

О ЗАКРУЧЕННОЙ ПОЛОЙ СТРУЕ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Ю. И. Петухов (Новосибирск)

В теории водосливов используется предположение, называемое принципом максимума расхода, согласно которому в данном канале при заданном полном напоре осуществляется максимальный из возможных расходов жидкости [1].

Имеющиеся экспериментальные данные лишь качественно повторяют зависимости между параметрами, вытекающие из указанного принципа, в то время как с результатами численных расчетов согласуются вполне удовлетворительно [2]. Это заставляет сомневаться в точном характере гипотезы о максимуме расхода.

В работе методом, развитым Н. Н. Моисеевым [3], выясняется смысл соотношений, вытекающих из принципа максимума, когда последний используется для расчета параметров потенциального течения идеальной жидкости в так называемой центробежной форсунке; установлена формула, лучше согласующаяся с экспериментом.

1. Рассмотрим осесимметричный закрученный поток идеальной жидкости, геометрия которого представлена на фиг. 1.

Здесь в меридианном сечении пространственной картины введена система координат xr ; ось x — ось симметрии течения; $AA'G'F'FG$ — сечение бесконечного слоя жидкости, истекающей в цилиндрическую полубесконечную трубу $FF'E'E$ единичного радиуса; $BB'C'C$ — внутренняя цилиндрическая стенка, $BB'D'D$ — свободная поверхность жидкости, радиус которой $r = \sigma(x)$. Расход q и циркуляция Γ заданы (рассматривается потенциальное течение, поэтому $\Gamma = \text{const}$). Радиальную тангенциальную и осевую компоненты вектора скорости обозначим через v_r , v_φ и v_x соответственно.

В силу потенциальности течения $rv_\varphi = \Gamma/2\pi$. При уменьшении r увеличивается центробежная сила (ибо v_φ растет), которая способствует оттеснению потока от оси и образованию полости $BB'D'D$, если расход не слишком велик.

Роль внутренней полубесконечной стенки $BB'C'C$ двойственна в соответствии с двумя аспектами задачи, которые будут рассмотрены. Именно, при изучении зависимости радиуса свободной поверхности от q и Γ стенка $BB'C'C$ будет условной цилиндрической касательной к свободной поверхности в точках BB' (случай 1). Введение ее продиктовано техникой вычислений.

С другой стороны, будет решаться вопрос о критерии заполнения целиком пространства между $BB'C'C$ и $FF'E'E$ закрученным потоком жидкости. В этом аспекте $BB'C'C$ — реальная цилиндрическая стенка радиуса r_0 (случай 2), причем по мере увеличения q при неизменной циркуляции Γ точка отрыва (схода) жидкости M

переходит на $BB'C'C$ и перемещается в сторону увеличения x . При некотором конечном $q = q_0$ произойдет заполнение всего пространства между цилиндрами.

В точке схода жидкости $v_r = 0$, а осевая скорость, которую будем в точке M обозначать через v_0 , изменяется от нуля в точке B (когда B и M совпадают) до $q/\pi(1-r_0^2)$ в бесконечности.

Интеграл Бернулли на свободной поверхности выполняется в следующей форме (жидкость невесома):

$$\frac{\Gamma^2}{4\pi^2\sigma^2} + v_r^2 + v_x^2 = \frac{\Gamma^2}{2\pi^2r_0^2} + v_0^2 \quad (1.1)$$

При рассмотрении случая 1 в (1.1) надо положить $v_0 = 0$.

В обоих случаях предполагается, что $\sigma \rightarrow r_\infty = \text{const}$ при $x \rightarrow \infty$, т. е. рассматривается асимптотически однородное течение.

