ПМТФ, № 4, 1965

УСТОЙЧИВОСТЬ ОБОЛОЧЕК В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

Э. И. Григолюк, Ю. В. Липовцев

(Москва)

Рассмотрим тонкую однородную оболочку при произвольном нагружении, вызывающем потерю устойчивости. Полагаем, что оболочка имеет некоторые начальные несовершенства в форме срединной поверхности, которые можно описать заданием некоторых начальных перемещений. После приложения нагрузки в процессе ползучести происходит развитие этих начальных несовершенств и вследствие этого—перераспределение напряжений как по толщине, так и по всей поверхности оболочки. Этот процесс перераспределения напряжений может оказаться настолько существенным, что в некоторый момент времени равновесное состояние оболочки окажется неустойчивым по Эйлеру, т. е. в некоторый момент времени окажутся возможными несколько форм равновесия, переход в каждую из которых осуществляется мгновенно. Назовем этот момент времени «критическим временем» потери устойчивости оболочки.

Отклонение напряженного и деформированного докритического состояния реальной оболочки от основного, соответствующего идеально гладкой оболочке, можно описать системой уравнений относительно функции напряжений и функции прогиба, если предположить, что для величин, характеризующих эти отклонения, справедливы линеаризованные соотношения ползучести, аналогичные соотношениям для упруго-вязких тел. К этой системе уравнений нужно присоединить систему уравнений устойчивости, составленную с учетом тех напряжений и деформаций, которые определяются системой уравнений докритического состояния.

§ 1. Постановка задачи. Предположим, что компоненты напряжений докритического состояния можно представить в виде

$$\sigma_{mn} = \sigma_{mn}^{\circ} + \frac{1}{h} T_{mn} + \frac{12}{h^3} M_{mn} z \tag{1.1}$$

Здесь σ_{mn}° — компоненты напряжения основного состояния; T_{mn}, M_{mn} — удельные дополнительные усилия и моменты, отнесенные к срединной поверхности оболочки; z — расстояние от срединной поверхности; h — толщина оболочки.

Следует отметить, что в случае ползучести, когда физические соотношения носят нелинейный характер, предположение о линейном распределении напряжений по толщине оболочки, вообще говоря, противоречит гипотезе прямой нормали. Но если докритическое состояние оболочки незначительно отклоняется от основного σ_{mn}°, соответствующего идеально гладкой оболочке, то физические соотношения можно линеаризировать относительно основного состояния. Тогда указанное противоречие устраняется. Уравнения равновесия докритического состояния в процессе ползучести имеют вид

$$\frac{\partial T_{m1}}{\partial x} + \frac{\partial T_{m2}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial M_{m1}}{\partial x} + \frac{\partial M_{m2}}{\partial y} = Q_m \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} + \frac{T_{11}}{R_{11}} + \frac{T_{22}}{R_{22}} - T_{11}\varkappa_{11} - T_{22}\varkappa_{22} - 2T_{12}\varkappa_{12} = 0 \tag{1.3}$$

$$(m = 1,\ 2)$$

Здесь Q_m — удельная поперечная сила; $\varkappa_{mn}$ — параметры изменения кривизны и кручения срединной поверхности; R_{mn} — радиус оболочки.

Система уравнений (1.2), (1.3) с присоединенными к ним соотношениями между напряжениями и деформациями описывает процесс выпучивания оболочки во времени, процесс перераспределения напряжений. Пусть в некоторый момент времени оболочка становится неустойчивой, это означает, что оболочка мгновенно может перейти в соседнее равновесное состояние, характеризуемое усилиями $T_{mn}+T_{mn}^*$, $Q_m+Q_m^*$, моментами $M_{mn}+M_{mn}^*$ и кривизнами $\varkappa_{mn}+\varkappa_{mn}^*$. Составляя уравнения равновесия для этого соседнего состояния, вычитая из них уравнения (1.2), (1.3) получим уравнения устойчивости

