

3. Розенберг М. Д., Кундин С. А. Многофазная многокомпонентная фильтрация при добыче нефти и газа. — М.: Недра, 1976.
4. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. — М.: Недра, 1984.
5. Николаевский В. Н. Волновые воздействия на нефтяные пласты // Нефтегазовая гидромеханика/Сб. науч. тр. МИНГ им. И. М. Губкина. — М., 1991. — № 228.

г. Тюмень

Поступила 17/XII 1991 г.,
в окончательном варианте — 21/V 1992 г.

УДК 533.6.011.6:532.529.5

А. Л. Левин

О ТЕПЛООБМЕНЕ ВБЛИЗИ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ ТЕЛА, ОБТЕКАЕМОГО СВЕРХЗВУКОВОЙ ДВУХФАЗНОЙ СТРУЕЙ

Тупое тело в сверхзвуковой двухфазной струе, состоящей из газа и твердых крупных частиц, интенсивно нагревается под действием их ударов и конвективного теплообмена, который может быть в несколько раз больше конвективного теплообмена в такой же струе без частиц [1, 2].

В настоящей работе в соответствии с экспериментальными и теоретическими результатами [1—6] предлагаются соотношения, позволяющие рассчитывать конвективные тепловые потоки в критической точке и их распределение вдоль поверхности тела, обтекаемого сверхзвуковой двухфазной струей с твердыми крупными частицами. Теплообмен в сверхзвуковой струе с мелкими частицами был рассмотрен в [7].

1. Следует остановиться на возможных механизмах увеличения конвективного теплообмена между тупым телом и обтекающей его сверхзвуковой двухфазной струей. Интересно рассмотреть влияние на конвективный теплообмен жидкого конуса, образующегося из отскочившей от тела частицы и сопровождающего ее вихря, вышедших из ударного слоя около тела в сверхзвуковую область течения вблизи критической линии тока. На таком жидком конусе возникает коническая ударная волна [8].

В этом случае на конвективный теплообмен может повлиять взаимодействие ударных волн около тела и на жидком конусе. Согласно [9], тепловой поток к телу в области столкновения ударных волн изменяется пропорционально корню квадратному из давления. В критической точке тела эффект соударения этих волн оказывает слабое влияние на теплообмен в силу небольшого изменения давления, которое, например, по экспериментам [8] даже уменьшается на ~ 30 % по сравнению со случаем обтекания струей без частиц. Влияние жидкого конуса на теплообмен ослабляется еще тем, что время существования такого конуса значительно меньше времени взаимодействия двухфазной струи с телом и составляет 10—20 % от последнего по измерениям [1].

По аналогии с экспериментами на тупых телах с иглой [10] жидкий конус, образующийся обычно вблизи критической линии тока, должен сместить максимум теплового потока с критической точки на боковую поверхность тела и уменьшить тепловой поток к критической точке по сравнению с обтеканием тела такой же сверхзвуковой струей без частиц. Однако этих эффектов, согласно экспериментам [1, 2], не наблюдается. Таким образом, влиянием жидких конусов на конвективный теплообмен следует пренебречь.

В настоящей работе предлагается следующее объяснение повышенного конвективного теплообмена при обтекании тела сверхзвуковой двухфазной струей. Частицы или их осколки, отскочившие вверх по течению от тела,

достигают его ударной волны, которую пересекает, как показано выше, малое количество частиц, образуя жидкие конусы. Значительно большая часть отскочивших частиц только достигает ударной волны, но из-за резкого увеличения силы сопротивления в свободной сверхзвуковой струе лишь слегка деформирует волну, рождая тороидальные вихри [8]. Эти вихри движутся по линиям тока газа к телу и турбулизируют пограничный слой вблизи критической точки тела, включая эту точку, подобно тому, как это делает сверхзвуковая турбулентная на бесконечности струя без частиц, обтекающая тело [3, 6].

Для тепловых расчетов используются газовые параметры на внешней границе пограничного слоя такие же, как при отсутствии частиц, так как, согласно [2], воздействием крупных частиц на газ можно пренебречь. Линии тока газа и частиц на бесконечности полагаются параллельными.