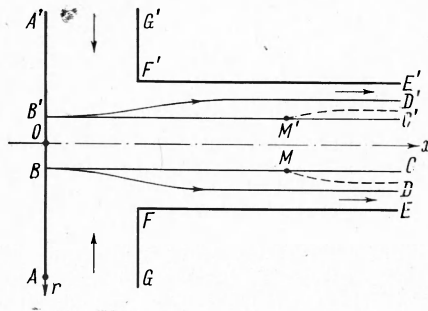
2. Для дальнейшего потребуются знание граничной производной квазиконформного отображения некоторого специального вида. Именно, найдем функцию u , удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} - \frac{1}{\beta} \frac{\partial u}{\partial \beta} = 0 \quad (2.1)$$

с граничными условиями

$$u = 0 \text{ при } \beta = 1, \quad u = n = \text{const при } \beta = f(\alpha) \quad (2.2)$$

Функция $f(\alpha)$ — гладкая, мало отличающаяся от некоторого постоянного значения, так что все ее производные малы; большие среди них — первая и вторая [3].



Фиг. 1

Введем в (2.2) параметр $\varepsilon: \lambda = \varepsilon\alpha$, так что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} - \frac{1}{\beta} \frac{\partial u}{\partial \beta} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \lambda^2} = 0 \quad \left(\varepsilon = \frac{\lambda}{\alpha} \right) \quad (2.3)$$

и будем искать решение в виде ряда

$$u = u_0(\lambda, \beta) + \varepsilon^2 u_1(\lambda, \beta) + \dots \quad (2.4)$$

Подставив (2.4) в (2.3) и объединив члены с одинаковыми степенями ε , получим для первых двух коэффициентов ряда уравнения:

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial \beta^2} - \frac{1}{\beta} \frac{\partial u_0}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial \beta^2} - \frac{1}{\beta} \frac{\partial u_1}{\partial \beta} = - \frac{\partial^2 u_0}{\partial \lambda^2} \quad (2.5)$$

Решение (2.5) с граничными условиями, подчиненными (2.2), имеет вид

$$u_0 = a(\lambda)(\beta^2 - 1) \quad \left(a(\lambda) = \frac{n}{\chi^2 - 1} \right) \quad (2.6)$$

$$u_1 = - \frac{a''}{4} \left[\frac{(\beta^2 - 1)^2}{4} - \beta^2 (\ln \beta^2 - 1) \right] + \frac{a'' \beta^2}{4(1 - \chi^2)} \left[1 - \frac{(\chi^2 - 1)^2}{2} + (\chi^2 \ln \chi^2 - \chi^2) \right] +$$

$$+ \frac{a''}{4(1 - \chi^2)^2} \left[\frac{(\chi^2 - 1)^2}{2} - \chi^2 (\ln \chi^2 - 1) \right] \quad \left(\chi(\lambda) = f\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right) \right)$$

Ограничившись двумя членами ряда (2.4) из (2.6) получим на кривой f

$$\frac{1}{f^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} \right)^2 = \frac{4n^2}{(1 - f^2)^2} \left\{ 1 + f'' \frac{f}{f^2 - 1} \left(\frac{f^2 - 1}{2} - 1 + \frac{\ln f^2}{f^2 - 1} \right) \right\} \quad (2.7)$$

Учет членов с более высокими степенями ε добавит в (2.7) слагаемые, содержащие следующие производные от f , которые предполагаются малыми.

3. Допустим, что известно преобразование $p = p(r, x)$, $\tau = \tau(r, x)$, отображающее четырехугольник $ABCEFG$ плоскости xr (фиг. 1) на полосу в плоскости $p\tau$ (фиг. 2) (соответствие точек видно из фиг. 1 и 2), такое, что точки прямой GE в плоскости $p\tau$ имеют ординату, равную единице, точки прямой AC — ординату, равную r_0 , а уравнение, имеющее вид (2.1) в плоскости xr , сохраняет его и в плоскости $p\tau$.

Пусть кривая $r = \sigma(x)$ переходит в кривую $\tau = \theta(p)$. Считая область $ABDEG$ близкой к полосе $ABCEG$, можно написать следующее разложение:

$$\sigma = r_0 + \Phi_1(p)(\theta - r_0) + \Phi_2(p)(\theta - r_0)^2 + \dots \quad (3.1)$$

где Φ_1 и Φ_2 — некоторые функции p , о которых известно, что они обращаются в бесконечность при $p = 0$. Кроме того, плоскости xr и $p\tau$, очевидно, совпадают при больших x и p , что означает $\Phi_1 \rightarrow 1$, $\Phi_2 \rightarrow 0$ при $p \rightarrow \infty$.

