретические и экспериментальные данные [8] хорошо согласуются. Аналогичное соответствие для разности скоростей Δ_U и средней скорости U_c имеет место и при других параметрах потока, приведенных в работах [7, 8].

Для определения ширины слоя смешения δ в работах [5, 6, 8] приводится формула

$$\frac{d\delta}{dx} = \alpha\lambda, \quad \lambda = \frac{\Delta_U}{2U_c}, \quad (19)$$

где $\alpha = 0,1800 \pm 0,0015$, а также более общая зависимость, включающая безразмерный параметр стабилизации S :

$$S = \frac{c_f\delta}{2h\lambda}. \quad (20)$$

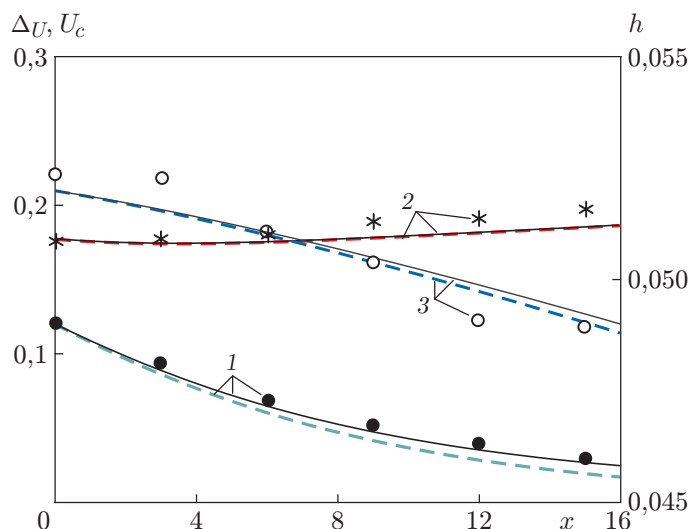


Рис. 2. Распределения разности скоростей в слоях ΔU (1), средней скорости U_c (2) и толщины слоя жидкости h (3) вдоль канала:
штриховые линии — решение уравнений (16), сплошные линии — расчетные данные [8], точки — экспериментальные данные [8]

При этом отмечается, что если S больше критического значения $S_* \approx 0,12$, то процесс перемешивания прекращается и в формуле (19) следует положить $\alpha = 0$.

На рис. 3,а приведено распределение ширины слоя смешения η вдоль канала (кривые 1), полученное по модели (16) (параметры потока соответствуют рис. 2), а также распределение ширины δ (кривые 2), найденное из решения уравнения (19) при $\alpha = 0,18$. Для определения правой части (19) использовано решение уравнений (16). Это обусловлено тем, что значения переменных ΔU и U_c , полученные по уравнениям (16), хорошо согласуются с экспериментальными и расчетными данными [8]. Кривыми 3 показано распределение параметра S по длине канала. Критическое значение $S_* = 0,12$ достигается при $x = x_*$. В области $x < x_*$ значения переменных η и δ практически совпадают, что служит дополнительным подтверждением соответствия модели (16) известным результатам. Экспериментальные точки, полученные в [8] для ширины слоя смешения, лежат выше расчетных кривых, что обусловлено сложностью точного определения границ слоев. При этом ширина слоя смешения, определенная по предложенной модели, может отличаться от экспериментальных значений. На рис. 3,б приведены аналогичные расчетные и экспериментальные данные для набегающего потока с параметрами $u_0 = 0,082$ м/с, $w_0 = 0,264$ м/с, $h_0 = 0,059$ м (случай D в работе [8]). Видно, что при незначительном увеличении глубины набегающего потока h_0 экспериментальные и расчетные значения ширины слоя смешения согласуются лучше.

3.2. *Выход на стационарный режим.* Для моделирования нестационарных течений применена схема сквозного счета Насьяху — Тэдмора [22] типа предиктор-корректор, разработанная для решения консервативных систем и имеющая второй порядок аппроксимации. При проведении расчета по нестационарным уравнениям (10) значения $h_0, \xi_0, \zeta_0, u_0, w_0, v_0, q_0$ использовались в качестве начальных данных при $t = 0$ во всей расчетной области и как граничные условия — при $x = 0$. На правой стенке в качестве граничных условий задается решение стационарных уравнений в точке $x = 16$. Заметим, что при выборе других граничных условий на выходе из канала в случае $c_f > 0$ (например, условий

