ПМТФ, № 2, 1964

К ЗАДАЧЕ ОБ ОПТИМАЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПРОВОДИМОСТИ ЖИДКОСТИ, ДВИЖУЩЕЙСЯ ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

К. А. Лурье

(*Ленинград*)

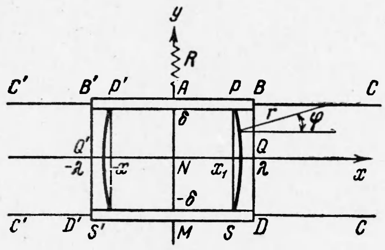
1. Проводящая жидкость, проводимость которой ограничена пределами интервала ($\sigma_{\min}$, $\sigma_{\max}$), движется с постоянной скоростью $\mathbf{v}(V, 0, 0)$ в плоском канале (фиг. 1) шириной 2δ. Стенки канала повсюду диэлектрические, за исключением двух участков одинаковой длины 2λ, расположенных на противоположных стенках один против другого и изготовленных из идеально проводящего материала. Проводящие участки соединены один с другим посредством нагрузки R.

При наложении внешнего магнитного поля $\mathbf{B}\{0, 0, -B(x)\}$ через цепь нагрузки протекает электрический ток

$$I = \int_{-\lambda}^{\lambda} \zeta^2(x, \pm\delta)\, dx \qquad (1.1)$$

а в жидкости выделяется джоулево тепло

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\delta}^{\delta} \rho\,[(\zeta^1)^2 + (\zeta^2)^2]\, dx\, dy \qquad (1.2)$$



Фиг. 1

Предположение $V = \mathrm{const}$ оправдывается в случае малых значений магнитного числа Рейнольдса [1]; при этом индуцированными полями также можно пренебречь и описывать распределение токов $\mathbf{j}(\zeta^1, \zeta^2)$ и потенциала электрического поля z^1 следующими уравнениями [2]:

$$\frac{\partial z^1}{\partial x} = -\rho\zeta^1, \qquad \frac{\partial z^1}{\partial y} = -\rho\zeta^2 + \frac{VB}{c}, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{VB}{c} - \rho\zeta^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}\rho\zeta^1 = 0$$

$$\frac{\partial z^2}{\partial x} = \zeta^2, \qquad \frac{\partial z^2}{\partial y} = -\zeta^1, \qquad \frac{\partial \zeta^1}{\partial x} + \frac{\partial \zeta^2}{\partial y} = 0 \qquad (1.3)$$

Здесь z^2 — функция тока; через $\rho = 1/\sigma$ обозначено удельное сопротивление жидкости.

Ставится задача о выборе среди кусочно-непрерывных функций $\rho(x, y)$, удовлетворяющих неравенству

$$\rho_{\min} \leqslant \rho(x, y) \leqslant \rho_{\max} \qquad (1.4)$$

оптимального управления $\rho(x, y)$, доставляющего максимум функционалу I (задача А), либо минимум функционалу Q (задача В).

В работе [2] оптимальные задачи А и В были решены для случая однородного магнитного поля. Цель настоящей статьи — построение оптимальных распределений проводимости в случае меняющегося с координатой x магнитного поля. Все рассуждения будут проведены для задачи А; распространение их на задачу В не вызывает затруднений.

Как показано в [2] (теорема), оптимальные режимы в задаче А могут достигаться лишь при следующих значениях управления $\rho\,(x,\,y)$ (условие Вейерштрасса):

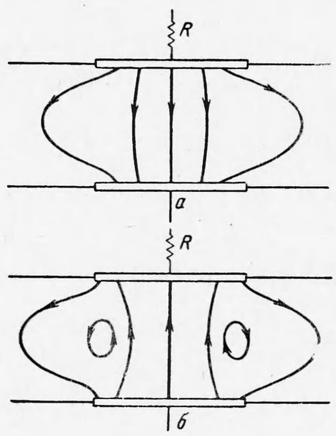
$$\rho = \rho_{\max} \quad \text{при } (\mathbf{j}, \operatorname{grad}\omega_2) > 0, \quad \chi \leqslant \arccos p \ (\text{режим } 1)$$
$$\rho = \rho_{\min} \quad \text{при } (\mathbf{j}, \operatorname{grad}\omega_2) < 0, \quad \chi \geqslant \pi - \arccos p \ (\text{режим } 2) \quad (1.5)$$

Здесь χ обозначает угол между векторами $\mathbf{j}$ и grad ω_2; параметр p определяется формулой

$$p = \frac{\rho_{\max} - \rho_{\min}}{\rho_{\max} + \rho_{\min}} \qquad (1.6)$$

Функция ω_2 гармоническая в обоих режимах проводимости; граничные условия для ее определения вместе с условиями на кривых раздела режимов будут приведены в дальнейшем.