В силу последнего, в дальнейшем третий член разложения использоваться не будет. В задаче тангенциальная скорость известным образом зависит от r и не зависит от x . Можно ввести комплексный потенциал W , компоненты которого — функция тока ψ и потенциал ϕ — описывают только радиальное и осевое течения. В плоскости W область течения изобразится полосой, так что $\psi = 0$ на GFE , $\psi = q/2\pi$ на ABD . Кроме того, известно

$$v_r = - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad v_x = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$$

Считая на свободной поверхности $v_r \ll v_x$, перепишем (1.1) в виде

$$\left| \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right|^2 + \frac{c^2}{\sigma^2} = \frac{c^2}{r_0^2} + v_0^2 \quad \left(c = \frac{\Gamma}{2\pi} \right) \quad (3.2)$$

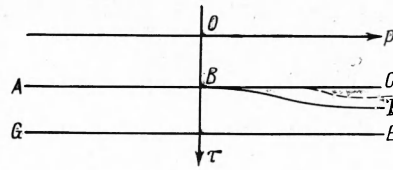
В переменных плоскости $p\tau$ это уравнение имеет вид

$$\left| \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial r} \right|^2 + \frac{c^2}{[r_0 + \Phi_1(\theta - r_0)]^2} = \frac{c^2}{r_0^2} + v_0^2 \quad (3.3)$$

Задача отыскания ψ в плоскости $p\tau$ аналогична задаче, рассмотренной в п. 2. Поэтому, воспользовавшись (2.7), из (3.3) получим

$$\frac{1}{(1 - m\delta^2)^2} \left\{ 1 + R(\delta) \frac{d^2 \delta}{dp^2} \right\} = \mu \frac{N\Phi_1 [2 + \Phi_1(\delta - 1)]}{[1 + \Phi_1(\delta - 1)]^2} (\delta - 1) + vN \quad (3.4)$$

$$R(\delta) = \frac{m\delta}{m\delta^2 - 1} \left(\frac{m\delta^2 - 1}{2} - 1 + \frac{\ln m\delta^2}{m\delta^2 - 1} \right)$$



Фиг. 2

В записи уравнения (3.4) введены следующие обозначения

$$N := \left(\frac{\partial r}{\partial \tau}\right)^2, \quad m = r_0^2, \quad \delta = \frac{\theta}{r_0}, \quad \mu = \frac{c^2 \pi^2}{r_0^2 q^2}, \quad \nu = v_0^2 \frac{\pi^2}{q^2}, \quad N \rightarrow \infty \text{ при } p \rightarrow 0$$

$$N \rightarrow 1 \text{ при } p \rightarrow \infty$$

Искомое решение уравнения (3.4) должно удовлетворять граничным условиям

$$\delta(0) = 1, \quad d\delta / dp |_{p=0} = 0 \quad (3.5)$$

В (3.4) входят функции N и Φ_1 , явный вид которых неизвестен, ибо квазиконформное отображение, порождением которого они являются, построить трудно. Однако если последнее удастся сделать, в (3.4) будет заключена информация о влиянии условий на входе (геометрии течения) на радиус присосевого разрыва. Дальше используются только известные предельные значения этих функций.