$$\frac{\partial T_{m_1}^*}{\partial x}+\frac{\partial T_{m_2}^*}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial M_{m_1}^*}{\partial x}+\frac{\partial M_{m_2}^*}{\partial y}=Q_m^* \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial Q_1^*}{\partial x}+\frac{\partial Q_2^*}{\partial y}+\frac{T_{11}^*}{R_{11}}+\frac{T_{22}^*}{R_{22}}-T_{11}\varkappa_{11}^*-2T_{12}\varkappa_{12}^*-T_{22}\varkappa_{22}^*-$$

$$-T_{11}^*\varkappa_{11}-2T_{12}^*\varkappa_{12}-T_{22}^*\varkappa_{22}=0 \tag{1.5}$$

$$(m=1,2)$$

При этом были отброшены нелинейные члены.

§ 2. Физические соотношения. Уравнения (1.2) — (1.5) не составляют замкнутой системы уравнений поставленной задачи, ибо к ним нужно еще присоединить уравнения, определяющие связь между компонентами напряжений и компонентами деформации в процессе ползучести и в момент потери устойчивости, а также записать соотношения между компонентами деформации и составляющими перемещения.

Пусть уравнение состояния при ползучести будет

$$\dot{p}_i=g(\sigma_i, p_i)\,\sigma_i \tag{2.1}$$

а составляющие тензора скоростей деформации ползучести $\dot{p}_{mn}$ и составляющие девиатора напряжений s_{mn} удовлетворяют соотношениям теории течения

$$\dot{p}_{mn}=\frac{3}{2}\,g(\sigma_i, p_i)\,s_{mn}$$

$$\dot{p}_{mn}=\dot{\varepsilon}_{mn}-\frac{3}{2E}\dot{s}_{mn}, \quad \dot{p}_i^2={}^2/_3\dot{p}_{mn}\dot{p}_{mn}, \quad \sigma_i^2={}^3/_2 s_{mn}s_{mn} \tag{2.2}$$

Здесь повторение индексов у сомножителей означает суммирование.

Обозначим напряженное состояние, соответствующее идеально гладкой оболочке, не имеющей начальных неправильностей, через $\overset{\circ}{\sigma}_i$ и будем его называть основным. Тогда напряженное состояние реальной оболочки в процессе ползучести будет отклоняться от основного. На основании этого компоненты напряжений и скоростей деформации ползучести можно представить в виде

$$s_{mn}=\overset{\circ}{s}_{mn}+\delta s_{mn}, \qquad \dot{p}_{mn}=\dot{\overset{\circ}{p}}_{mn}+\delta\dot{p}_{mn} \tag{2.3}$$

В соответствии с этим перепишем уравнения (2.1), (2.2)

$$\begin{gathered}\dot{p}_i^\circ+\delta\dot{p}_i=g(\sigma_i^\circ+\delta\sigma_i,\ p_i^\circ+\delta p_i)(\sigma_i^\circ+\delta\sigma_i)\\ \dot{p}_{mn}^\circ+\delta\dot{p}_{mn}={}^3/_2 g(\sigma_i^\circ+\delta\sigma_i,\ p_i^\circ+\delta p_i)(\overset{\circ}{s}_{mn}+\delta s_{mn})\end{gathered} \tag{2.4}$$

Причем для основного состояния также справедливы уравнения (2.1), (2.2)

$$\dot{p}_i^\circ=g(\sigma_i^\circ,\ p_i^\circ)\,\sigma_i^\circ, \qquad \dot{p}_{mn}^\circ={}^3/_2 g(\sigma_i^\circ,\ p_i^\circ)\,\overset{\circ}{s}_{mn}$$