2. Если магнитное поле однородно, то оптимальный режим в задаче А характеризуется отсутствием скачков [2], т. е. постоянством проводимости во всей области. Изменение магнитного поля с координатой x качественно меняет эту картину: в оптимальном режиме появляются скачки проводимости.



Фиг. 2

Рассмотрим, например, случай, когда магнитное поле четно по x и обращается в нуль вне электродной зоны. Докажем, что режим $\rho = \text{const}$ в этих условиях не является оптимальным.

Распределение токов для этого случая получено А. Б. Ватажиным [3]; оказывается, что вектор плотности тока формально складывается из двух частей: вектора $\mathbf{j}^1$, возникающего при течении жидкости в однородном магнитном поле величинов

$$B_0 = -\frac{R}{2\rho\delta}\int_{-\lambda}^{\lambda} B(x)\,dx$$

и вектора $\mathbf{j}^2$ с компонентами $\{0, \rho^{-1}c^{-1}VB(x)\}$. Векторные линии $\mathbf{j}^1$ и $\mathbf{j}$ изображены на фиг. 2*а* и *б*, заимствованных из работы [3].

Линии grad ω_2, как показано в [2], параллельны линиям $\mathbf{j}^1$. Сравнивая фиг. 2*а* и *б* и вспоминая условие Вейерштрасса (1.5), придем к выводу, что это условие в какой-то части области нарушается, поскольку линии $\mathbf{j}$ и grad ω_2 пересекаются как под тупым, так и под острым углом, а проводимость $1/\rho$ считается повсюду одинаковой.

Более детальное рассмотрение показывает, что взаимная ориентация векторных линий соответствует режиму максимальной проводимости, грубо говоря, в области между электродами, и режиму минимальной проводимости вне этой области. Физически это означает, что для оптимизации режима следует максимально увеличить токи в основном направлении (в электродной зоне) и сделать возможно меньшими обратные перетекания токов в областях, свободных от магнитного поля.

Аналогичным образом можно доказать, что режим постоянной проводимости не будет оптимальным и в том случае, когда внешнее магнитное поле вынесено на конечное расстояние за пределы электродной зоны.

Таким образом, возникает задача определения формы и местоположения кривых, разделяющих области с различными (постоянными) значениями проводимости. Ниже дается постановка этой проблемы, причем магнитное поле считается, вообще говоря, выходящим за пределы электродной зоны.

На неизвестных кривых скачка Σ_0 соблюдаются условия непрерывности касательной составляющей электрического поля и нормальной составляющей плоскости тока; эти условия записываются так

$$[z^i]_2^1 = 0 \qquad (i = 1, 2) \tag{2.1}$$

Кроме того, на кривых скачка выполняются следующие условия Эрдманна — Вейерштрасса [4]

$$[\omega_i]_2^1 = 0 \qquad (i = 1, 2) \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial t}\left[\frac{\partial z^1}{\partial n}\right]_2^1 + \frac{\partial \omega_2}{\partial t}\left[\frac{\partial z^2}{\partial n}\right]_2^1 = 0 \tag{2.3}$$

Через $\mathbf{n}\,\{y_t, -x_t\}$, $\mathbf{t}\,\{x_t, y_t\}$ обозначены нормальное и касательное направления к линии скачка.

В областях, соответствующих режимам 1 и 2, функции z^i удовлетворяют уравнениям

$$\Delta z^1 = 0, \qquad \Delta z^2 = \begin{cases} \dfrac{V}{c\rho_{\max}}\dfrac{\partial B}{\partial x} & \text{в области 1} \\[2ex] \dfrac{V}{c\rho_{\min}}\dfrac{\partial B}{\partial x} & \text{в области 2} \end{cases} \tag{2.4}$$

Функции ω_2 и $\rho\omega_1$ в областях 1 и 2 — сопряженные гармонические

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial x} = \rho\frac{\partial \omega_1}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \omega_2}{\partial y} = -\rho\frac{\partial \omega_1}{\partial x} \tag{2.5}$$

Соответствующие краевые условия таковы

$$z^1(x, \pm\delta) = z_\pm^1 = \mathrm{const}, \qquad |x| < \lambda \tag{2.6}$$

$$z^2(x, \pm\delta)|_{x>\lambda} = z_+^2 = \mathrm{const}, \qquad z^2(x, \pm\delta)|_{x<-\lambda} = z_-^2 = \mathrm{const}$$

$$z^1(\infty, y) = z^1(-\infty, y) = 0, \qquad z_+^2 - z_-^2 = R^{-1}(z_+^1 - z_-^1)$$

$$\omega_2(x, \pm\delta) = \omega_{2\pm} = \mathrm{const}, \qquad |x| < \lambda \tag{2.7}$$

$$\omega_1(x, \pm\delta)|_{x>\lambda} = \omega_{1+} = \mathrm{const}, \qquad \omega_1(x, \pm\delta)|_{x<-\lambda} = \omega_{1-} = \mathrm{const}$$

$$\omega_2(\infty, y) = \omega_2(-\infty, y) = 0, \qquad \omega_{2+} - \omega_{2-} + 1 = R(\omega_{1+} - \omega_{1-})$$

Условий (2.1) — (2.7) достаточно для определения кривых скачка и разрывов нормальных производных функций z^i и ω_i на этих кривых.