Частица будет называться крупной при выполнении условия

$$(1.1) \quad D_p \geq 3c_D \rho v \Delta^2 / (8\rho_s u_{p\infty} \delta_1),$$

которое показывает, что частица отклоняется от своего первоначального направления не более чем на величину δ_1 после прохождения слоя толщины Δ . Здесь ρ и v — плотность и скорость газа в этом слое, перпендикулярная скорости $u_{p\infty}$ частицы на бесконечности; δ_1 — критериальная величина отклонения крупной частицы, принятая равной Δ ; D_p , ρ_s , c_D — диаметр, плотность материала и коэффициент сопротивления частицы. Неравенство (1.1) получено из уравнения движения частицы для постоянных величин ρ , v , c_D и условия $u_{p\infty} \gg v$.

В ударном слое сферы вблизи оси симметрии течения, согласно [11], справедливо соотношение

$$(1.2) \quad v/u_\infty = 0,4k (\delta + 2\delta_0)/\Delta,$$

где поперечная оси скорость v усреднена на длине δ отклонения частицы в ударном слое толщиной Δ ; δ_0 — расстояние частицы до оси симметрии на бесконечности; u_∞ — скорость газа на бесконечности; $k = \rho_\infty/\rho$ (ρ_∞ , ρ — плотности газа до и за прямой ударной волной). С учетом (1.2) и равенства $u_{p\infty} = u_\infty$ выражение (1.1) принимает вид

$$(1.3) \quad D_p \geq 0,15 (\delta_1 + 2\delta_0) c_D \rho_\infty \Delta / (\rho_s \delta_1)$$

при том же условии $\delta_1 = \Delta$, причем для оценок (1.1), (1.3) можно использовать соотношение $c_D = 1$, справедливое для частицы, движущейся в газе со сверхзвуковой скоростью.

2. В силу того что теплообмен в турбулентном пограничном слое не зависит от механизма возникновения вне погранслоя возмущений, падающих на его внешнюю границу и поддерживающих в нем турбулентный режим, здесь для объяснения теплообмена между телом и обтекающей его сверхзвуковой двухфазной струей используются результаты работ [3, 6], в которых рассматривается теплообмен при обтекании тела сверхзвуковой турбулентной на бесконечности струей.

В [3] теоретически показано, что тепловой поток к критической точке плоского ($v = 0$) или осесимметричного ($v = 1$) тела, обтекаемого сверхзвуковой возмущенной струей, возрастает с увеличением в ней безразмерной энергии турбулентности Q , имеющей вид

$$(2.1) \quad Q = I^2 Q_1;$$

$$(2.2) \quad Q_1 = \frac{1,5 \cdot \rho_0 u_\infty^2}{1 + v \mu_0 (du/dl)_0},$$

где $I^2 = (u'/u_\infty)^2$; u' — интенсивность турбулентности и пульсация скорости на внешней границе пограничного слоя; Q_1 — безразмерная энергия турбулентности при $I^2 = 1$; ρ_0 , μ_0 , ρ'_0 , l_0 , $(du/dl)_0$ — плотность, вязкость, давление, полная энтальпия и градиент скорости в критической точке тела.

$Q \cdot 10^{-3}$	H из [3]	H из (2.3)
0,1	1,11	1
0,275	1,21	1
0,50	1,38	1,19
1	1,59	1,47
2	1,88	1,81
4	2,25	2,23
6	2,53	2,52
8	2,74	2,74
10	2,93	2,93

Предложенную в [3] теоретическую зависимость относительного теплообмена $H = \alpha_p^0 / \alpha_i^0$ в критической точке от параметра Q из (2.1) предлагается описывать приближенным выражением

$$(2.3) \quad H = \begin{cases} 1, & Q \leq 275, \\ 0,185Q^{0,3}, & Q > 275, \end{cases}$$

близким аппроксимациям, используемым в [4, 5]. Здесь α_p^0 , α_i^0 — конвективные коэффициенты теплообмена

на в критической точке тела, обтекаемого сверхзвуковой струей с частицами и без них для одних и тех же параметров газа на бесконечности. Согласно [6], α_i^0 записывается в виде

$$(2.4) \quad \alpha_i^0 = 0,517 (1 + \nu)^{0,5} \text{Pr}^{-2/3} (\rho_0^* \mu_0^*)^{0,5} (\partial u / \partial l)_0^{0,5},$$

$$\rho_0^* = \rho(p_0', i_0^*), \quad \mu_0^* = \mu(p_0', i_0^*), \quad i_0^* = 0,5(i_0 + i_{w0}),$$

где i_{w0} , i_0^* — энтальпия при температуре стенки и эффективная энтальпия по Эккерту в критической точке; l — длина дуги вдоль контура тела с началом в критической точке; Pr — число Прандтля. Выражение (2.4) хорошо совпадает с формулой Фэя и Ридделла [12].

