

МЕХАНИЗМ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ
ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ ГОРЕНИИ ПОРОХА
В ПОЛУЗАМКНУТОМ ОБЪЕМЕ

С. Д. Гришин, И. И. Подтынков

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Известно, что резкое изменение давления при горении пороха в полузамкнутом объеме сопровождается нарушением динамического равновесия ряда элементарных процессов. Так, в работе [1] показано, что при быстром переходе горения пороха из одного стационарного состояния (с давлением p_0) в другое (с давлением p_1) имеют место запаздывающие процессы, характеризующиеся соответствующими временами релаксации (время релаксации давления в полузамкнутом объеме, время релаксации прогретого слоя пороха, времена завершения химических реакций в твердой и газовой фазах, время выравнивания давления в объеме и т. д.). Наибольшими значениями (по порядку величины) обладают времена релаксации прогретого слоя пороха и релаксации давления в полузамкнутом объеме. Поэтому в дальнейшем примем, что все элементарные процессы, кроме последних, являются безынерционными.

Рассмотрим физическую картину взаимодействия процессов горения пороха и изменения давления пороховых газов в полузамкнутом объеме. Будем считать, что скорость горения пороха определяется скоростью разложения конденсированной фазы в тонком поверхностном слое, примыкающем к поверхности раздела фаз. В этом случае основным параметром, определяющим скорость горения, является температура поверхности пороха T_s . Выражение для скорости горения может быть представлено в следующем виде:

$$u = B \exp(-E/RT_s). \quad (1)$$

При изменении давления пороховых газов фронт пламени перемещается относительно поверхности раздела фаз, и тепловой поток в конденсированную фазу изменяется. Если изменение давления произошло достаточно резко, так что температура поверхности T_s не успевает следить за изменением давления, возникнет неравновесный режим горения, при котором давление над поверхностью пороха принимает значение, близкое к p_1 , тогда как температура T_s соответствует значению давления, близкому к p_0 . При этом скорость горения пороха (скорость газификации) будет следить за изменением T_s и в течение некоторого времени в полузамкнутый объем будет поступать количество продуктов разложения пороха, отличающееся от нового равновесного значения (при давлении p_1) и препятствующее резкому изменению давления. Так, если, например, попытаться осуществить резкое снижение давления в полузамкнутом объеме от p_0 до p_s , то T_s в течение некоторого

времени будет превышать равновесное значение температуры, соответствующее давлению p_1 , и скорость горения пороха будет выше равновесной. При этом выделяется большее количество газов, чем в новом равновесном режиме (при давлении p_1). Снижение давления в объеме происходит более медленно, чем это обусловлено начальной скоростью изменения давления (dp/dt). Отсюда следует, что между изменениями давления и температуры поверхности существует обратная связь, роль регулятора которой играет скорость горения u (см. рисунок).

Передаточная функция $y_0(s)$ всей системы определяется из выражения

$$\Delta T_s = \Delta p \cdot y_1(s) - \Delta T_s \cdot y_1(s) \cdot y_2(s).$$

Отсюда

$$y_0(s) = \frac{\Delta T_s}{\Delta p} = \frac{y_1(s)}{1 + y_1(s) y_2(s)}. \quad (2)$$

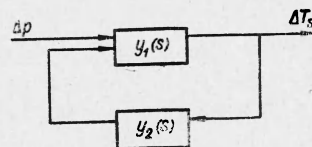


Схема обратной связи при горении пороха. Δp — выходной сигнал в динамическую систему (возмущение давления), ΔT_s — реакция системы на выходное возмущение, $y_1(s)$ и $y_2(s)$ — передаточные функции зоны прогретого слоя и полузамкнутого объема соответственно.

Попутно заметим, что устойчивость определяется только передаточной функцией системы. Полюса передаточной функции, т. е. значения оператора $s = d/dt$, обращающие y_0 в ∞ , представляют собой резонансные частоты. Наличие в системе других полюсов, а по условию рассматриваются только два релаксационных процесса, приводит к сдвигу фаз для этой пары полюсов и добавляет дополнительные составляющие в переходном процессе. Другие полюса исключены из рассмотрения вследствие малости времен релаксации ряда элементарных процессов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ ЗОНЫ ПРОГРЕТОГО СЛОЯ

Процесс распространения тепла в конденсированной фазе описывается уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (3)$$

с краевыми условиями

$$T(-\infty, t) = T_0; \quad (4)$$

$$\frac{\partial T(-\infty, t)}{\partial x} = 0; \quad (5)$$

$$T(-0, t) = T_s; \quad (6)$$

$$-\lambda_2 \frac{\partial T(+0, t)}{\partial x} = \lambda_1 \frac{\partial T(-0, t)}{\partial x} - c_1 \rho_1 u (T_s - T_0). \quad (7)$$

Здесь индекс «1» относится к конденсированной фазе, а индекс «2» к газовой фазе зоны горения.