Формулы (2.1)—(2.7) представляют собой условия стационарности; как известно, этим условиям можно, вообще говоря, удовлетворить многими способами, и в такой постановке задача в общем случае обладает известным разнообразием решений. Роль неравенств Вейерштрасса (1.5) заключается в том, чтобы выделить из этого множества решений определенное решение, соответствующее оптимальному (в заданном смысле) распределению проводимости. Эти неравенства должны, в частности, указать взаимное расположение областей 1 и 2 в оптимальном решении.

Условия (2.1) — (2.3) можно записать в эквивалентной форме. Для этого представим функции z^i в виде сумм

$$z^i = P^i + F^i, \qquad P^i = \int_{\Sigma_0} \mu^i \ln\frac{1}{r}\,dt \tag{2.8}$$

Здесь F^i — надлежащим образом определенное решение соответствующего уравнения (2.4); напоминаем, что кривая скачка обозначена через Σ_0. Важно подчеркнуть, что функции F^i непрерывны во всей основной области вместе со своими первыми производными.

Представление (2.8) любой из z^i удовлетворяет соответствующему условию (2.1); оставшееся условие (2.1) приводит к интегральному уравнению относительно плотности μ^i.

Для записи этих уравнений воспользуемся известными соотношениями для предельных значений нормальных производных потенциала простого слоя [5]

$$\left(\frac{\partial P^i}{\partial n_0}\right)_+ = \pi\mu^i + \int\limits_{\Sigma_0} \mu^i \frac{\cos\psi_0}{r_0} dt, \qquad \left(\frac{\partial P^i}{\partial n_0}\right)_- = -\pi\mu^i + \int\limits_{\Sigma_0} \mu^i \frac{\cos\psi_0}{r_0} dt$$

Здесь ψ_0 означает угол между направлением внешней нормали $\mathbf{n}_0$ к кривой Σ_0 в точке наблюдения и вектор-радиусом $\mathbf{r}_0$ точки интегрирования по отношению к полюсу в точке наблюдения; нижний индекс плюс означает внутреннюю производную, минус — внешнюю.

Пользуясь этими соотношениями, а также уравнениями (1.3) нетрудно получить упомянутые выше интегральные уравнения.

Будем иметь [1]

$$\begin{gathered}\mu^1 - \frac{p}{\pi}\int\limits_{\Sigma_0} \mu^1 \frac{\cos\psi_0}{r_0} dt = \frac{p}{\pi}\frac{\partial F^1}{\partial n_0} + \frac{p}{\pi}\frac{VB}{c} x_t \\ \mu^2 + \frac{p}{\pi}\int\limits_{\Sigma_0} \mu^2 \frac{\cos\psi_0}{r_0} dt = -\frac{p}{\pi}\frac{\partial F^2}{\partial n_0}\end{gathered} \tag{2.9}$$

Параметр p определяется формулой (1.6). Сходным образом, для функций ω_i оказывается справедливым представление

$$\omega_i = \int\limits_{\Sigma_0} \nu_i \ln\frac{1}{r} dt + H_i \tag{2.10}$$

Здесь H_i — гармонические функции, непрерывные вместе со своими производными. Уравнения для плотностей ν_1 и ν_2 имеют вид

$$\nu_1 + \frac{p}{\pi}\int\limits_{\Sigma_0} \nu_1 \frac{\cos\psi_0}{r_0} dt = -\frac{p}{\pi}\frac{\partial H_1}{\partial n_0}, \qquad \nu_2 - \frac{p}{\pi}\int\limits_{\Sigma_0} \nu_2 \frac{\cos\psi_0}{r_0} dt = \frac{p}{\pi}\frac{\partial H_2}{\partial n_0} \tag{2.11}$$

Правые части уравнений (2.9) и (2.11) содержат производные неизвестных функций F^i, H_i. Эти функции должны определяться одновременно с плотностями μ^i, ν_i из решения краевых задач для соответствующих функций z^i, ω_i. Исследование таких задач будет проведено ниже.