Сравнение результатов [3] с расчетами по (2.3) приведено в таблице, из которой видно, что точность аппроксимации увеличивается с возрастанием параметра Q .

Следует отметить, что, согласно [3], величина H слабо зависит от температурного фактора i_{w0}/i_0 : ее изменение в диапазоне $0,1 \leq i_{w0}/i_0 \leq 0,9$ не превышает 6 % по отношению к H для параметра $i_{w0}/i_0 = 0,5$, который использован при составлении таблицы.

Для расчета тепловых потоков по формулам (2.1), (2.3) необходимо определить интенсивность турбулентности I^2 . В [4, 5] приводятся для нее аппроксимационные выражения, применимые для обтекания сфер сверхзвуковой запыленной струей. Однако можно предложить для интенсивности I^2 более общее выражение, применимое для сфер и торцов, если воспользоваться соотношением для коэффициента теплообмена в критической точке из [1], которое получено с точностью до 25 % по среднеквадратичному отклонению из статистической обработки большого числа экспериментов по теплообмену на сферах и торцах, обтекаемых сверхзвуковыми запыленными струями:

$$(2.5) \quad H = \alpha_p^0 / \alpha_i^0 = \begin{cases} 1, & \chi \leq \chi_0, \\ 0,098 (\rho_\infty u_\infty / \alpha_i^0) (\text{th } \chi)^{0,317}, & \chi > \chi_0; \end{cases}$$

$$(2.6) \quad \chi = \rho_{p\infty} u_{p\infty} (1 + G) / (\rho_\infty u_\infty), \quad \chi_0 = (0,15k \text{Pr}^{2/3} Q_1^{0,5})^{-3,155}.$$

Здесь χ — параметр, характеризующий концентрацию пыли в струе; ρ_∞ , $\rho_{p\infty}$ — плотности газа и частиц на бесконечности; $G = G_{er} / (\rho_{p\infty} u_{p\infty})$, G_{er} — относительный и абсолютный эрозионные уносы материала с единицы поверхности тела вблизи его критической точки; Q_1 вычисляется по (2.2). Согласно [13], унос материала G определяется в виде

$$G = 0,5 u_{p\infty}^2 / H_{er},$$

где H_{er} — эрозионная энтальпия, равная кинетической энергии нормально ударяющихся о поверхность тела частиц, необходимой для эрозионного уноса единицы массы материала с поверхности тела. Величина H_{er} получается из эксперимента (например, для графита $H_{er} = 300$ кДж/кг).

Выражение (2.5) отличается от [1] заменой χ на $\text{th } \chi$, которая при малой запыленности струи ($\chi \ll 1$) не влияет на результат ($\text{th } \chi = \chi$), а при большой накладывает разумное ограничение на коэффициент теплообмена. Шероховатостью в (2.5) пренебрегается, так как ее влияние на теплообмен не

выходит за пределы указанной ошибки согласно приведенным ниже выражениям (3.3).

Из равенства (2.3) и (2.5) при $H > 1$ для интенсивности турбулентности получается выражение

$$(2.7) \quad I^2 = (0,34/0,75^{1,67n}) k^{3,33} \text{Pr}^{2,22} Q_1^{0,67} (\text{th } \chi)^{1,06}.$$

При выводе (2.6), (2.7) использовались соотношения

$$(2.8) \quad \rho_0^* = \rho_0/0,75, \quad \mu_0^* = 0,75^n \mu_0$$

при $i_{w0}/i_0 = 0,5$ и вязкости газа в виде $\mu_0 = \mu_0^* (i_0/i_0^*)^n$ (для воздуха $n = 0,7$, для газа постоянной вязкости $n = 0$).

Выражение (2.5) проверено для сфер и торцов при изменении параметров двухфазной струи в диапазонах: $6 \leq M_\infty \leq 10$, $4 \cdot 10^5 \leq \text{Re}_{\infty 1} \leq 6 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$, $750 \leq u_{p\infty} \leq 1700 \text{ м/с}$, $0,05 \leq \rho_{p\infty} u_{p\infty} \leq 0,5 \text{ кг/(м}^2 \cdot \text{с)}$ ($\text{Re}_{\infty 1}$, M_∞ — числа Рейнольдса на единицу длины и Маха для газовой струи на бесконечности).