Представляя теперь правые части уравнений (2.4) в виде ряда в окрестности основного состояния и удерживая лишь линейные члены, получим (см. работы [1,2])

$$\begin{gathered}\delta\dot{\varepsilon}_{mn} - ({}^2/{}_3E)^{-1}\delta\dot{s}_{mn} = {}^3/{}_2 g(\sigma_i^\circ, p_i^\circ)\{\delta s_{mn} + \alpha_{mn}^*(Ec\delta p_i + b\delta\sigma_i)\} \\ \delta\dot{p}_i = g(\sigma_i^\circ, p_i^\circ)\{Ec\delta p_i + (b+1)\delta\sigma_i\}\end{gathered} \qquad (2.5)$$

$$c = \frac{\sigma_i^\circ}{E}\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial p_i}, \qquad b = \frac{\sigma_i^\circ}{g}\frac{\partial g}{\partial \sigma_i}, \qquad \alpha_{mn}^* = \frac{\overset{\circ}{s}_{mn}}{\sigma_i^\circ}$$

Вводя новую переменную времени

$$\tau = E\int_0^t g(\sigma_i^\circ, p_i^\circ)\,dt \qquad (2.6)$$

найдем

$$\begin{gathered}\delta s_{mn}^{\cdot} + \delta s_{mn} = {}^2/{}_3E\delta\dot{\varepsilon}_{mn} - \alpha_{mn}^*(Ec\delta p_i + b\delta\sigma_i) \\ E\delta\dot{p}_i = Ec\delta p_i + (b+1)\delta\sigma_i\end{gathered} \qquad (2.7)$$

Для начального момента времени примем закон Гука

$$\delta\varepsilon_{mn} = {}^3/{}_2E^{-1}\delta s_{mn} \qquad (2.8)$$

После интегрирования уравнений (2.7), с учетом начальных условий (2.8) будем иметь

$$\delta s_{mn} = {}^2/{}_3EI\delta\varepsilon_{mn} - \alpha_{mn}^*G\delta\sigma_i \qquad (2.9)$$

Здесь

$$I\delta\varepsilon_{mn} = \delta\varepsilon_{mn} - e^{-\tau}\int_0^\tau e^\tau\delta\varepsilon_{mn}\,d\tau$$

$$G\delta\sigma_i = e^{-\tau}\int_0^\tau e^\tau\left\{e^{c^*}c\int_0^\tau(b+1)e^{-c^*}\delta\sigma_i\,d\tau + b\delta\sigma_i\right\}d\tau \qquad \left(c^* = \int c\,d\tau\right)$$

Для приращений деформаций оболочки используем выражения

$$\delta\varepsilon_{mn} = \delta\varepsilon_{mn}^c + z(\varkappa_{mn} - \varkappa_{mn}^\circ)$$

$$\delta\varepsilon_{mn}^c = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_m}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n}{\partial x_m}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial x_n}\frac{\partial w}{\partial x_m} - \frac{1}{2}\frac{\partial w^\circ}{\partial x_n}\frac{\partial w^\circ}{\partial x_m} - \frac{w - w^\circ}{R_{mn}}\delta_{mn} \qquad (2.10)$$

$$(x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad m = 1, 2, \quad n = 1, 2) \quad u_1 = u, \ u_2 = v$$

Здесь $\varkappa_{mn}^\circ$, w° — начальные кривизны и начальный прогиб, которые имеют место в оболочке до приложения нагрузки.

§ 3. Усилия и моменты. Выпишем выражения для усилий и моментов, отнесенных к срединной поверхности оболочки,

$$M_{11} = \int_{(z)}(2\delta s_{11} + \delta s_{22})z\,dz, \ldots, \qquad T_{11} = \int_{(z)}(2\delta s_{11} + \delta s_{22})\,dz, \ldots, \qquad (3.1)$$

Подставляя в выражения (3.1) напряжения (2.9) и исключая деформации, согласно (2.10), имеем ($D = {}^1/{}_9Eh^3$)

$$\begin{gathered}M_{11} = DI(\varkappa_{11} + {}^1/{}_2\varkappa_{22} - \varkappa_{11}^\circ - {}^1/{}_2\varkappa_{22}^\circ) - \alpha_{11}GM_i \\ M_{22} = DI(\varkappa_{22} + {}^1/{}_2\varkappa_{11} - \varkappa_{22}^\circ - {}^1/{}_2\varkappa_{11}^\circ) - \alpha_{22}GM_i \\ M_{12} = {}^1/{}_2DI(\varkappa_{12} - \varkappa_{12}^\circ) - \alpha_{12}GM_i\end{gathered} \qquad (3.2)$$

$$M_i = (\alpha_{11} - {}^1/{}_2\alpha_{22})M_{11} + (\alpha_{22} - {}^1/{}_2\alpha_{11})M_{22} + 3\alpha_{12}M_{12}$$

$$\alpha_{11} = 2\alpha_{11}^* + \alpha_{22}^*, \qquad \alpha_{22} = 2\alpha_{22} + \alpha_{11} \qquad \alpha_{12} = \alpha_{12}^* \qquad (3.3)$$