Условие (2.3) может быть записано при помощи введенных плотностей, например, в следующей форме

$$\left(\int\limits_{\Sigma_0} \mu^2 \frac{\sin\psi_0}{r_0} dt + \frac{\partial F^2}{\partial t}\right)\nu_2 + \left(\int\limits_{\Sigma_0} \nu_2 \frac{\sin\psi_0}{r_0} dt + \frac{\partial H_2}{\partial t}\right)\mu^2 = 0 \tag{2.12}$$

Приведем еще выражения для косинусов предельных углов χ между векторами $\mathbf{j}$ и grad ω_2 на кривой скачка Σ_0 по обе ее стороны:

$$\cos\chi\Big|_1 = \frac{1}{\Omega}\left(\frac{\partial z^2}{\partial n}\frac{\partial\omega_2}{\partial t} - \frac{\partial z^2}{\partial t}\frac{\partial\omega_2}{\partial n}\right)\Big|_1 =$$

$$= \frac{1}{\Omega}\left(\pi\mu^2 + \int\limits_{\Sigma_0} \mu^2 \frac{\cos\psi_0}{r_0} dt + \frac{\partial F^2}{\partial n_0}\right)\left(\int\limits_{\Sigma_0} \nu_2 \frac{\sin\psi_0}{r_0} dt + \frac{\partial H_2}{\partial t}\right)\Big|_1 -$$

$$- \frac{1}{\Omega}\left(\int\limits_{\Sigma_0} \mu^2 \frac{\sin\psi_0}{r_0} dt + \frac{\partial F^2}{\partial t}\right)\left(\pi\nu_2 + \int\limits_{\Sigma_0} \nu_2 \frac{\cos\psi_0}{r_0} dt + \frac{\partial H_2}{\partial n_0}\right)\Big|_1$$

$$\left(\Omega = \sqrt{(z_n^2)^2 + (z_t^2)^2}\sqrt{(\omega_{2n})^2 + (\omega_{2t})^2}\right)$$

---

[1] В дальнейшем $\mathbf{n}_0$ будет обозначать нормаль к кривой Σ_0, внешнюю по отношению к области 1, где $\rho = \rho_{max}$.

Пользуясь интегральными уравнениями (2.9) и (2.11) для плотностей μ^2, ν_2, а также равенством (2.12), перепишем последнюю формулу так

$$\cos\chi\Big|_1 = \frac{2\pi\nu_2}{\Omega}\left(\int\limits_{\Sigma_0} \mu^2 \frac{\sin\psi_0}{r_0} dt + \frac{\partial F^2}{\partial t}\right)\Big|_1$$

Совершенно так же найдем

$$\cos\chi\Big|_2 = -\frac{2\pi\nu_2}{\Omega}\left(\int\limits_{\Sigma_0} \mu^2 \frac{\sin\psi_0}{r_0} dt + \frac{\partial F^2}{\partial t}\right)\Big|_2$$

Как видно из полученных формул, косинусы предельных углов, образуемых векторами $\mathbf{j}$ и $\operatorname{grad}\omega_2$ с разных сторон кривой скачка, имеют разные знаки.

Для завершения исследования необходимо дать постановку краевых задач, решение которых определит функции F^i, H_i. Достаточно найти одну из функций F^i (или H_i), тогда другие определятся без труда.

Сформулируем краевую задачу для нахождения F^1, причем для простоты ограничимся случаем, когда $B(x)$ — четная функция, исчезающая при $|x| > \lambda$. Последнее предположение ни в какой мере не ограничивает общности, и все рассуждения могут быть проведены и в том случае, когда магнитное поле выходит за пределы электродной зоны.

При сделанном допущении о профиле магнитного поля естественно разыскивать решение, соответствующее распределению проводимости следующего типа: в средней области $PP'S'SP$ (фиг. 1), расположенной в пределах электродной зоны, $\rho = \rho_{\min}$ (режим 2); в двух симметрично расположенных и уходящих в бесконечность боковых областях $C'S'P'C'$ и $CPSC$ имеем $\rho = \rho_{\max}$ (режим 1). Форма кривых скачка $S'Q'P'$ и PQS заранее не известна и подлежит определению вместе с решением оптимальной задачи. Относительно этих кривых будет предполагаться лишь то, что они симметричны относительно осей x и y и начинаются и кончаются на электродах.

В дальнейшем увидим, что такое распределение проводимости при определенных условиях действительно будет оптимальным, поскольку соответствующими решениями удается удовлетворить как условиям стационарности, так и условию Вейерштрасса.

Принимая во внимание сделанные выше предположения о всех входящих в рассмотрение величинах, а также уравнения (2.4) и краевые условия (2.6), приходим к следующей краевой задаче.

Требуется определить в полуполосе $x \geqslant 0$, $|y| \leqslant \delta$ гармоническую функцию F^1 при следующих краевых условиях (фиг. 1):

$$\begin{aligned}
&F^1(x, \pm\delta) = z_\pm{}^1 - \int\limits_{\Sigma_0} \mu^1 \ln\frac{1}{r} dt\Big|_{y=\pm\delta} && \text{при } x < \lambda \\
&\frac{\partial F^1}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{\Sigma_0} \mu^1 \ln\frac{1}{r} dt && \text{при } x = 0,\ |y| < \delta \\
&\frac{\partial F^1}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{\Sigma_0} \mu^1 \ln\frac{1}{r} dt && \text{при } \lambda < x < \infty,\ y = \pm\delta
\end{aligned} \qquad (2.13)$$

На бесконечности производные $\partial F^1 / \partial x$, $\partial F^1 / \partial y$ обращаются в нуль.

