

**О НЕКОТОРЫХ НОВЫХ РЕШЕНИЯХ,
ПОЛУЧАЕМЫХ ПРИ ПОМОЩИ ИНВАРИАНТНЫХ
ПРЕОБРАЗОВАНИЙ**

В. А. Сыровой (Москва)

На примере уравнений моноэнергетического нерелятивистского пучка одноименно заряженных частиц показано, как при помощи инвариантных преобразований могут быть получены новые неинвариантные решения (§ 1). Для нестационарных течений определены условия, при которых можно пренебречь силами Лоренца и считать электрическое поле потенциальным. Приведены решения, описывающие прохождение через плоский диод высокочастотного тока, вводимого с эмиттера, в высокочастотном электрическом поле при произвольном соотношении постоянной составляющей потенциала коллектора и амплитуды переменного напряжения на нем (§ 2). Рассмотрены многократные (вектор скорости — многозначная функция) пучки, а также электростатические пучки, описываемые уравнениями Власова (§ 3).

Пусть дана система дифференциальных уравнений (S) для $m \geq 1$ искомых функций u^k ($k = 1, \dots, m$) от $n - m \geq 1$ независимых переменных x^i ($i = 1, \dots, n - m$). Совокупность величин (x, u) рассматривается как набор координат точки n -мерного пространства E_n . Всякое решение этой системы $u = u(x)$ определяет в E_n некоторое многообразие. Всевозможные решения (S) задают в E_n некоторое множество M . Любое инвариантное преобразование системы (S) обладает тем свойством, что оно не выводит из M . Это обстоятельство позволяет в ряде случаев при помощи инвариантных преобразований получать новые решения. При этом на преобразуемые решения не накладываются никаких ограничений. Для заданной системы (S) все преобразования, сохраняющие (S) и образующие непрерывную группу, могут быть получены по методу, разработанному Л. В. Овсянниковым [1-3]. Заметим, что новые решения возникают лишь в том случае, когда основная группа G системы (S) допускает не только элементарные преобразования: усиления, повороты и трансляции оказываются, как правило, бесполезными¹.

Ниже в качестве примера рассматриваются решения уравнений моноэнергетического нерелятивистского пучка одноименно заряженных частиц [6-8].

§ 1. Примеры новых неинвариантных решений. В [8] показано, что, кроме ряда элементарных преобразований, уравнения нестационарного пучка при отсутствии внешнего магнитного поля допускают следующие независимые преобразования:

$$\begin{aligned} t' &= t, & x' &= x + \alpha f(t), & y' &= y, & z' &= z, & u' &= u + \alpha f'(t), & v' &= v, & w' &= w \\ & & & & \varphi' &= \varphi + \alpha f''(t)x, & & & \rho' &= \rho \\ t' &= t, & x' &= x, & y' &= y + \beta g(t), & z' &= z, & u' &= u, & v' &= v + \beta g'(t), & w' &= w \\ & & & & \varphi' &= \varphi + \beta g''(t)y, & & & \rho' &= \rho \\ t' &= t, & x' &= x, & y' &= y, & z' &= z + \gamma h(t), & u' &= u, & v' &= v, & w' &= w + \gamma h'(t) \\ & & & & \varphi' &= \varphi + \gamma h''(t)z, & & & \rho' &= \rho \end{aligned} \quad (1.1)$$

¹ Так, например, новые решения уравнений движения сжимаемой невязкой жидкости, полученные А. А. Никольским [4-5], связаны с наличием дискретной группы преобразований

$$\begin{array}{lllll} t' = -1/t, & \mathbf{r} = \mathbf{r}/t, & \mathbf{V}' = t\mathbf{V} - \mathbf{r}, & \rho' = t^3\rho, & p' = t^3p \\ t' = -1/t, & \mathbf{r} = -\mathbf{r}/t, & \mathbf{V}' = -t\mathbf{V} + \mathbf{r}, & \rho' = -t^3\rho, & p' = -t^3p \\ t' = t & \mathbf{r} = -\mathbf{r}, & \mathbf{V}' = -\mathbf{V}, & \rho' = -\rho, & p' = -p \\ t' = t & \mathbf{r} = \mathbf{r}, & \mathbf{V}' = \mathbf{V}, & \rho' = \rho, & p' = p \\ & \mathbf{r} = \{x, y, z\}, & \mathbf{V} = \{u, v, w\}, & \kappa = 5/3 & \end{array}$$

образованной элементами непрерывной группы, найденной в [8].