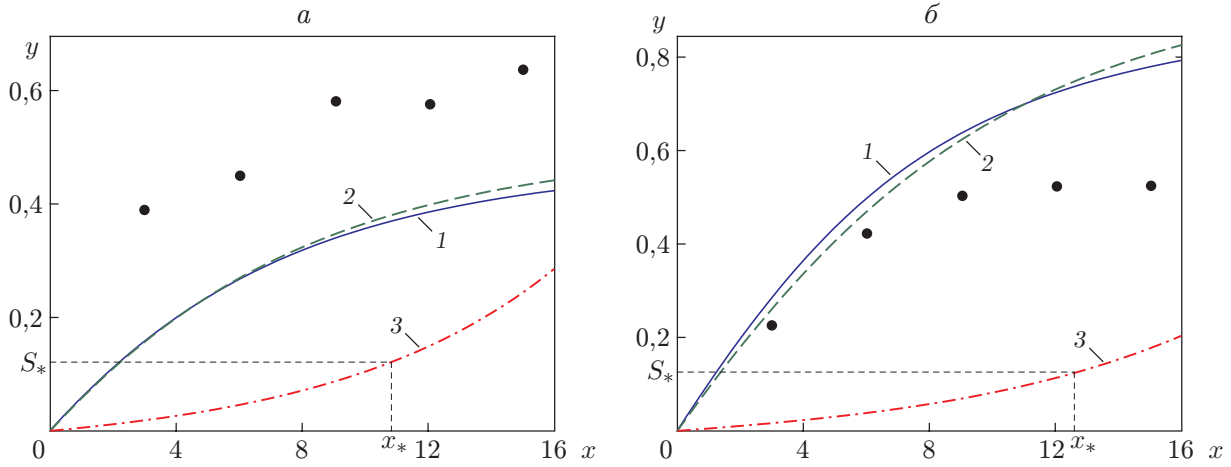


Рис. 3. Ширина слоя смешения и безразмерный параметр стабилизации для набегающего потока с параметрами для случая А (а) и случая D (б): 1 — ширина слоя смешения $\eta(x)$, полученная по модели (16); 2 — ширина слоя смешения $\delta(x)$, полученная по эмпирической формуле (19); 3 — параметр стабилизации S , заданный формулой (20); точки — экспериментальные данные [8]

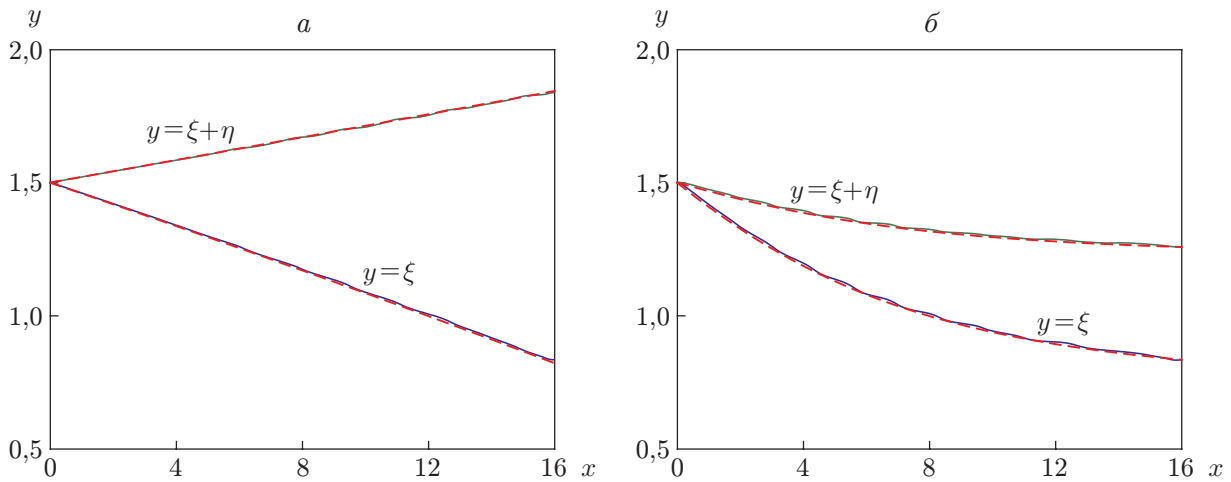


Рис. 4. Границы слоя смешения, полученные в результате решения нестационарных уравнений (10) при $t = 145$ (сплошные линии) и стационарных уравнений (16) (штриховые линии):
а — $c_f = 0$; б — $c_f = 0,003$

Неймана) может реализоваться нестационарный режим течения с незатухающими колебаниями потока. Для дискретизации по пространственной переменной x использовалась равномерная сетка с количеством узловых точек $N = 400$. Шаг по времени выбирался автоматически из условия Куранта.