Постоянная разность $z_+{}^1 - z_-{}^1$ определяется из закона Ома для внешней цепи

$$2R\int\limits_0^\lambda \frac{1}{\rho}\left(\frac{VB}{c} - \frac{\partial z^1}{\partial y}\right)\Big|_{y=\delta} dx = z_+{}^1 - z_-{}^1 \qquad (2.14)$$

Решение подобной задачи получено А. Б. Ватажиным [1]; следуя этой работе, введем аналитическую функцию

$$\Phi^1 = \frac{\partial F^1}{\partial x} - i\frac{\partial F^1}{\partial y} = u + iv, \qquad u = \frac{\partial F^1}{\partial x}, \qquad v = -\frac{\partial F^1}{\partial y} \tag{2.15}$$

Соответствующие граничные условия имеют вид (обозначения см. на фиг. 1)

$$u = \int\limits_{\Sigma_0} \mu^1 \frac{\cos\varphi}{r}\,dt = C\,(x, y) \quad \text{на } BA,\ AM,\ MD;$$

$$\Phi^1(\infty) = 0$$

$$v = -\int\limits_{\Sigma_0} \mu^1 \frac{\sin\varphi}{r}\,dt = -S\,(x, y) \quad \text{на } CB,\ DC;$$

$$-\int\limits_0^{\delta} v\,(0, y)\,dy + \frac{1}{2}\Big[\int\limits_{\Sigma_0}\mu^1 \ln\frac{1}{r_A}\,dt - \int\limits_{\Sigma_0}\mu^1 \ln\frac{1}{r_M}\,dt\Big] = \frac{R}{\rho_{\min}}\int\limits_0^{x_1} v\,(x, \delta)\,dx +$$

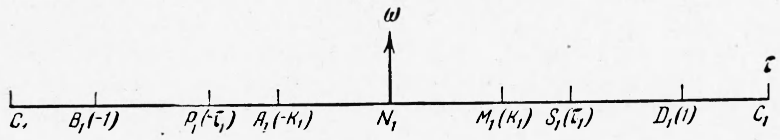
$$+\frac{R}{\rho_{\max}}\int\limits_{x_1}^{\lambda} v\,(x, \delta)\,dx + \frac{R}{\rho_{\min}}\int\limits_0^{x_1} dx\Big(\int\limits_{\Sigma_0}\mu^1\frac{\sin\varphi}{r}\,dt\Big)_{y=\delta} +$$

$$+\frac{R}{\rho_{\max}}\int\limits_{x_1}^{\lambda} dx\Big(\int\limits_{\Sigma_0}\mu^1\frac{\sin\varphi}{r}\,dt\Big)_{y=\delta} + \frac{R}{\rho_{\min}}\frac{V}{c}\int\limits_0^{x_1} B\,(x)\,dx + \frac{R}{\rho_{\max}}\frac{V}{c}\int\limits_{x_1}^{\lambda} B\,(x)\,dx \tag{2.16}$$

Функция

$$w = \tau + i\omega = \frac{\sin(\pi i z / 2\delta)}{\mathrm{ch}\,(\pi\lambda / 2\delta)} \qquad (z = x + iy) \tag{2.17}$$

реализует конформное отображение полуполосы $x \geqslant 0$, $|y| \leqslant \delta$ на верхнюю полуплоскость с соответствием точек, указанных на фиг. 3, на которой $k_1 = \mathrm{ch}^{-1}(\pi\lambda / 2\delta)$ и $\tau_1 = \mathrm{ch}\,(\pi x_1 / 2\delta) / \mathrm{ch}\,(\pi\lambda / 2\delta)$.



Фиг. 3

На границе области выполняются соотношения

$$\tau = -\frac{\mathrm{ch}\,(\pi x / 2\delta)}{\mathrm{ch}\,(\pi\lambda / 2\delta)} \quad (x \geqslant 0,\ y = \delta), \qquad \tau = -\frac{\sin(\pi y / 2\delta)}{\mathrm{ch}\,(\pi\lambda / 2\delta)} \quad (x = 0,\ |y| \leqslant \delta)$$

$$\tau = \frac{\mathrm{ch}\,(\pi x / 2\delta)}{\mathrm{ch}\,(\pi\lambda / 2\delta)} \quad (x \geqslant 0,\ y = -\delta) \tag{2.18}$$