Здесь t — время, x, y, z — декартовы координаты, u, v, w — компоненты скорости в этих координатах, φ — скалярный потенциал, ρ — плотность пространственного заряда, f, g, h — произвольные функции от времени, α, β, γ — параметры непрерывных групп преобразований; рассмотрение ведется в безразмерных переменных, принятых в [6-8].

Преобразования (1.1) можно представить в виде одной формулы

$$\begin{aligned} t' &= t, & x' &= x + f(t), & y' &= y + g(t), & z' &= z + h(t) \\ u' &= u + f'(t), & v' &= v + g'(t), & w' &= w + h'(t) \\ \varphi' &= \varphi + f''(t)x + g''(t)y + h''(t)z, & \rho' &= \rho \end{aligned} \quad (1.2)$$

В [6, 7] показано, что все известные решения уравнений стационарного пучка являются инвариантными решениями, за исключением нескольких решений, не удовлетворяющих условиям термоэмиссии [9-14]. Из пяти этих неинвариантных решений три являются электростатическими [9-11]. Система уравнений регулярного [15] пучка может быть сведена к одному нелинейному дифференциальному уравнению четвертого порядка относительно W — действия, отнесенного к массе частицы [16].

1°. В [9] описано плоское течение по гиперболическим траекториям с постоянной плотностью пространственного заряда

$$u = ax, \quad v = -ay, \quad \varphi = \frac{1}{2}a^2R^2, \quad \rho = 2a^2, \quad W = \frac{1}{2}a(x^2 - y^2) \quad (1.3)$$

$$u = ay, \quad v = bx, \quad \varphi = \frac{1}{2}abR^2, \quad \rho = 2ab \quad (R^2 = x^2 + y^2) \quad (1.4)$$

Первое из этих течений будет регулярным. Пользуясь преобразованием (1.2), получим нестационарное решение, соответствующее (1.3)

$$\begin{aligned} u &= a[x + f(t)] - f'(t), & v &= -a[y + g(t)] - g'(t), & \rho &= 2a^2 \\ \varphi &= \frac{1}{2}a^2R^2 + (a^2f - f'')x + (a^2g - g'')y \end{aligned} \quad (1.5)$$

В начальный момент времени $t = 0$ при $x_0(0) = y_0(0) = 0$ эквипотенциальными кривыми будут окружности $R = \text{const}$. В дальнейшем это семейство кривых перемещается по закону

$$x_0 = \frac{1}{4}a^2(f'' - a^2f), \quad y_0 = \frac{1}{4}a^2(g'' - a^2g)$$

Здесь x_0, y_0 — координаты центра семейства окружностей. В силу произвольности функций $f(t)$ и $g(t)$ траектории частиц также могут быть произвольными. Видно, что $x_0 = x_0(t) \equiv 0, y_0 = y_0(t) \equiv 0$, если

$$\begin{aligned} f(t) &= \alpha \operatorname{ch} at + \beta \operatorname{sh} at, & g(t) &= \gamma \operatorname{ch} at + \delta \operatorname{sh} at \\ (\alpha, \beta, \gamma, \delta & \text{ — произвольные постоянные}) \end{aligned}$$

Траектории частиц в этом случае определяются выражениями

$$x = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)e^{-at} + Ae^{at}, \quad y = -\frac{1}{2}(\gamma + \delta)e^{at} + Be^{-at} \quad (A, B = \text{const})$$

Интересно, что решение (1.3) инвариантно относительно преобразования (1.2), если $f \sim e^{at}, g \sim e^{-at}$.

Функции $f(t)$ и $g(t)$ можно выбрать таким образом, что набор кривых $\varphi = \text{const}$ с центром в x_0, y_0 будет совершать финитное движение. Так, при $u = x + \sin t, v = -y + \sin t$ центр x_0, y_0 перемещается по окружности $x_0^2 + y_0^2 = \frac{1}{8}$ с постоянной скоростью, а траектории будут монотонными кривыми

$$x = -\frac{1}{2}(\sin t + \cos t) + Ae^t, \quad y = \frac{1}{2}(\sin t - \cos t) + Be^{-t}$$

Аналогичные результаты легко получить и для (1.4), а также для решения, обобщающего (1.3) на пространственный случай [10].