В вышеописанных формулах используются градиенты скорости в критической точке, которые для сферы и торца, согласно [14, 15], имеют вид

$$(2.9) \quad (\partial u/\partial l)_0 = \sqrt{2k} u_\infty/R_0, \quad (\partial u/\partial l)_0 = 0,44k^{0,66} u_\infty/R_0$$

(R_0 — радиус сферы или торца).

Соотношение (2.3) с учетом (2.1), (2.2), (2.4) и (2.8) преобразуется следующим образом:

$$(2.10) \quad \alpha_j^0 = \begin{cases} \alpha_l^0, & Q \leq 275, \\ \alpha_p^0, & Q > 275; \end{cases}$$

$$(2.11) \quad \alpha_l^0 = 0,517 (1 + \nu)^{0,5} \text{Pr}^{-2/3} \rho_0^* u_1 (\mu_0^* (\partial u/\partial l)_0 / (\rho_0^* u_1^2))^{0,5};$$

$$(2.12) \quad \alpha_p^0 = 0,0934 (I/k)^{0,6} (1 + \nu)^{0,2} \text{Pr}^{-2/3} \rho_0^* u_1 (\mu_0^* (\partial u/\partial l)_0 / (\rho_0^* u_1^2))^{0,2}.$$

Здесь u_1 — скорость газа сразу за прямой ударной волной; $j = l, p$. Соотношение (2.11) аналогично (2.4).

Интересно сравнить выражение (2.12) с найденным в [6] коэффициентом теплообмена α^0 в так называемой турбулентной критической точке тела, на которое набегают сверхзвуковая турбулентная струя:

$$(2.13) \quad \alpha^0 = c (\mu_0^*/\mu_0)^{0,6} (1 + \nu)^{0,2} \text{Pr}^{-0,6} \rho_0^* u_1 (\mu_0^* (\partial u/\partial l)_0 / (\rho_0^* u_1^2))^{0,2}$$

(c — коэффициент, определяемый из эксперимента). Выражение (2.13) получено в рамках метода интегральных соотношений с использованием локального закона теплообмена. Выражения (2.12) и (2.13), найденные разными методами, будут эквивалентными, если пренебречь отличием членов $\text{Pr}^{-2/3}$ и $\text{Pr}^{-0,6}$ друг от друга, а коэффициент c с учетом (2.8) представить как $c = 0,105 (I/k)^{0,6}$.

Таким образом, конвективный тепловой поток в критической точке тела при малых значениях Q ($Q \leq 275$) определяется режимом (2.11) ламинарного теплообмена, а при больших ($Q > 275$) — режимом (2.13) турбулентной критической точки (ТКТ).

Интересно, что распределение коэффициентов теплообмена вдоль образующей тела для ламинарного режима ($j = l$) и режима ТКТ ($j = p$) подчиняется согласно [6] закону ламинарного теплообмена и записывается в виде

$$(2.14) \quad \alpha_j/\alpha_j^0 = [2(1 + \nu) \rho_0^* \mu_0^* (\partial u/\partial l)_0]^{-0,5} (\rho^* \mu^* u/x_j)^{0,5},$$

$$x_j = \int_0^x L_j dx / L_j, \quad j = l, p,$$

$$L_l = \rho^* u \mu^* R^{2\nu} (i_l - i_w)^2, \quad L_p = \rho^* u \mu^* R^{2\nu} (i_l - i_w)^{1,25} (i_0 - i_w)^{0,75},$$

$$\rho^* = \rho(p, i_l^*), \quad \mu^* = \mu(p, i_l^*),$$

$$i_l^* = 0,5(i_l + i_w) + 0,22(i_l - i_w), \quad i_l = i + 0,5\sqrt{\text{Pr}} u^2,$$

$$q_l = \alpha_l(i_l - i_w), \quad q_p = \alpha_p(i_l - i_w)^{0,625} (i_0 - i_w)^{0,375},$$

где x — координата вдоль образующей тела с началом в критической точке; u, i, p — скорость, энтальпия и давление на внешней границе пограничного слоя; i_l^*, i_t — определяющая энтальпия по Эккерту и энтальпия восстановления; R — радиус тела; q_l, q_p — тепловые потоки.