Приходим к задаче определения аналитической в верхней полуплоскости $\Phi^1[z(w)] = \Phi_1^1(w) = u_1 + iv_1$, исчезающей на бесконечности и удовлетворяющей смешанным краевым условиям на вещественной оси

$$u_1 = C_1(\tau) \quad (-1 < \tau < 1,\ \omega = 0), \qquad v_1 = -S_1(\tau) \quad (1 < |\tau| < \infty,\ \omega = 0)$$

$$-\frac{2\delta}{\pi}\int\limits_0^{k_1}\frac{v_1(\tau, 0)}{\sqrt{k_1^2 - \tau^2}}\,d\tau = R\frac{2\delta}{\pi}\Big[\frac{1}{\rho_{\min}}\int\limits_{k_1}^{\tau_1}\frac{v_1(\tau, 0)}{\sqrt{\tau^2 - k_1^2}}\,d\tau + \tag{2.19}$$

$$+\frac{1}{\rho_{\max}}\int\limits_{\tau_1}^{1}\frac{v_1(\tau, 0)}{\sqrt{\tau^2 - k_1^2}}\,d\tau\Big] + R\Big[\frac{G_1}{\rho_{\min}} + \frac{G_2}{\rho_{\max}}\Big] - \frac{1}{2}\,[P^1(0, \delta) - P^1(0, -\delta)]$$

В этих формулах

$$C_1(w) = -\frac{\partial P^1}{\partial x}\bigg|_{z=z(w)} = \left(\int_{\Sigma_0} \mu^1 \frac{\cos\varphi}{r}\,dt\right)_{z=z(w)}$$

$$S_1(w) = -\frac{\partial P^1}{\partial y}\bigg|_{z=z(w)} = \left(\int_{\Sigma_0} \mu^1 \frac{\sin\varphi}{r}\,dt\right)_{z=z(w)} \tag{2.20}$$

$$G_1 = \int_0^{x_1} S\,(x,\delta)\,dx + \frac{V}{c}\int_0^{x_1} B(x)\,dx, \qquad G_2 = \int_{x_1}^{\lambda} S\,(x,\delta)\,dx + \frac{V}{c}\int_{x_1}^{\lambda} B\,(x)\,dx$$

Решение поставленной задачи получается при помощи формулы Келдыша — Седова [6]; будем иметь

$$\Phi_1^1(w) = \frac{1}{\pi i g(w)}\left\{-i\int_{-\infty}^{-1}\left(\frac{|\theta|+1}{|\theta|-1}\right)^{1/2}\frac{S_1(\theta)d\theta}{\theta - w} - i\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta}\right)^{1/2}\frac{C_1(\theta)d\theta}{\theta-\omega} -\right.$$

$$\left.- i\int_1^{\infty}\left(\frac{\theta-1}{\theta+1}\right)^{1/2}\frac{S_1(\theta)d\theta}{\theta-\omega}\right\} + \frac{\gamma}{\sqrt{(w-1)(w+1)}}\,, \quad g(w) = \left(\frac{w-1}{w+1}\right)^{1/2} \tag{2.21}$$

В этой формуле взята та ветвь корня, которая положительна на части $\tau > 1$ вещественной оси. Постоянная γ определяется из последнего условия (2.19). Полагая в (2.21) $w = \tau$, $|\tau| < 1$, найдем

$$v_1(\tau,0) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1+\tau}{1-\tau}\right)^{1/2}\left\{\int_{-\infty}^{-1}\left(\frac{|\theta|+1}{|\theta|-1}\right)^{1/2}\frac{S_1(\theta)d\theta}{\theta-\tau} + \int_1^{\infty}\left(\frac{\theta-1}{\theta+1}\right)^{1/2}\frac{S_1(\theta)d\theta}{\theta-\tau}\right\} - \frac{\gamma}{\sqrt{1-\tau^2}}$$

Подставляя это выражение в (2.19), определим γ (опускаем простые, но утомительные выкладки)

$$\gamma = \frac{\pi}{2\delta K(k_1)}\left[1 + \frac{R}{\rho_{\min}}\alpha^* - R\left(\frac{1}{\rho_{\min}} - \frac{1}{\rho_{\max}}\right)\alpha^{**}\right]^{-1}\times$$

$$\times\left(R\left[\frac{G_1}{\rho_{\min}} + \frac{G_2}{\rho_{\max}}\right] - \frac{1}{2}\left[P^1(0,\delta) - P^1(0,-\delta)\right] + \frac{4\delta}{\pi^2}\int_1^{\infty}\frac{\theta}{\sqrt{\theta^2-1}}\times\right.$$

$$\times S_1(\theta)\,d\theta\left\{\frac{\theta^2-1}{\theta^2}\,\Pi\left(\frac{\pi}{2},\ -\frac{k_1^2}{\theta^2},\ k_1\right) + \frac{R}{\rho_{\min}}\,\Pi\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{k_1'^2}{\theta^2-1},\ k_1'\right) -\right.$$

$$- R\left(\frac{1}{\rho_{\min}} - \frac{1}{\rho_{\max}}\right)\Pi\left(\arcsin\frac{\sqrt{1-\tau_1^2}}{k_1'},\ \frac{k_1'^2}{\theta^2-1},\ k_1'\right) -$$

$$\left.\left.- K(k_1)\left[1 + \frac{R}{\rho_{\min}}\alpha^* - R\left(\frac{1}{\rho_{\min}} - \frac{1}{\rho_{\max}}\right)\alpha^{**}\right]\right\}\right) \tag{2.22}$$