2°. Плоское периодическое течение, исследованное в [11], определяется формулами

$$W = \operatorname{Re}(-2ia \ln \operatorname{sc} z) = 2a \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\operatorname{tg} x \operatorname{th} y), \quad \cos 2x + \operatorname{ch} 2y = \operatorname{const}$$

$$\varphi = \varphi_0 \frac{\operatorname{ch} 2y - \cos 2x}{\operatorname{ch} 2y + \cos 2x}, \quad \rho = \frac{16\varphi_0}{(\operatorname{ch} 2y + \cos 2x)^2} \quad (\varphi_0 = \operatorname{const}) \quad (1.6)$$

Второе уравнение в (1.6) суть уравнение траекторий.

Заметим прежде всего, что, кроме (1.6), имеет место аналогичное стационарное решение с произвольным периодом. Оно может быть получено из (1.6) преобразованием растяжения с инфинитезимальным оператором

$$X = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} - 2\rho \frac{\partial}{\partial \rho}$$

и задается выражениями

(1.7)

$$\varphi = \varphi_0 \frac{\operatorname{ch} \alpha y - \cos \alpha x}{\operatorname{ch} \alpha y + \cos \alpha x}, \quad \rho = \frac{4\alpha^2 \varphi_0}{(\operatorname{ch} \alpha y + \cos \alpha x)^2}, \quad \cos \alpha x + \operatorname{ch} \alpha y = \operatorname{const}$$

Применяя к (1.7) преобразование (1.2), имеем

$$\begin{aligned} u &= \frac{2a \operatorname{sh}[\alpha y + g(t)]}{\operatorname{ch}[\alpha y + g(t)] + \cos[\alpha x + f(t)]} - \frac{1}{\alpha} f'(t) \\ v &= \frac{2a \sin[\alpha x + f(t)]}{\operatorname{ch}[\alpha y + g(t)] + \cos[\alpha x + f(t)]} - \frac{1}{\alpha} g'(t) \\ \varphi &= \varphi_0 \frac{\operatorname{ch}[\alpha y + g(t)] - \cos[\alpha x + f(t)]}{\operatorname{ch}[\alpha y + g(t)] + \cos[\alpha x + f(t)]} - \frac{1}{\alpha} [f''(t)x + g''(t)y] \end{aligned}$$

Выбирая в качестве $f(t)$ и $g(t)$ периодические функции, получим решение, периодическое не только в пространстве, но и во времени.

§ 2. Нестационарные процессы в плоском диоде. В работах [6, 7] построены все существенно различные инвариантные решения уравнений стационарного пучка. Каждое из этих решений при $H = 0$ может быть подвергнуто преобразованию (1.2). В результате возникнет нестационарный образ соответствующего стационарного течения. Следует отметить, что полученные таким образом решения, подобные H -решениям уравнений стационарного пучка, не подобны каким-либо из нестационарных инвариантных решений, построенных в [8], т. е. не могут быть получены из них при помощи преобразований основной группы G_t уравнений нестационарного пучка. Поэтому при исследовании нестационарных потоков рассмотрение таких решений представляет интерес. При этом особенно простую интерпретацию допускают решения, соответствующие одномерным течениям между параллельными плоскостями [17-20].

Остановимся подробнее на решении, получающемся при преобразовании (1.2) из решения Чайлда — Лэнгмюра [17, 18], описывающего плоский диод в режиме полного пространственного заряда. Введем безразмерные переменные $t^\circ, x^\circ, u^\circ, \varphi^\circ, \rho^\circ, j^\circ$ по формулам

$$\begin{aligned} t &= \left(\frac{a^2}{18\pi\eta j_0}\right)^{1/3} t^\circ, & \varphi &= \left(\frac{9\pi j_0 a^2}{\sqrt{2}\eta}\right)^{2/3} \varphi^\circ, & \rho &= \left(\frac{j_0^2}{18\pi\eta a^2}\right)^{1/3} \rho^\circ \\ x &= ax^\circ, & u &= (18\pi\eta j_0 a^2)^{1/3} u^\circ, & j &= j_0 j^\circ \quad (\eta = |e|/m) \end{aligned} \quad (2.1)$$

В качестве характерных величин выбраны значения, определяющие решение Чайлда — Лэнгмюра: a — межэлектродное расстояние, j_0 — плотность тока эмиссии; потенциал относится к потенциалу коллектора, обеспечивающего ток j_0 при расстоянии a между электродами и т. д.