В силу предположения о безынерционности тепловых процессов в газовой зоне, уравнение теплопроводности в этой зоне приобретает вид

$$a_2 \frac{d^2 T}{dx^2} + u \frac{dT}{dx} = 0 \quad (8)$$

при следующих граничных условиях

$$\begin{aligned} T(+0) &= T_s; \\ \frac{dT(x_2)}{dx} &= f_2, \end{aligned} \quad (9)$$

где x_2 — расстояние фронта пламени от поверхности раздела фаз; f_2 — конечное значение градиента температуры в зоне пламени.

Строго говоря, при рассмотрении нестационарного горения пороха необходимо рассматривать общее уравнение переноса тепла в газовой фазе, в котором в качестве зависимой переменной используется энтропия, так как при частотах изменения давления, превышающих несколько десятков килогерц, в газовой фазе возникают волны энтропии.

Первый интеграл уравнения (8) при выполнении граничного условия (9) имеет следующий вид:

$$\frac{dT(+0)}{dx} = f(+0) = f_2 \exp\left(\frac{u}{a_2} x_2\right). \quad (10)$$

Подставляя далее (10) в краевое условие (7), получим значение градиента температуры на «твердой» стороне поверхности раздела фаз

$$\frac{\partial T(-0, t)}{\partial x} = f(-0) = \frac{u}{a_1} (T_s - T_0) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} f_2 \exp\left(\frac{u}{a_2} x_2\right). \quad (11)$$

Решение уравнения теплопроводности (3) с крайевыми условиями (4)—(6) и (11) обладает двумя существенными математическими трудностями. Во-первых, неизвестно значение градиента температуры на «горячей» границе зоны пламени f_2 , и при линейном дифференциальном уравнении (3) краевое условие (11) обладает нелинейностью, связанной с несоблюдением принципа суперпозиции. Поэтому, несмотря на кажущуюся относительную простоту поставленной задачи, до сих пор в аналитическом виде она не решена.

Учитывая сказанное, а также обстоятельство, что в настоящей работе прежде всего, рассматриваются запаздывающие во времени характеристики процесса, применим некоторые упрощения, связанные с заменой системы с распределенными параметрами по координате x на систему с сосредоточенными параметрами. Тогда уравнение (3) можно представить в следующем виде:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{a_1}{x_1} [f(-0) - f(-\infty)]. \quad (12)$$

Формально уравнение (12) представляет собой результат однократного интегрирования уравнения (3) по x .

Более строго было бы использовать конечные разности для члена $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ (метод прямых) и заменить уравнение (3) системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако это внесет дополнительные математические трудности, не меняя принципиальной стороны физической задачи. При использовании уравнения (12) необходимо преобразовать краевое условие (5), поскольку асимптотическое стремление градиента температуры к нулю на $-\infty$ уже не имеет места, так как градиент при $x = -x_1$ принимает конечное значение $f(-x_1)$. Подстав-

ляя далее в (12) значение градиента температуры $f'(-0)$ из краевого условия (11), получим

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{x_1} \left[u (T_s - T_0) - \frac{\lambda_2}{c_1 \rho_1} f_2 \exp\left(\frac{u}{a_2} x_2\right) - a_1 f(-x_1) \right]. \quad (13)$$

Считая далее, что профиль температуры в прогретом слое за время переходного процесса изменяется гармонически и что длина волны колебаний температуры значительно меньше толщины прогретого слоя, можно текущую температуру T в левой части уравнения (13) заменить на среднюю температуру слоя, которая в данном случае определяется значениями на границах

$$\bar{T} = \frac{T_s + T_0}{2}. \quad (14)$$

Дифференцируя (14) и подставляя в (13), имеем окончательно

$$\begin{aligned} \frac{dT_s}{dt} &= \frac{2}{x_1} \left[u (T_s - T_0) - \frac{\lambda_2}{c_1 \rho_1} f_2 \exp\left(\frac{u}{a_2} x_2\right) - a_1 f(-x_1) \right]; \\ q_+(p, T_s) &= \frac{\lambda_2}{c_1 \rho_1} f_2 \exp\left(\frac{u}{a_2} x_2\right). \end{aligned} \quad (15)$$

Второй член (15) определяет приход тепла из зоны пламени.