В этой формуле

$$F(\varphi,k) = \int_0^{\varphi}\frac{d\beta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}}\,, \qquad K(k) = F\left(\frac{\pi}{2},k\right)$$

$$\Pi(\varphi,h,k) = \int_0^{\varphi}\frac{d\beta}{(1+h\sin^2\beta)\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}}\,, \qquad k_1^2 + k_1'^2 = 1$$

$$\alpha^* = \frac{K(k_1')}{K(k_1)}\,, \qquad \alpha^{**} = \frac{1}{K(k_1)}\,F\left(\arcsin\frac{\sqrt{1-\tau_1^2}}{k_1'},\ k_1'\right)$$

Формулы (2.21) и (2.22) дают возможность определить функцию $F^1(x, y)$. Подставляя соответствующее выражение в правую часть первого уравнения (2.9), придем к интегральному уравнению для плотности μ^1.

Ток во внешней цепи (функционал I) оказывается равным

$$I = \frac{z_+^1 - z_-^1}{R} = -\frac{4\delta}{\pi R}\int\limits_0^{k_1} \frac{v_1(\tau, 0)}{\sqrt{k_1^2 - \tau^2}}\,d\tau + \frac{1}{R}\left[P^1(0, \delta) - P^1(0, -\delta)\right]$$

Выполнив вычисления, найдем

$$I = \frac{1}{\rho_{\min}}\left[1 + \frac{R}{\rho_{\min}}\alpha^* - R\left(\frac{1}{\rho_{\min}} - \frac{1}{\rho_{\max}}\right)\alpha^{**}\right]^{-1}\left\{2\left[G_1 + G_2\frac{\rho_{\min}}{\rho_{\max}}\right] + \right.$$

$$+ \left[P^1(0, \delta) - P^1(0, -\delta)\right]\left[\alpha^* - \left(1 - \frac{\rho_{\min}}{\rho_{\max}}\right)\alpha^{**}\right] +$$

$$\left. + \frac{4\delta}{\pi}\int\limits_1^{\infty} \Sigma^*\left(\frac{x}{\lambda}\right) S(x, \delta)\, d\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right\} \qquad (2.23)$$

Здесь

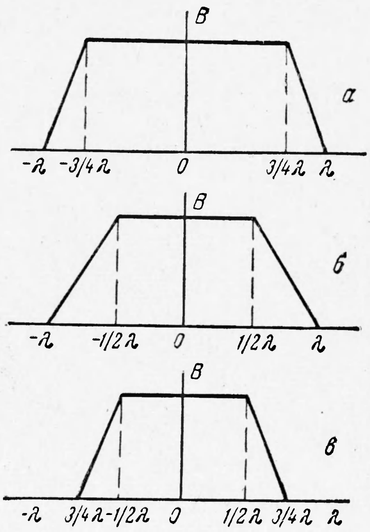
$$\Sigma^*\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \Sigma\left(\frac{x}{\lambda}\right) + \Delta\Sigma\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\Sigma\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \frac{\lambda}{\delta}\theta\left(\frac{\theta^2 - k_1^2}{\theta^2 - 1}\right)^{1/2}\left[\Pi\left(\frac{\pi}{2}, \frac{k_1'^2}{\theta^2 - 1}, k_1'\right) - \alpha^*\frac{\theta^2 - 1}{\theta^2}\Pi\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{k_1^2}{\theta^2}, k_1\right)\right.$$

$$\Delta\Sigma\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \frac{\lambda}{\delta}\theta\left(\frac{\theta^2 - k_1^2}{\theta^2 - 1}\right)^{1/2}\left(1 - \frac{\rho_{\min}}{\rho_{\max}}\right)\left[\alpha^{**}\frac{\theta^2 - 1}{\theta^2}\Pi\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{k_1^2}{\theta^2}, k_1\right) - \right.$$

$$\left. - \Pi\left(\arcsin\frac{\sqrt{1 - \tau_1^2}}{k_1'}, \frac{k_1'^2}{\theta^2 - 1}, k_1'\right)\right], \qquad \theta = k_1 \operatorname{ch}\frac{\pi x}{2\delta} \qquad (2.24)$$