В этих переменных решение Чайлда — Лэнгмюра имеет вид

$$\varphi^\circ = (x^\circ)^{1/3}, \quad u^\circ = (x^\circ)^{2/3}, \quad \rho^\circ = (x^\circ)^{-2/3}, \quad j^\circ = 1 \quad (2.2)$$

Опуская символ безразмерной величины и применяя к (2.2) преобразование (1.2), имеем

$$\begin{aligned} u &= [x + f(t)]^{3/2} - f'(t), & \varphi &= [x + f(t)]^{4/3} - f''(t)x - [f(t)]^{4/3} \\ \rho &= [x + f(t)]^{-2/3}, & j &= 1 - f'(t)[x + f(t)]^{-2/3} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Полученное решение (2.3) описывает некоторые процессы в плоском диоде $0 \leq x \leq 1$. Выбором функции $f(t)$ можно добиться того, чтобы потенциал коллектора

$$\varphi_2 = (1 + f)^{4/3} - f^{4/3} - f'' \quad (2.4)$$

был периодической функцией от времени (индексы 1 и 2 относятся к эмиттеру и коллектору соответственно). Следует отметить, что $f(t)$ произвольна с точностью до справедливости исходных уравнений [8]. Имея в виду рассмотреть быстро осциллирующие решения вида (2.3), получим оценки, определяющие область применимости уравнений нестационарного пучка, принятых в [8].

Пусть электрическое поле на коллекторе плоского диода определяется выражением

$$E_x(a) = E_0 + A \sin \omega t$$

Характерное значение плотности пространственного заряда ρ_* найдем из уравнения

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \rho_* = (E_0 + A) / 4\pi a$$

Если учесть, что в рассматриваемом случае токи смещения играют не меньшую роль, чем конвекционные токи, и что цель состоит в получении условий, при которых течение близко к одномерному, то еще одно уравнение Максвелла позволяет определить характерное значение напряженности магнитного поля H_*

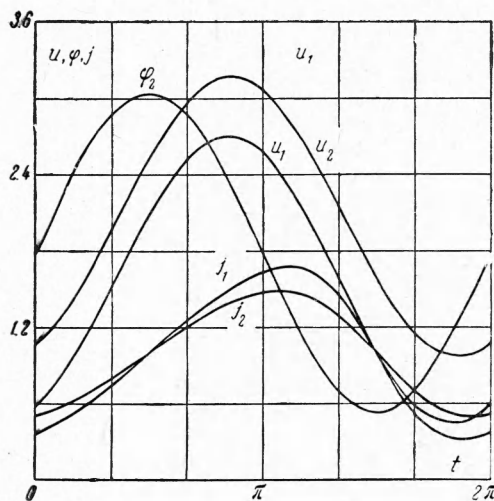
$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \rho \mathbf{V}, \quad H_* = \frac{\omega b}{c} A - (E_0 + A) \frac{V_* b}{c a}$$

Здесь b — размер пучка в поперечном направлении. Уравнения движения заряженной частицы

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \eta \mathbf{E} + \frac{\eta}{c} \mathbf{V} \times \mathbf{H}$$

дают возможность установить условия, при которых силами Лоренца можно пренебречь по сравнению с силами электрического поля

$$\frac{\omega b V_*}{c^2} A \ll E_0 + A, \quad \left(\frac{V_*}{c}\right)^2 \frac{b}{a} \ll 1$$