Аналогичным образом получаем удельные усилия

$$T_{11} = \frac{4Eh}{3} I \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w^\circ}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial w^\circ}{\partial y}\right)^2 \right] - \frac{w - w^\circ}{R_{11}} - $$
$$- \frac{w - w^\circ}{2R_{22}} \Big] - \alpha_{11} G T_i$$

$$T_{22} = \frac{4Eh}{3} I \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w^\circ}{\partial y}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial w^\circ}{\partial x}\right)^2 \right] -$$
$$- \frac{w - w^0}{2R_{11}} - \frac{w - w^0}{R_{22}} \Big] - \alpha_{22} G T_i \qquad (3.4)$$

$$T_{12} = \frac{Eh}{3} I \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial w^\circ}{\partial x}\frac{\partial w^\circ}{\partial y} \right] - \alpha_{12} G T_i$$
$$T_i = (\alpha_{11} - {}^1/_2\,\alpha_{22})\, T_{11} - (\alpha_{22} - {}^1/_2\,\alpha_{11})\, T_{22} + 3\alpha_{12} T_{12} \qquad (3.5)$$

Для приращений моментов и усилий при потере устойчивости справедливы следующие соотношения:

$$M_{11}^* = D(\varkappa_{11}^* + {}^1/_2\,\varkappa_{22}^*), \qquad M_{22}^* = D(\varkappa_{22}^* + {}^1/_2\,\varkappa_{11}^*), \qquad M_{12}^* = {}^1/_2\, D\, \varkappa_{12}^*$$
$$T_{11}^* = \frac{4Eh}{3}\left[\frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial v^*}{\partial y} - \frac{w^*}{2R_{22}} - \frac{w^*}{R_{11}} + 2\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w^*}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w^*}{\partial y}\right]$$
$$T_{22}^* = \frac{4Eh}{3}\left[\frac{\partial v^*}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial u^*}{\partial x} - \frac{w^*}{R_{22}} - \frac{w^*}{2R_{11}} + 2\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w^*}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w^*}{\partial x}\right] \qquad (3.6)$$
$$T_{12}^* = \frac{Eh}{3}\left[\frac{\partial u^*}{\partial y} + \frac{\partial w^*}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w^*}{\partial y}\right]$$

Выражения для $\overset{*}{T}_{mn}$ линеаризованы относительно w^*.

§ 4. Уравнения устойчивости пологой оболочки общего вида. Вводя функции усилий для T_{mn} и $\overset{*}{T}_{mn}$, удовлетворяем первым уравнениям (1.2), (1.4), а для определения силовых функций составляем условия неразрывности деформаций. Оставшиеся уравнения равновесия (1.2), (1.4) записываем в перемещениях, используя при этом соотношения (3.3), (3.5). После выполнения всех этих операций будем окончательно иметь систему уравнений докритического состояния

$$K(w, F) + G[K(w, F) + T(w)] = 0$$
$$\nabla^2\nabla^2 F + \Lambda_1^2 G F = -Eh I\left[\frac{1}{R_{11}}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w^\circ}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{R_{22}}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w^\circ}{\partial x^2}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{L(w, w)}{2} - \frac{L(w^\circ, w^\circ)}{2}\right] \qquad (4.1)$$
$$K(w, F) = D\nabla^2\nabla^2 I(w - w^\circ) - h\sigma_i^\circ \Lambda w - L(w, F) - \frac{1}{R_{22}}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{R_{11}}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$
$$L(w, F) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}$$
$$T(w) = -{}^3/_4\, D\Lambda^2 I(w - w^\circ)$$