Как видно из (2.14), распределения α_l/α_l^0 и α_p/α_p^0 близки друг к другу, хотя величины α_l^0 и α_p^0 могут отличаться между собой в несколько раз согласно (2.11), (2.12).

Для сравнения с экспериментом потребуется турбулентный коэффициент теплообмена α_t , который, согласно [6], определяется в виде

$$(2.15) \quad \alpha_t = 0,0296 \text{Pr}^{-0,6} (\rho^* u)^{0,8} (\mu^*/x_t)^{0,2}, \quad q_t = \alpha_t (i_t - i_w),$$

$$x_t = \int_0^x L_t dx / L_t, \quad L_t = \rho^* u (\mu^*)^{0,25} R^{1,25} (i_t - i_w)^{1,25}, \quad i_t = i + 0,5 \text{Pr}^{1/3} u^2,$$

$$\rho^* = \rho(p, i_t^*), \quad \mu^* = \mu(p, i_t^*), \quad i_t^* = 0,5(i + i_w) + 0,22(i - i)$$

и равен нулю в критической точке в отличие от (2.12) (q_t — турбулентный тепловой поток).

3. Расчеты по вышеприведенным формулам сравнивались с экспериментами [2] по относительным коэффициентам теплообмена α_j/α_j^0 ($j = l, p$) и числам Стантона

$$(3.1) \quad \text{St}_j = \alpha_j / (\rho_\infty u_\infty), \quad j = l, p, t.$$

В [2] измерялось распределение тепловых потоков на танталовой сфере диаметром $D = 76,2$ мм в диапазоне центральных углов $0 \leq \theta \leq 60^\circ$, обтекаемой воздушной двухфазной струей с $M_\infty = 6,1$ и $\text{Re}_\infty = 1,88 \cdot 10^6$, рассчитанными по параметрам струи на бесконечности и размеру D . Струя с температурой торможения 820 К содержала частицы диаметром 100 мкм из карбида кремния ($\rho_s = 3400$ кг/м³) и концентрацией $\chi = 7,3 \cdot 10^{-4}$ согласно (2.6) при $G = 0$, так как эрозией в рассматриваемом случае можно пренебречь. Поток кинетической энергии падающих на сферу частиц $q_{pk} = 12,1$ ккал/(м²·с). По этим данным полностью рассчитываются параметры набегающей струи.

В [2] при оценке вклада кинетической энергии частиц в тепловой поток не учитывался их угол β встречи с поверхностью сферы. Поправка экспериментальных результатов [2] вводилась по формуле

$$(3.2) \quad \text{St} = \text{St}_{90} + \frac{a_k a_{pk} (1 - \sin^2 \beta)}{\rho_\infty u_\infty (i_t - i_w)}.$$

Здесь St_{90} — экспериментальное число Стантона для $\beta = 90^\circ$; a_k — коэффициент аккомодации кинетической энергии частиц, который полагается равным 0,7 или 0,3 соответственно для эрозионно стойких или неэрозионно стойких материалов [5] (для тантала $a_k = 0,7$); b — показатель степени, который принимался равным 1 или 3; $q_{pk} = 0,5 \rho_{pw} u_{pw}^3$ (ρ_{pw} — плотность и скорость частиц вблизи поверхности сферы).

Изменением параметров частиц в ударном слое сферы можно пренебречь, так как при прохождении ударного слоя траектория частицы, отстоящая от оси течения на 10 мм, отклоняется от своего первоначального направления в соответствии с (1.3) на $\delta_1 \approx 0,01$ мм, а ее скорость изменяется на $\sim 2\%$ согласно формулам [13]. Поэтому в (3.2) можно положить $\beta = 90^\circ - \theta$, $q_{pk} = 0,5 \rho_{pw} u_{pw}^3$.

Распределение по сфере теоретических относительных коэффициентов теплообмена, рассчитанных по (2.14), представлено на рис. 1 кривыми 1 и 2 для $j = p$ и $j = l$, которые слабо отличаются друг от друга, как указывалось выше при рассмотрении формул (2.14). Эти кривые хорошо совпадают с экспериментальными точками 3 и 4, обработанными по (3.2) соответственно для $b = 3$ и 1, причем лучшее согласие наблюдается с экспериментом 3, т. е. при таком неупругом взаимодействии частиц с телом, когда поглощается та часть их кинетической энергии, которая связана с нормальной к телу компонентой скорости частиц.