4. В (3.4) величины μ и ν неизвестны, однако есть условие для нахождения μ : при некотором значении μ выражение (3.4) должно иметь решение, стремящееся асимптотически к константе δ_∞ . Пусть в случае 2 сход жидкости происходит при боль-

шом значении x , так что в (3.4) можно положить $N = 1$, $\Phi_1 = 1$. Уравнение примет вид

$$\frac{1}{(1 - m\delta^2)^2} \left\{ 1 + R(\delta) \frac{d^2 \delta}{dp^2} \right\} = \mu \frac{\delta^2 - 1}{\xi^2} + \nu \quad (4.1)$$

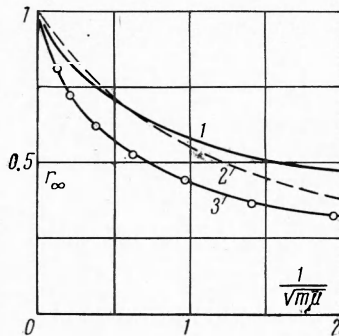
Поскольку точка схода имеет большую абсциссу, δ мало отличается от единицы (пространство между цилиндрами почти заполнено), и все производные от δ малы, так что квадратами производных можно пренебречь там, где они сравниваются с первыми степенями.

Домножив (4.1) на $2m\delta\delta'$ и проинтегрировав с граничными условиями (3.5), получим (4.2)

$$D(y) (y')^2 =$$

$$= (1/2)\mu k + 1/3\mu y^2 + y(kv - 1/2\mu) + (l - \nu)$$

$$(y = \delta^2 - 1, k = m/(1 - m), l = 1/(1 - m)^2)$$



Фиг. 3

Здесь $y = \delta^2 - 1$, $D(y)$ — некоторая функция, связанная с $R(\delta)$; из (4.2) получим

$$\int_0^y \frac{V D dy}{\sqrt{(1/2)\mu k + 1/3\mu y^2 + y(kv - 1/2\mu) + (l - \nu)}} = p$$

При $p \rightarrow \infty$ имеем $y \rightarrow y_\infty = \text{const}$, поэтому последний интеграл должен в точке $y = y_\infty$ расходиться, а это значит, что подкоренное выражение имеет кратный корень y_∞ .

Условие кратности корня

$$(kv - 1/2\mu)^2 - 4(l - \nu)(1/2\mu k + 1/3\mu) = 0 \quad (4.3)$$

Если точка схода стремится в бесконечность, то $\nu \rightarrow l$. Из (4.3) получим

$$kv = 1/2\mu, \text{ или } \mu = 2m/(1 - m)^3 \quad (4.4)$$

Из принципа максимума расхода для случая 1 следует формула вида (4.4), где вместо $m = r_0^2$ стоит величина $m_1 = r_\infty^2$ [2]. Истинный же смысл (4.4), таким образом, состоит в том, что это есть критерий заполнения пространства между цилиндрами, закупоренными потоком жидкости в изображенной на фиг. 1 геометрии.

Расчет плоского аналога случая 1 для весомой жидкости показал, что функции N и Φ_1 мало изменяют результат. Поэтому рассмотрим (3.4) с $\nu = 0$, $N = 1$, $\Phi_1 = 1$. Вводя $y = 1 - m\delta^2$ и разложив $\ln m\delta^2$ в ряд по степеням y до членов третьей степени включительно, получим уравнение

$$\frac{1}{y} + \frac{y''}{6} - \mu \left(1 - \frac{m}{1 - y}\right) y = 0 \quad (4.5)$$

Домножив (4.5) на y' , проинтегрировав и рассуждая так же, как при выводе (4.4), получим условие существования асимптотически однородного решения уравнения (4.5)

$$\mu = \frac{1 + m}{(1 - m)^2} \quad (4.6)$$

Этому значению μ соответствует $y_{\infty} = 1 - m$, или разложение до третьих степеней y соответствует предположению о цилиндричности внутренней полости течения, ибо $y = 1 - m\delta^2$.

На фиг. 3 приведено сравнение (4.4) и (4.6) с экспериментальными данными, заимствованными в [2]. Здесь кривая 1 — из формулы (4.4), кривая 2 — из формулы (4.6), кривая 3 проведена по экспериментальным точкам. Напомним, что (4.6) получено в предположении $r_0 = r_{\infty}$.