Нетрудно видеть, что q_+ является функцией двух параметров давления и температуры T_s (или «ширины» газовой зоны горения x_2 и T_s). Первый и третий члены характеризуют собой расход тепла из прогретого слоя: первый — за счет нестационарной газификации, второй — путем обычной теплопроводности

$$q_-(T_s) = u (T_s - T_0) - a_1 f(-x_1).$$

Уравнение (15) можно записать поэтому следующим образом:

$$\frac{dT_s}{dt} = \frac{2}{x_1} [q_-(T_s) - q_+(p, T_s)];$$

Произведем варьирование этого выражения

$$\frac{d \Delta T_s}{dt} = \frac{2}{x_1} [\Delta q_-(T_s) - \Delta q_+(p, T_s)]; \quad (16)$$

$$\Delta q_-(T_s) = \frac{\partial q_-}{\partial T_s} \Delta T_s = \left\{ \left[\frac{\partial u}{\partial T_s} (T_s - T_0) + u \right] - a_1 \frac{\partial f(-x_1)}{\partial T_s} \right\} \Delta T_s; \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \Delta q_+(p, T_s) &= \left(\frac{\partial q_+}{\partial p} \right)_{T_s} \Delta p + \left(\frac{\partial q_+}{\partial T_s} \right)_p \Delta T_s = \\ &= \frac{u}{c_1 \rho_1} f_2 \left(\frac{\partial x_2}{\partial p} \right)_{T_s} \left[\exp\left(\frac{u}{a_2} x_2\right) \right] \Delta p + \frac{u}{c_1 \rho_1} f_2 \cdot \left(\frac{\partial x_2}{\partial T_s} \right)_p \times \\ &\times \left[\exp\left(\frac{u}{a_2} x_2\right) \right] \Delta T_s + \frac{x_2}{c_1 \rho_1} f_2 \left[\exp\left(\frac{u}{a_2} x_2\right) \right] \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial T_s} \right)_p \Delta T_s. \end{aligned} \quad (18)$$

Подставляя далее (17) и (18) в (16) и произведя элементарные операции, получим

$$\frac{\partial \Delta T_s}{dt} + \Phi_1 \Delta T_s = A_1 \Delta p, \quad (19)$$

$$\text{где } \Phi_1 = \frac{2}{x_1} \left\{ a_1 \frac{\partial f(-x_1)}{\partial T_s} - u - \frac{\partial u}{\partial T_s} (T_s - T_0) - \right. \\ \left. - \frac{u}{c_1 \rho_1} f_2 \left(\frac{\partial x_2}{\partial T_s} \right) \left[\exp \left(\frac{u}{a_2} x_2 \right) \right] - \frac{x_2}{c_1 \rho_1} f_2 \left[\exp \left(\frac{u}{a_2} x_2 \right) \right] \frac{\partial u}{\partial T_s} \right\} -$$

фактор устойчивости системы;

$$A = \frac{2}{x_1} \cdot \frac{u}{c_1 \rho_1} \cdot f_2 \left[\exp \left(\frac{u}{a_2} x_2 \right) \right] \left(\frac{\partial x_2}{\partial p} \right)_{T_s}.$$

Применяя к (19) операционный метод, получим передаточную функцию для процесса распространения тепла в прогретом слое

$$y_1(s) = \frac{\Delta T_s(s)}{\Delta p(s)} = \frac{A_1}{s + \Phi_1} = \frac{k_a}{\tau_a s + 1}, \quad (20)$$

где $s = d/dt$ — оператор дифференцирования; $k_a = A_1 / \Phi_1$ — «коэффициент усиления»; $\tau_a = 1 / \Phi_1$ — постоянная времени.

Уравнение (20) представляет собой передаточную функцию апериодического звена.

По таблицам преобразования Лапласа определяется решение

$$\varphi_1(t) = \frac{\Delta T_s(t)}{\Delta p(t)} = \frac{k_a}{\tau_a} \exp \left(-\frac{t}{\tau_a} \right) = A_1 \exp \left(-\frac{t}{\tau_a} \right).$$

Устойчивость системы определяется величиной Φ_1 (или τ_a). Исследованию устойчивости процесса горения пороха посвящены, в частности, недавние работы Я. Б. Зельдовича [2], Б. В. Новожилова [3]. Однако Я. Б. Зельдович проводит анализ при постоянной температуре поверхности T_s , что несколько искажает действительную физическую картину.