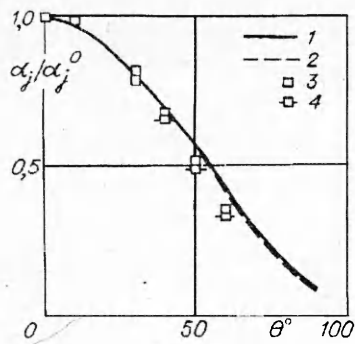


Рис. 1

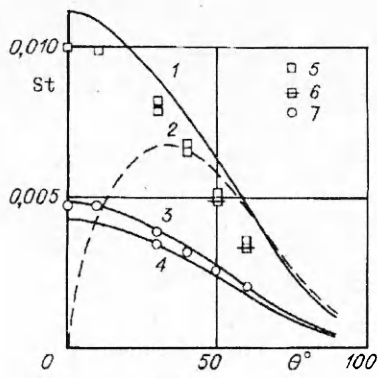


Рис. 2

Для полноты картины на рис. 2 показаны абсолютные распределения по сфере коэффициентов теплообмена, выраженных через число Стантона для тех же условий эксперимента. Кривая 1, характеризующая теплообмен в двухфазной струе через St_p и рассчитанная по формуле (3.1) с учетом (2.14), (2.12), (2.7), (2.6) при $G = 0$, изменяется подобно экспериментальным точкам 5 и 6, обработанным по (3.2) соответственно для $b = 3$ и 1, но отличается от них, например, в критической точке на $\sim 11\%$. Это несовпадение понятно, если учесть, что точность аппроксимации (2.5) равна $\sim 25\%$.

Для сравнения турбулентное число Стантона St_t , полученное из (3.1), (2.15), показано на рис. 2 линией 2, с которой должна совпасть кривая 1 после перехода режима ТКТ в турбулентный вдали от критической точки. Однако условие такого перехода в данной работе не рассматривается.

Расчет ламинарного числа Стантона St_l по (3.1), (2.14), (2.11), представленный на рис. 2 линией 4, отличается от экспериментальных точек 7 из-за пренебрежения влиянием шероховатости сферы. Возрастание теплообмена в критической точке тела за счет шероховатости поверхности можно оценить по формулам [5]

$$(3.3) \quad \alpha_r^0/\alpha_t^0 = 0,2\eta^{0,4}, \quad \eta \geq 56; \quad \alpha_r^0/\alpha_t^0 = 1, \quad \eta < 56,$$

$$\eta = (\rho_\infty u_\infty R_{ef}/\mu_0)^{0,2} h_r/\vartheta_0, \quad R_{ef} = \sqrt{2k u_\infty}/(\partial u/\partial l)_0,$$

$$\vartheta_0 = 0,343 \sqrt{\frac{\mu_0/\rho_0}{(\partial u/\partial l)_0}} \left(1 - 0,286 \frac{i_{w0}}{i_0}\right),$$

где α_r^0 — коэффициент теплообмена в критической точке с учетом шероховатости; h_r — средняя высота бугорков шероховатости на поверхности тела; R_{ef} , ϑ_0 — эффективный радиус и толщина потери импульса в критической точке тела; $(\partial u/\partial l)_0$ — градиент скорости, определяемый по (2.9). Результаты расчетов по (3.3) хорошо согласуются с [16] для $\eta \leq 10^3$.

Значение St_t , рассчитанное по (3.1), (2.14) при $j = r$ с учетом шероховатости (3.3) для $h_r = 0,09$ мм, представлено на рис. 2 кривой 3, которая хорошо согласуется с экспериментальными точками 7.

Из сопоставления кривых 1, 3, 4 видно, что влиянием шероховатости поверхности на теплообмен можно пренебречь по сравнению с воздействием, оказываемым на него присутствием частиц в струе, как упоминалось выше.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dunbar L. E., Courtney J. E., McMillen L. D. Heating augmentation in erosive hypersonic environments // AIAA J. — 1975. — V. 13, N 7.
2. Fleener W. A., Watson R. H. Convective heating in dust-laden hypersonic flows. — N. Y., 1973. — (Pap./AIAA; N 73—761).
3. Wassel A. T., Denny V. E. Heat transfer to axisymmetric bodies in super- and hypersonic turbulent streams // J. of Spacecraft and Rockets. — 1977. — V. 14, N 4.
4. Hove D. T., Taylor E. Stagnation region heat transfer in hypersonic particle environments // AIAA J. — 1976. — V. 14, N 10.
5. Hove D. T., Shih W. C. L. Re-entry vehicle stagnation region heat-transfer in particle environments // AIAA J. — 1977. — V. 15, N 7.