и систему уравнений устойчивости

$$\nabla^2\nabla^2 F^* = -Eh\left(\frac{1}{R_{11}}\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} + \frac{1}{R_{22}}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + L(w^*, w)\right)$$
$$D\nabla^2\nabla^2 w^* - h\sigma_i^\circ \Lambda w^* - \frac{1}{R_{22}}\frac{\partial^2 F^*}{\partial x^2} - \frac{1}{R_{11}}\frac{\partial_2 F}{\partial y^2} - L(w, F^*) - L(w^*, F) = 0$$
$$\Lambda = \alpha_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\alpha_{12}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} + \alpha_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2} \qquad (4.2)$$
$$\Lambda_1 = \alpha_{11}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) + \alpha_{22}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + 3\alpha_{12}\frac{\partial}{\partial x\,\partial y}$$

§ 5. Замкнутая цилиндрическая оболочка при осевом сжатии. Рассмотрим устойчивость замкнутой цилиндрической оболочки в случае равномерного осевого сжатия ($R_{11} = \infty$, $R_{22} = R$, $\alpha = -1, \alpha_{12} = \alpha_{22} = 0$), используя при этом простейший закон ползучести

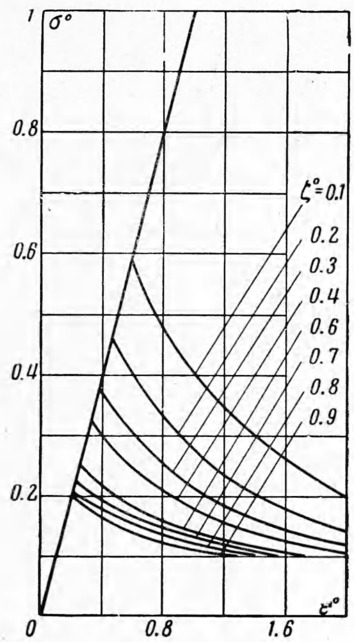
$$p_i^{\cdot} = B\sigma_i \tag{5.1}$$

Тогда система уравнений (4.1) примет вид

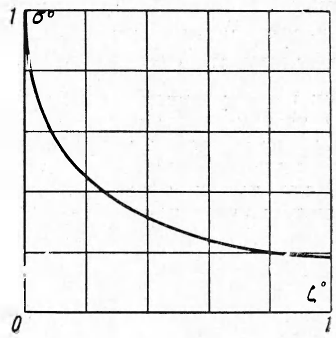
$$\nabla^2\nabla^2 F = -\frac{Eh}{R} I \left[\frac{\partial^2 (w - w^\circ)}{\partial x^2} + \frac{R}{2} L(w, w) - \frac{R}{2} L(w^\circ, w^\circ)\right]$$

$$D\nabla^2\nabla^2 I(w - w^\circ) + T^\circ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - L(w, F) = 0 \tag{5.2}$$

Для решения вопроса о выборе формы прогиба до и после потери устойчивости, а также формы начального прогиба обратимся к нелинейной задаче о закритических деформациях цилиндрической оболочки, рассматриваемой рядом авторов в работах [3-8]. В этих работах используются различные представления формы послекритического прогиба,



Фиг. 1



Фиг. 2

однако все они содержат одну общую часть, которую можно записать в виде

$$w_1 = f_1 \sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{ny}{R} + f_2 \sin^2\frac{m\pi x}{L} + f_0$$

Принимая это выражение послекритического прогиба за основу, положим

$$w^\circ = h\zeta^\circ \sin^2\frac{m\pi x}{L}, \qquad w = h\zeta(\tau)\sin^2\frac{m\pi x}{L} + h\zeta_1(\tau) \tag{5.3}$$

$$w^* = h\zeta^* \sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{ny}{R}$$

В результате после потери устойчивости будем иметь

$$w_1 = h\zeta^* \sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{ny}{R} + h\zeta\sin^2\frac{m\pi x}{L} + h\zeta_1$$