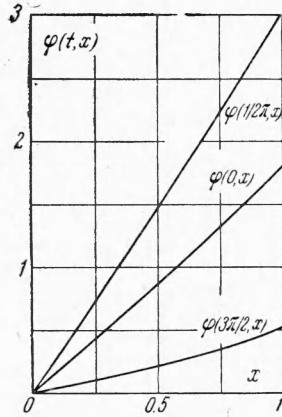


Фиг. 1

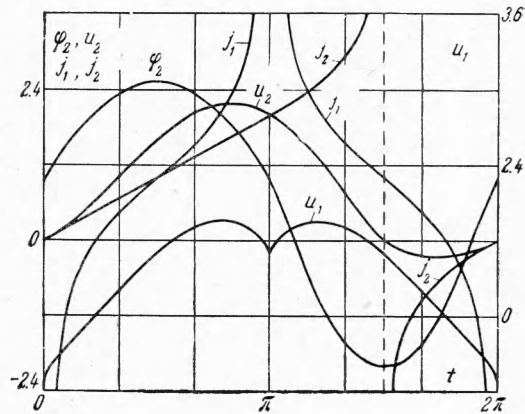
Отсюда получаем ограничения на частоту ω и относительные размеры пучка b/a

$$\omega \ll \frac{c^2}{bV_*} \left(\frac{E_0}{A} + 1 \right), \quad \frac{b}{a} \ll \left(\frac{c}{V_*} \right)^2 \quad (2.5)$$

Второе условие (2.5) с точностью до постоянного множителя, не существенного при оценках по порядку, совпадает с условием, установленным в [21, 22] для стационарных нерелятивистских течений.



Фиг. 2



Фиг. 3

Для пучка электронов при $b \sim 1$ см, $V_* \sim 10^9$ см/сек, $E_0 \sim A$, $j_0 \sim 10$ ма/см² получаем, что частота и продольные размеры должны удовлетворять неравенствам

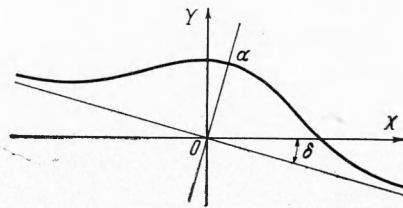
$$\omega \ll 10^{12} \text{ гц}, \quad a \gg 10^{-3} \text{ см}$$

В безразмерных переменных (3.1) имеем $\omega^\circ \ll 10^3$. Безразмерная частота $\omega^\circ \sim 1$ соответствует $\omega \sim 10^9$ гц.

Таким образом, при выполнении неравенств (2.5) можно считать, что $\mathbf{E} = -\nabla\phi$.

На фиг. 1 показано, как u, ϕ, j меняются со временем при $f = 2 + \sin t$ на эмиттере и коллекторе ($\omega^\circ = 1$). Функция (2.4) в этом случае аппроксимируется выражением

$\phi_a = 1.24 \sin t + 1.8$. В первом полупериоде ϕ_a и (2.4) практически совпадают; во втором полупериоде максимальное отличие по амплитуде составляет не более 3%. Разумеется, при $\phi_2 = a \sin t + \beta$ и любом заданном $\phi_2(t)$ задача может быть решена точно, но для этого необходимо численно проинтегрировать уравнение (2.4) или более сложное уравнение, если исходить из стационарного решения с произвольными условиями на эмиттере [19, 20]. На фиг. 2 изображено распределение потенциала в некоторые фиксированные моменты времени. При $f = \sin t$ попеременно эмиттируют



Фиг. 4

то левая, то правая плоскости (фиг. 3). На концах и в середине интервала $0 \leq t \leq 2\pi$ в бесконечность обращается $\partial u_1 / \partial t$, а не полная производная скорости. Обращение в некоторые моменты времени плотности конвекционного тока в бесконечность не портит решения, так как ток с конечной поверхности за конечный интервал времени остается конечным

$$J = \int_0^t j d\xi = \int_0^t [1 - \cos \xi (x + \sin \xi)^{-3/2}] d\xi = t + 3 [x^{1/2} - (x + \sin t)^{1/2}]$$

Решение вида (2.3) может описывать колебательные режимы в плоском диоде с неоднородным распределением пространственного заряда, которых не удалось получить при построении инвариантных нестационарных течений [8].

Заметим, что известно аналитическое решение задачи о поведении отдельного электрона в высокочастотном поле [23]. В [24] численно проинтегрированы уравнения высокочастотного диода в режиме полного пространственного заряда.