6. Карпов В. А. Теплообмен в критической точке и ее окрестности при обтекании тел турбулентным потоком // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1975. — № 4.
7. Осипцов А. Н. Пограничный слой на затупленном теле в потоке запыленного газа // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1985. — № 5.
8. Holden M. S., Gustafson G. Q., Duryea G. R., Hudack L. T. An experimental study of particle-induced convective heating augmentation. — N. Y., 1976. — (Pap./AIAA; N 76—320).
9. Edney B. E. Effects of shock impingement on the heat transfer around blunt bodies // AIAA J. — 1968. — V. 6, N 1.
10. Чжен П. Отрывные течения. — М.: Мир, 1973. — Т. 2.
11. Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений. — М.: ИЛ, 1962.
12. Fay J. A., Riddell F. R. Theory of stagnation point heat transfer in dissociated air // J. Aeronaut. Sci. — 1958. — V. 25, N 2.
13. Полежаев Ю. В., Романчиков В. П., Чирков И. В., Шебеко В. Н. Расчетная модель процесса эрозийного разрушения композиционного материала // ИФЖ. — 1979. — Т. 37, № 3.
14. Бойсон Дж. К., Кертис Х. А. Экспериментальные исследования градиента скорости на затупленном теле // Механика. — М.: ИЛ, 1960. — № 1.
15. Магомедов К. М. О сверхзвуковом обтекании тупых тел с известной звуковой точкой // Изв. АН СССР. ОН. Механика и машиностроение. — 1963. — № 1.
16. Phinney R. E. Mechanism for heat transfer to a rough blunt body // Lett. Heat and Mass Transfer. — 1974. — V. 1, N 2.

г. Москва

Поступила 27/VII 1992 г.

УДК 539.3:517.958

Н. И. Остросаблин

ОБЩИЕ РЕШЕНИЯ И ПРИВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ К ДИАГОНАЛЬНОМУ ВИДУ

Известны [1—11] многочисленные попытки представить напряжения или смещения через произвольные независимые функции (например, гармонические и бигармонические) таким образом, чтобы уравнения теории упругости удовлетворялись тождественно. Такие представления называют общими решениями. Но единого подхода к построению общих решений до сих пор не было. В настоящей работе предлагается способ, позволяющий систему дифференциальных уравнений (линейной теории упругости) с постоянными коэффициентами в некоторых случаях свести к более простой, в частности диагональной, системе. При этом обратное преобразование к исходной системе задается транспонированной или сопряженной матрицей. Найдены также формулы производства новых решений (операторы симметрий в смысле группового анализа) исходя из какого-то конкретного решения. Идея метода кратко изложена в [12]. Приведены явные формулы для изотропного и трансверсально-изотропного материалов, показана полнота и общность решения Папковича — Нейбера.

Уравнения теории упругости при произвольной анизотропии и отсутствии объемных сил в декартовых ортогональных координатах x_1, x_2, x_3 имеют вид [7]

$$(1) \quad L_{ij}u_i = 0, \quad L_{ij} = L_{ji} = A_{i(kl)j}\partial_{kl} - \rho\delta_{ij}\partial_{..},$$

где u_i — вектор смещения; $A_{i(kl)j} = (A_{iklj} + A_{ilkj})/2$; A_{iklj} — постоянный тензор модулей упругости; ρ — постоянная плотность материала; δ_{ij} — символ Кронекера; ∂_k — производная по координате x_k ; $\partial_{..}$ — производная по времени; повторяющиеся буквенные индексы означают суммирование. Свойства коэффициентов $A_{i(kl)j}$ изучались в [13—15].

Допустим, что матрица L операторов в (1) подобна [16] некоторой матрице D , т. е. существует невырожденная матрица T такая, что

$$(2) \quad LT = TD.$$

Поскольку $L' = L$ и предполагаем $D' = D$, то из (2) получаем

$$(3) \quad T'L = DT'$$