На рис. 4 приведены результаты расчета (границы слоя смешения $y = \xi$ и $y = \xi + \eta$) в момент времени $t = 145$ (сплошные линии). Штриховыми линиями показано решение стационарных уравнений (16), практически совпадающее с нестационарным решением при достаточно большом значении времени. На рис. 4 видно, что учет донного трения существенно влияет на процесс перемешивания и положение границ слоя смешения. В случае $c_f = 0$ (см. рис. 4,а) ширина слоя смешения увеличивается и на достаточно большом

расстоянии от входного сечения достигает боковых стенок канала. При $c_f = 0,003$ (см. рис. 4,б) по мере удаления от входного сечения процесс перемешивания замедляется и ширина слоя смешения стабилизируется. Следует отметить, что вариация эмпирических параметров массообмена и диссипации энергии в допустимом диапазоне $\sigma = 0,15 \div 0,20$ и $\varkappa = 2 \div 4$ не оказывает существенного влияния на решение уравнений (10) или (16), но позволяет в конкретных случаях добиться лучшего соответствия экспериментальным данным или результатам расчетов по двумерным уравнениям (1). В частности, уменьшение (увеличение) параметра \varkappa приводит к незначительному увеличению (уменьшению) ширины слоя смешения.

3.3. *Сравнение результатов расчетов по одномерной и двумерной моделям.* Использование двумерных уравнений теории мелкой воды (1) позволяет детально описать процесс перемешивания и развитие неустойчивости Кельвина — Гельмгольца при слиянии потоков, движущихся с разными скоростями. Однако подробная информация о структуре течения, для получения которой требуется использовать значительные вычислительные ресурсы, не всегда является обязательной. При этом осредненные параметры течения можно достаточно быстро определить по предложенной одномерной модели трехслойного течения (10) или (16).

Выполним численное моделирование развития неустойчивости Кельвина — Гельмгольца на границе слоев в рамках двумерных уравнений теории мелкой воды с учетом трения (1) и сравним полученные результаты с результатами расчетов по осредненной модели (16). Для визуализации течения в систему (1) добавим уравнение

$$(ch)_t + (Uch)_x + (Vch)_y = 0 \quad (21)$$

для функции $c(t, x, y)$, сохраняющейся вдоль траекторий и принимающей значения $c = 0$ и $c = 1$ в слабосдвиговых слоях, движущихся с разными скоростями. В процессе эволюции течения и перемешивания переменная c принимает промежуточные значения в интервале $[0, 1]$.

При численном решении нестационарной задачи используется TVD-схема с повышенным порядком аппроксимации [22]. В качестве начальных данных при $t = 0$ для системы уравнений (1), (21) зададим параметры набегающего потока $h = h_0$, $U = u_0$, $c = 0$ при $0 \leq y < Y/2$ и $U = w_0$, $c = 1$ при $Y/2 < y \leq Y$, $V = 0$. Эти данные используются также в качестве граничных условий слева при $x = 0$. На правой границе ставятся условия Неймана. На боковых границах канала $y = 0$ и $y = Y$ задается условие непротекания $V = 0$. Расчеты проводятся на равномерной сетке с числом узлов $N_x = 400$ и $N_y = 75$ по переменным $x \in [0, 16]$ и $y \in [0, 3]$ соответственно. Для генерации вихрей на левой границе в поток вносится возмущение в виде сдвига на один узел в сторону увеличения или уменьшения значения $M_y = \text{round}(N_y/2 + \sin(\omega t))$, разделяющего при $x = 0$ потоки со скоростями $U = u_0$ и $U = w_0$. Частота ω оказывает влияние на длину образующихся с течением времени волн. Приведенные ниже результаты расчетов получены при $\omega = 0,5$.