Без труда могут быть выписаны нестационарные аналитические решения, соответствующие кольцевым электростатическим пучкам [25, 26]. Они, однако, не допускают столь простой интерпретации, как рассмотренные выше течения. Так, например, для образа [26]

$$\varphi = 1/2 [(x+f)^2 + (y+g)^2]^{-1} - [f''(x+f) + g''(y+g)]$$

нулевая эквипотенциаль в начальный момент времени при $f(0) = f''(0) = g(0) = g''(0) = 0$ будет окружностью бесконечно большого радиуса, а в дальнейшем в неинерциальной системе отсчета $X = x + f(t)$, $Y = y + g(t)$ имеет вид, приведенный на фиг. 4, и определяется формулами

$$R = \alpha [\csc(\psi + \delta)]^{1/3}, \quad \alpha = [4(f''^2 + g''^2)]^{-1/6}, \quad \operatorname{tg} \delta = f''/g''$$

Здесь R, ψ — полярные координаты в системе X, Y . Движение эквипотенциальных поверхностей сопровождается их деформацией.

§ 3. Многоскоростные пучки и пучки, определяемые уравнениями Власова. Выше рассматривались решения с однозначным вектором скорости V . Многоскоростной пучок заряженных частиц с одним и тем же значением и знаком удельного заряда η , для которого V будет s -значной функцией, образован конечным числом s элементарных моноэнергетических пучков. Поэтому он описывается системой уравнений моноэнергетического пучка [6-8] с той только разницей, что уравнение сохранения тока и граничные условия должны быть выписаны для каждого из s пучков, а под плотностью пространственного заряда ρ при определении потенциала следует понимать $\sum \rho_{(s)}$, где $\rho_{(s)}$ — плотность s -го элементарного пучка.

Из сказанного следует, что уравнения многоскоростного пучка допускают преобразования (1.2). Пользуясь ими, можно поставить в соответствие любому многоскоростному стационарному решению некий нестационарный образ.

Известно [19], что в плоском диоде при эмиссии с обеих электродов (плотности токов j_1, j_2 соответственно) и в том случае, когда скорость двузначна лишь по направлению, возможны те же режимы, что и при эмиссии с одной плоскости с плотностью тока $j_0 = j_1 + j_2$. Поэтому не составляет труда построить нестационарное решение с высокочастотными токами, вводимыми с обеих плоскостей, и соответствующее (2.3). В общем случае, когда скорость двузначна и по величине, и по направлению, решение уравнений пучка выражается через эллиптические интегралы. Нестационарное решение может быть построено и в этом случае.

Преобразования вида (1.2) сохраняют уравнения многоскоростного пучка при любом, сколь угодно большом числе s элементарных моноэнергетических пучков. Естественно ожидать, что это свойство сохранится и при $s \rightarrow \infty$, т. е. при переходе к описанию посредством функции распределения $F(r, V)$. Нетрудно убедиться, что при отсутствии магнитного поля преобразования (1.2) оставляют уравнения Власова инвариантными. При помощи этих преобразований можно указать, например, нестационарное решение с функцией распределения на эмиттере, определяемой выражением

$$F_1 = F_0 \exp \left\{ -\frac{m [u_1 - f'(t)]^2}{2kT_1} \right\} \quad (F_0 = \text{const})$$

которое соответствует решению для плоского диода [27-30] с максвелловским распределением скоростей эмиттируемых частиц $F_1 = F_0 \exp(-mu_1^2 / 2kT_1)$.

Поступила 5 III 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В. Группы и инвариантно-групповые решения дифференциальных уравнений. Докл. АН СССР, 1958, т. 118, № 3.
2. Овсянников Л. В. Групповые свойства уравнения нелинейной теплопроводности. Докл. АН СССР, 1959, т. 125, № 3.
3. Овсянников Л. В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Изд. СО АН СССР, Новосибирск, 1962.