Поступила 25 I 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. А б р а м о в и ч Г. Н. Прикладная газовая динамика. Изд-во ТТЛ, 1950.
2. Г о л ь д ш т и к М. А., Л е о н т ь е в А. К., П а л е е в И. И. Аэродинамика вихревой камеры. Теплоэнергетика, 1961, № 2.
3. М о и с е е в Н. Н. Асимптотические методы типа узких полос. Сб. «Некоторые проблемы математики и механики». Изд-во АН СССР, 1961.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПАДА СТРУИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ, ОБТЕКАЕМОЙ ГАЗОВЫМ ПОТОКОМ

Г. Ф. Тобольский (Магнитогорск)

Задача о распаде цилиндрической струи вязкой жидкости, поперечно обтекаемой потоком другой жидкости, имеет как самостоятельное, так и прикладное значение при анализе механизма образования штапельного силикатного волокна (стеклянной и минеральной ваты). Теоретическое исследование указанной задачи для идеальной жидкости дано в работе [1], в которой используется метод малых возмущений и рассматривается развитие тангенциальных волн, приводящих к расщеплению струи на продольные жидкие нити, а также вычисляются критические значения числа Вебера для нейтральных колебаний, соответствующие границе устойчивости.

Представляло интерес провести экспериментальные исследования распада струи вязкой жидкости и найти количественную зависимость диаметра возникающих нитей от свойств жидкости и параметров поперечно обтекаемого потока.

Эксперименты проводились с расплавами винсоловой смолы (абетиновой кислоты $H_{19}C_{29}COOH$) и доменных шлаков. В расплавленном состоянии их можно отнести к ньютоновским жидкостям, свойства которых (вязкость μ , поверхностное натяжение σ , плотность ρ_2) зависят от температуры.

Использование расплавов вместо обычных ньютоновских жидкостей позволило судить о характере распада струи непосредственно по образующимся в результате распада частицам.

Расчеты показали, что после распада струи основное количество образующихся частиц расплава охлаждается до твердого состояния за время порядка от 10^{-4} до 10^{-5} сек, при этом фиксируется их форма.

Поэтому, определив форму и размеры частиц в зависимости от свойств расплава и параметров поперечно обтекаемого потока, можно не только качественно, но и количественно представить характер распада струи вязкой жидкости.

Плотность расплава винсоловой смолы в среднем в 2,5 раза меньше плотности шлакового расплава, поверхностное натяжение меньше в 10—13 раз, вискозиметрические характеристики аналогичны. Расплав требуемой температуры получался в лабораторных электропечах. Температура расплава контролировалась платино-платинородиевыми и медь-константановыми термопарами с точностью до $1^\circ C$. Требуемый диаметр струи расплава достигался за счет изменения диаметра фильер и вязкости (температуры) расплава. Диаметр струй расплава винсоловой смолы менялся в пределах $(0,6 - 2) \cdot 10^{-3}$ м, шлакового расплава — $(2-8) \cdot 10^{-3}$ м. Вязкость расплава в момент встречи с поперечно обтекаемым потоком воздуха изменялась от 0,008 до $0,7 \text{ кг сек/м}^2$. Поток воздуха создавался при помощи цилиндрических сопел диаметром $3 \cdot 10^{-3}$ и $5 \cdot 10^{-3}$ м и длиной $3 \cdot 10^{-2}$ м, подсоединенных к компрессору. Избыточное давление воздуха в ресивере менялось от $2 \cdot 10^3$ до $4,5 \cdot 10^4 \text{ кг/м}^2$, что соответствовало изменению расчетной скорости на срезе сопла в пределах 400—506 м/сек.

В отдельных опытах избыточное давление достигало $15 \cdot 10^4 \text{ кг/см}^2$. Расчетная скорость потока на срезе сопла в этом случае достигала 587 м/сек.

Опыты проводились по следующей методике.

Струя расплава заданной вязкости (температуры) и диаметра, вытекающая из фильеры в дне сосуда с высоты $(50-100) \cdot 10^{-3}$ м, встречалась на расстоянии $(7-15) \cdot 10^{-3}$ м от среза сопла со свободным горизонтальным потоком воздуха. При таком