На рис. 5 показаны результаты двумерного расчета (переменная c при $t = 145$) для параметров набегающего потока, соответствующих случаю А в работе [8], при $c_f = 0$; $0,003$. Жирными линиями показаны границы слоя смешения $y = \xi$ и $y = \xi + \eta$, полученные из решения стационарных уравнений (16) при $\sigma = 0,15$ и $\varkappa = 4$. Из рис. 5 следует, что донное трение оказывает существенное влияние на процесс перемешивания: слой смешения сдвигается в область потока, имеющего меньшую скорость во входном сечении. При этом область перемешивания, полученная в рамках двумерной модели, шире области перемешивания, полученной при решении одномерных уравнений. Это объясняется тем, что в одномерной слоистой модели определяется среднее положение границы слоя смешения, а в двумерном расчете она возмущается вследствие наличия волн и вихрей, а также дополнительной численной диссипации.

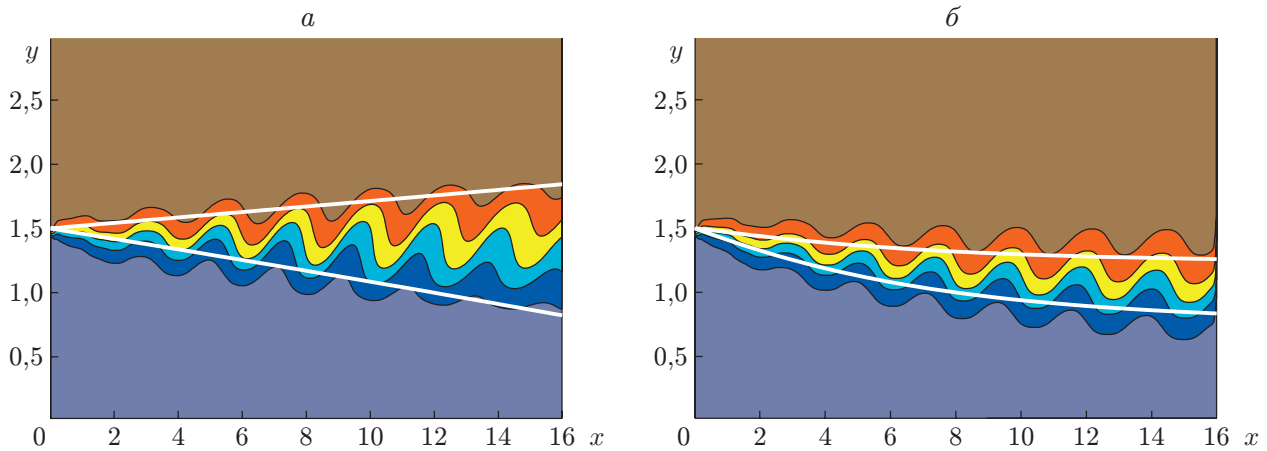


Рис. 5. Результаты моделирования неустойчивости Кельвина — Гельмгольца: $a — c_f = 0$, $b — c_f = 0,003$; тонкие линии — линии уровня функции $c(t, x, y)$ с шагом 0,2 на интервале $[0, 1]$ при $t = 145$; жирные линии — границы слоя смешения, полученные по модели (16)

Заключение. Предложена одномерная модель формирования и эволюции слоя смешения в течениях мелкой воды с горизонтальным сдвигом скорости в открытых каналах с учетом донного трения. Вывод уравнений движения основан на трехслойном представлении течения в рамках модели теории мелкой воды с учетом процессов вовлечения жидкости из областей слабосдвигового течения в вихревую прослойку. При этом скорость вовлечения жидкости в слой смешения пропорциональна скорости “больших вихрей”, генерируемых в окрестности границы раздела слоев. Особое внимание уделяется исследованию влияния донного трения, препятствующего развитию процесса перемешивания и замедляющего увеличение ширины слоя смешения по мере удаления от входного сечения канала.

Построены и верифицированы (путем сравнения с экспериментальными данными) стационарные решения уравнений трехслойного течения. Установлено, что значения скоростей в слабосдвиговых слоях и толщины слоя жидкости, вычисленные по предложенной модели, хорошо согласуются с результатами работы [8]. Значения ширины слоя смешения, определенные теоретически и экспериментально, различаются более существенно, что обусловлено, в частности, некоторой “размытостью” границ слоев. Построены численные решения с использованием нестационарных одномерных уравнений. В случае постоянных граничных условий показано, что за конечное время решение выходит на стационарный режим. При наличии трения область слоя смешения сужается, при этом данная прослойка сдвигается в область более медленного течения. Сравнение с результатами расчета по двумерным уравнениям теории мелкой воды показывает, что предложенная упрощенная модель достаточно точно описывает основные особенности течения и позволяет корректно определить осредненные параметры потока.