4. Н и к о л ь с к и й А. А. Инвариантное преобразование уравнений движения идеального одноатомного газа и новые классы их точных решений. ПММ, 1963, т. 27, вып. 3.
5. Н и к о л ь с к и й А. А. Инвариантные преобразования уравнений движения идеального газа для специальных случаев. Инж. ж., 1963, т. 3, № 1.
6. С ы р о в о й В. А. Ивариантно-групповые решения уравнений плоского стационарного пучка заряженных частиц. ПМТФ, 1962, № 4.
7. С ы р о в о й В. А. Инвариантно-групповые решения уравнений пространственного стационарного пучка заряженных частиц. ПМТФ, 1963, № 3.
8. С ы р о в о й В. А. Ивариантно-групповые решения уравнений нестационарного пучка заряженных частиц. ПМТФ, 1964, № 1.
9. M e l t z e r B. Electron Flow in Curved Paths Under Space-Charge Conditions. Proc. Phys. Soc. B, 1949, vol. 62, No. 355.
10. M e l t z e r B. Electron Flow in Curved Paths Under Space-Charge Conditions. Proc. Phys. Soc. B, 1949, vol. 62, No. 360.
11. K i r s t e i n P. T. The Complex Formulation of the Equations of Two-Dimensional Space-Charge Flow. J. Electr. Contr., 1958, vol. 4, No. 5.
12. K e n t G. Generalized Brillouin Flow. Communic. Electr., 1960, vol. 79, No. 48.
13. W a l k e r L. R. Generalization of Brillouin Flow. J. Appl. Phys., 1955, vol. 26, No. 6.
14. P ö s c h l K., V e i t h W. Generalized Brillouin Flow. J. Appl. Phys., 1962, vol. 33, No. 3.
15. G a b o r D. Dynamics of Electron Beams. Proc. IRE, 1945, vol. 33, No. 11.
16. S p a n g e n b e r g K. Use of the Action Function to Obtain the General Differential Equations of Space Charge Flow in More Than One Dimension. J. Franklin Inst., 1941, vol. 232, No. 4.
17. C h i l d C. D. Discharge from Hot CaO. Phys. Rev., 1911, vol. 32, No. 5.
18. L a n g m u i r I. The Effect of Space Charge and Residual Gases on Thermionic Currents in High Vacuum. Phys. Rev., 1913, vol. 2, No. 5.
19. F a y C. E., S a m u e l A. L., S h o c k l e y W. On the Theory of Space Charge Between Parallel Plane Electrodes. Bell. System Techn. J., 1938, vol. 17, No. 1.
20. I v e y H. F. Cathode Field in Diodes under Partial Space-Charge Conditions. Phys. Rev., 1949, vol. 76, No. 4.
21. M e l t z e r B. Magnetic Constriction in Simple Diodes. Nature, 1958, vol. 181, No. 4619.
22. M e l t z e r B. Magnetic Forces and Relativistic Speeds in Stationary Electron Beams. J. Electr. Contr., 1958, vol. 4, No. 4.
23. S a c k i n g e r W. Electron Streams in an Oscillating Electric Field. J. Appl. Phys., 1962, vol. 33, No. 5.
24. H i n k e l K. W. Über den raumladungsbegrenzten Influenzstrom in einer ebenen Diode bei grossen Signalen und langen Elektronenlaufzeitwinkeln unter Berücksichtigung von Sekundäremission der Elektronen. Microwaves. Proc. 4th Int. Congr. Microwave Tubes. Centr. Publ Comp., Eindhoven, 1963.
25. M e l t z e r B. Single-Component Stationary Electron Flow Under Space Charge Conditions. J. Electr., 1956, vol. 2, No. 2.
26. M u e l l e r W. M. Necessary and Sufficient Trajectory Conditions for Dense Electron Beams. J. Electr. Contr., 1959, vol. 5, No. 6.
27. L a n g m u i r I. The Effect of Space-Charge and Initial Velocities on the Potential Distribution between Parallel Plane Electrodes. Phys. Rev., 1923, vol. 21, No. 4.
28. R e y n o l d s F. H. The Potential Distribution and Thermionic Current Between Parallel Plane Emitters. Proc. IRE, 1961, vol. 108, No. 13, part C.
29. L i n d s a y P. A., P a r k e r F. W. Potential Distribution between two Plane Emitting Electrodes. J. Electr. Contr., 1959, vol. 7, No. 4.
30. L i n d s a y P. A., P a r k e r F. W. Potential Distribution between two Plane Emitting Electrodes II. Thermionic Engines. J. Electr. Contr., 1960, vol. 9, No. 2.