При этом ζ^* из решения задачи в данной постановке не определяется. Интегрируя систему уравнений (5.2), находим

$$\zeta(\tau) = (k+1)\zeta^\circ e^{k\tau}, \qquad T_{22} = \frac{Eh^2}{R} k\zeta^\circ e^{k\tau} \cos\frac{2m\pi x}{L} \tag{5.4}$$

$$k = \frac{\sigma}{l_1 - \sigma}, \qquad \sigma = \frac{T^\circ R}{Eh^2}, \qquad l_1 = \frac{4\eta\vartheta^2}{9} + \frac{1}{4\eta\vartheta^2}, \qquad \vartheta = \frac{m\pi R}{Ln}, \qquad \eta = \frac{h}{R}n^2$$

Исключая теперь из второго уравнения системы (4.2) w, F, F^* и интегрируя его по методу Бубнова — Галёркина, получим уравнение для определения критического параметра времени $\tau = \tau_*$

$$4l_3(k+1)^2\zeta^{\circ 2}e^{2k\tau} - (1+k)\, l_4\zeta^\circ e^{k\tau} + l_2 - \sigma = 0$$

$$l_2 = \frac{(1+\vartheta^2)^2}{9\vartheta^2}\eta + \frac{\vartheta^2}{\eta(1+\vartheta^2)^2}$$

$$l_3 = \eta\vartheta^2\left[\frac{1}{(1+\vartheta^2)^2} + \frac{1}{(1+9\vartheta^2)^2}\right], \qquad l_4 = \frac{4\vartheta^2}{(1+\vartheta^2)^2} + \frac{k}{(k+1)^2\vartheta^2}$$

На фиг. 1 приведена зависимость осевой критической деформации основного состояния от величины начальных напряжений и амплитуды начальных несовершенств. При этом на графике приняты следующие обозначения:

$$\sigma^\circ = \sigma / \sigma^+, \qquad \varepsilon^\circ = \sigma^\circ(1+\tau_*)$$

где σ^+ — верхнее критическое напряжение идеально гладкой упругой оболочки ($\sigma^+ = 0.605$). Параметры волнообразования ϑ, η были выбраны из условия минимума τ_*. Значения параметра критической деформации ε° отложены по оси абсцисс.

При $\tau = 0$ уравнение (5.5) приводит к решению задачи устойчивости упругой оболочки с учетом начальных несовершенств. На фиг. 2 дана зависимость величины критического напряжения упругой оболочки от амплитуды начального прогиба ζ°. Из графика видно, что величина критического напряжения резко изменяется при очень малых начальных прогибах. Это свидетельствует о том, что в эксперименте весьма затруднительно получить $\sigma^+ = 0.605$ или, что то же, $\sigma^\circ = 1$.

Поступила 27 IV 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н., Шестериков С. А. Устойчивость стержней и пластинок в условиях ползучести. ПММ, 1957, т. 21, вып. 3, 406—412.
2. Куршин Л. М., Липовцев Ю. В. Устойчивость цилиндрической панели при сжатии в условиях ползучести. Сб. «Тепловые напряжения в элементах конструкций», 1964, вып. 4, Киев.
3. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. М., Физматгиз, 1963.
4. Karman Th., Tsien H. S. The buckling of thin cylindrical shells under axial compression. JAS, 1941, vol. 8, No. 8, p. 303—312.
5. Michielsen H. F. The behavior of thin cylindrical shells after buckling under axial compression. JAS, 1948, vol. 15, No. 12, p. 738—744.
6. Kempner J. Postbuckling behavior of axially compressed circular cylindrical shells. JAS, 1954, vol. 17, No. 5, p. 329—335.
7. Donnell L. H., Wan C. C. Effects of imperfections on buckling of thin cylinders and columns under axial compression. J. Appl. Mech, 1950, vol. 17, No. 1, p. 73—83.
8. Almroth B. O. Postbuckling behavior of axially compressed circular cylinders. AIAA J., 1963, vol. 1, No. 3. p. 630—633.