Б. В. Новожилов при исследовании нестационарного горения в качестве переменных параметров принимает давление p и температуру поверхности T_s , т. е. как раз те параметры, которые используются выше в качестве основных параметров рабочего процесса. Значения частных производных, входящих в выражения для «фактора устойчивости» Φ_1 и коэффициента A_1 , могут быть вычислены с помощью якобианов преобразования переменных от экспериментально измеренных величин при стационарном горении [3]. Исследование устойчивости не является целью настоящей работы, однако попутно заметим, что устойчивость горения определяется знаком величины Φ_1 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ ПОЛУЗАМКНУТОГО ОБЪЕМА

В условиях горения в полузамкнутом объеме система уравнений сохранения, вследствие низких скоростей горения и скоростей газового потока в объеме (т. е. ввиду малости кинетической энергии движения в сравнении с потенциальной энергией давления), сводится к использованию уравнения неразрывности и уравнения состояния. После про-

ведения элементарных преобразований имеем известное уравнение динамического равновесия полужамкнутого объема

$$\frac{V}{RT} \frac{dp}{dt} = F u \rho_1 - A p \sigma, \quad (21)$$

где p, T — соответственно среднеинтегральные значения давления и температуры в объеме; V — свободный объем; F — поверхность горения; R — газовая постоянная продуктов сгорания; σ — суммарная площадь выходных отверстий; A — коэффициент истечения.

Считая, как и прежде, скорость горения (скорость газификации) функцией температуры поверхности пороха и варьируя выражение (21), получим

$$\frac{d \Delta p}{dt} + \left(\frac{RT}{V} A \sigma \right) \Delta p = F \rho_1 \frac{\partial u}{\partial T_s} \Delta T_s. \quad (22)$$

Подставляя в (22) оператор дифференцирования $s = d/dt$ и разрешая относительно $\Delta p / \Delta T_s$, получим передаточную функцию

$$y_2(s) = \frac{\Delta p}{\Delta T_s} = \frac{A_2}{s + \Phi_2} = \frac{k_b}{\tau_b s + 1},$$

где $A_2 = F \rho_1 \frac{\partial u}{\partial T_s}$; $\Phi_2 = \frac{RT}{V} A \sigma$; $k_b = A_2 / \Phi_2$ — коэффициент усиления $\tau_b = 1 / \Phi_2$ — постоянная времени.

Передаточная функция $y_2(s)$ также является передаточной функцией аperiodического звена и описывает переходный процесс вида

$$\varphi(t) = \frac{\Delta p(t)}{\Delta T_s(t)} = \frac{k_b}{\tau_b} \exp\left(-\frac{t}{\tau_b}\right) = A_2 \exp\left(-\frac{t}{\tau_b}\right).$$

ПЕРЕХОДНЫЙ ПРОЦЕСС В ПОЛУЗАМКНУТОМ ОБЪЕМЕ ПРИ НАЛИЧИИ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

Подставим полученные выражения передаточных функций $y_1(s)$ и $y_2(s)$ в выражение для передаточной функции системы $y_0(s)$ (2). После некоторых преобразований получим

$$y_0(s) = \frac{\Delta T_s}{\Delta p} = M \frac{s}{s^2 + \xi_1 s + \xi_0} + N \frac{1}{s^2 + \xi_1 s + \xi_0}, \quad (23)$$

где

$$M = \frac{k_a}{\tau_a}; \quad N = \frac{k_a}{\tau_a \tau_b}; \quad \xi_1 = \frac{\tau_a + \tau_b}{\tau_a \tau_b}; \quad \xi_0 = \frac{1 + k_a k_b}{\tau_a \tau_b}.$$

По таблицам преобразования Лапласа [4] находим оригинал изображения (23)

при $\square = \xi_0 - \frac{\xi_1^2}{4} > 0$

$$F(t) = M \sqrt{\frac{\xi_0}{\square}} \exp\left[-\frac{\xi_1 t}{2}\right] \sin(\sqrt{\square} t + \psi) + N \frac{1}{\sqrt{\square}} \exp\left[-\frac{\xi_1 t}{2}\right] \sin \sqrt{\square} t,$$

$$\operatorname{tg} \psi = -\frac{2\sqrt{-\square}}{\xi_1};$$

при $\square = \xi_0 - \frac{\xi_1}{4} < 0$

$$F(t) = M \exp\left[-\frac{\xi_1 t}{2}\right] \left(\operatorname{ch} \sqrt{-\square} t - \frac{\xi_1}{2 - \sqrt{-\square}} \operatorname{sh} \sqrt{-\square} t + \right. \\ \left. + N \frac{1}{\sqrt{-\square}} \exp\left[\frac{-\xi_1 t}{2}\right] \operatorname{sh} \sqrt{-\square} t; \right.$$

при $\square = \xi_0 - \frac{\xi_1^2}{4} = 0$

$$F(t) = M \exp\left[-\frac{\xi_1 t}{2}\right] \left(1 - \frac{\xi_1 t}{2}\right) + N t \exp\left[-\frac{\xi_1 t}{2}\right].$$

*Поступила в редакцию
22/VIII 1966*

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. В. Новожилов. ПМТФ, 1962, 5.
2. Я. Б. Зельдович. ПМТФ, 1964, 3.
3. Б. В. Новожилов. ПМТФ, 1965, 6.
4. Г. Деч. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. Физматгиз, 1960.