ЛИТЕРАТУРА

1. Но С. М., Huerre P. Perturbed free shear layers // Annual Rev. Fluid Mech. 1984. V. 16. P. 365–424.
2. Uijttewaal W. S. J. Hydrodynamics of shallow flows: application to rivers // J. Hydraul. Res. 2014. V. 52. P. 157–172.

3. **Jirka G. H.** Large scale flow structures and mixing processes in shallow flows // J. Hydraul. Res. 2001. V. 39. P. 567–573.
4. **Rhoads B. L., Sukhodolov A. N.** Lateral momentum flux and spatial evolution of flow within a confluence mixing interface // Water Resources Res. 2008. V. 44. W08440.
5. **Chu V., Babarutsi S.** Confinement and bed-friction effects in shallow turbulent mixing layers // J. Hydraul. Engng. 1988. V. 114. P. 1257–1274.
6. **Brown G. L., Roshko A.** On density effects and large structure in turbulent mixing layers // J. Fluid Mech. 1974. V. 64. P. 775–816.
7. **Uijtewaal W. S. J., Booij R.** Effects of shallowness on the development of free-surface mixing layers // Phys. Fluids. 2000. V. 12. P. 392–402.
8. **Booij R., Tukker J.** Integral model of shallow mixing layer // J. Hydraul. Res. 2001. V. 39. P. 169–179.
9. **van Prooijen B. C., Uijtewaal W. S. J.** A linear approach for the evolution of coherent structures in shallow mixing layers // Phys. Fluids. 2002. V. 14. P. 4105–4114.
10. **Ghidaoui M. S., Liang J. H.** Investigation of shallow mixing layers by BGK finite volume model // Intern. J. Comput. Fluid Dynamics. 2008. V. 22. P. 523–537.
11. **Liu H., Lam M. Y., Ghidaoui M. S.** A numerical study of temporal shallow mixing layers using BGK-based schemes // Comput. Math. Appl. 2010. V. 59. P. 2393–2402.
12. **Kirkil G.** Detached eddy simulation of shallow mixing layer development between parallel streams // J. Hydro-environ. Res. 2015. V. 9. P. 304–313.
13. **Benney D. J.** Some properties of long nonlinear waves // Studies Appl. Math. 1973. V. 52. P. 45–50.
14. **Чесноков А. А., Ляпидевский В. Ю.** Волновые движения идеальной жидкости в узком открытом канале // ПМТФ. 2009. Т. 50, № 2. С. 61–71.
15. **Chesnokov A. A., Liapidevskii V. Yu.** Shallow water equations for shear flows // Notes Numer. Fluid Mech. Multidisciplinary Design. 2011. V. 115. P. 165–179.
16. **Ляпидевский В. Ю.** Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости / В. Ю. Ляпидевский, В. М. Тешуков. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
17. **Ляпидевский В. Ю., Чесноков А. А.** Слой смешения под свободной поверхностью // ПМТФ. 2014. Т. 55, № 2. С. 127–140.
18. **Ляпидевский В. Ю., Чесноков А. А.** Горизонтальный слой смешения в течениях мелкой воды // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2016. № 4. С. 91–107.
19. **Овсянников Л. В.** Модели двухслойной “мелкой воды” // ПМТФ. 1979. № 2. С. 3–14.
20. **Тешуков В. М.** Газодинамическая аналогия для вихревых течений со свободной границей // ПМТФ. 2007. Т. 48, № 3. С. 8–15.
21. **Gavrilyuk S. L., Liapidevskii V. Yu., Chesnokov A. A.** Spilling breakers in shallow water: applications to Favre waves and to the shoaling and breaking of solitary waves // J. Fluid Mech. 2016. V. 808. P. 441–468.
22. **Nessyahu H., Tadmor E.** Non-oscillatory central differencing schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comput. Phys. 1990. V. 87. P. 408–463.

*Поступила в редакцию 29/VIII 2018 г.,
после доработки — 29/VIII 2018 г.
Принята к публикации 3/IX 2018 г.*