3. Рассмотрим подробнее случай малых значений параметра p. При $p = 0$ проводимость жидкости постоянна и кривые скачка отсутствуют. Оптимальная задача при этом теряет смысл. С другой стороны, при достаточно малом p углы $\arccos p$ и $\pi - \arccos p$ близки к $^1/_2\,\pi$. Поэтому, принимая во внимание условия Вейерштрасса (1.5), нетрудно указать предельное (при $p = 0$) положение (исчезающих) линий разрыва Σ_0. Этим предельным положением будет геометрическое место точек Г, в которых векторные линии $\mathbf{j}$ и $\operatorname{grad}\omega_2$, построенные в предположении $p = 0$, пересекаются под прямым углом. (Для случая, когда $B(x) = 0$ при $|x| > \lambda$, кривые Г легко построить, накладывая одна на другую системы векторных линий фиг. 2*а*, 2*б*. Для трех вариантов задания функции $B(x)$, изображенных на фиг. 4, соответствующие кривые Г построены на фиг. 5).



Фиг. 4

При малых по сравнению с единицей значениях параметра p кривые разрыва проводимости мало отличаются от кривых Г, условия же Вейерштрасса приводят именно к такому расположению областей с $\rho = \rho_{\min}$ и $\rho = \rho_{\max}$, которое описано выше (стр. 33).

Можно было бы привести ряд соображений, при помощи которых удается охарактеризовать поведение кривой Σ_0 при достаточно малых значениях p.

Детальное построение кривой Σ_0 связано, однако, с громоздкими вычислениями и поэтому проведено не будет.

Основной интерес для рассматриваемой задачи представляет изменение величины функционала I, связанное с оптимизацией распределения проводимости, по сравнению с величиной этого функционала при постоянной проводимости (величину постоянной проводимости примем равной $1/\rho_{\min}$).

Можно считать, что изменение величины функционала складывается:

(1) из приращения, обусловленного уменьшением проводимости до $1/\rho_{\max}$ в областях $C'S'P'C'$ и $CPQSC$ (фиг. 1),

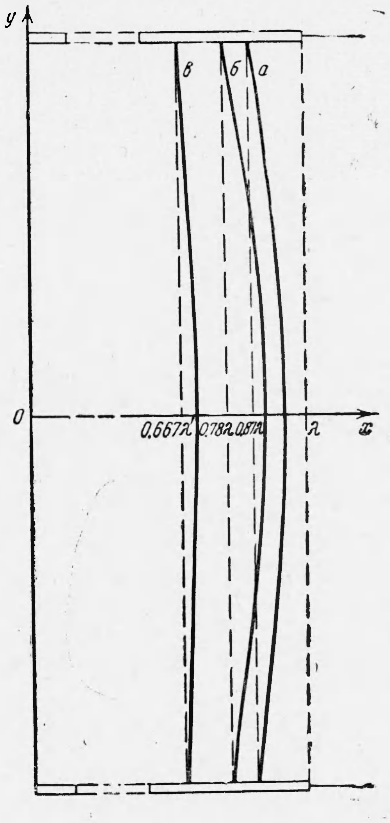
(2) приращения, вызванного последующим переходом от предельной кривой скачка Γ к кривой скачка Σ_0.

Это последнее приращение оказывается по параметру p величиной порядка более высокого, чем первый.

Доказательство следует непосредственно, если написать выражение для величины функционала I с помощью функций Грина для соответствующих областей и перейти к приращению (1), а впоследствии к приращению (2). Можно видеть, что последнее образуется из слагаемых, в которых величины порядка p умножаются на количества, порядок малости которых совпадает с порядком малости вариаций функций Грина при переходе от границы Г к границе Σ_0.

Считая эти вариации исчезающими вместе с параметром p, придем к сделанному выше утверждению.

В силу сказанного, приращение полного тока I с точностью до величин порядка p можно вычислить, предполагая, что кривые скачка проводимости совпадают с Г.



Фиг. 5

Для этой цели нужно воспользоваться формулой (2.23), удерживая в правой части члены порядка p.

Предварительно следует вычислить плотность μ^1 в этом же приближении; из первого уравнения (2.9) находим значение плотности

$$\mu^1 = \frac{p}{\pi}\frac{\partial z^1}{\partial n_0}\Big|_0 + \frac{p}{\pi}\frac{VB}{c}x_{t_0}\Big|_0 = -\frac{p}{\pi}\rho_{\min}\dot{j}_{n_0}\Big|_0 \tag{3.1}$$

Величины в правой части этой формулы вычисляются на кривой Г. Через $\mathbf{n}_0$ и $\mathbf{t}_0$ обозначены соответственно нормальное и касательное к Г направления (см. сноску на стр. 32); значок $|_0$ означает, что соответствующая величина вычисляется при $p = 0$.

Подставляя выражение (3.1) для плотности μ^1 в формулу (2.23) для определения приращения полного тока в оптимальном режиме по сравнению с его величиной при $\rho = \rho_{\min} = \mathrm{const}$, после соответствующих преобразований получим следующее выражение:

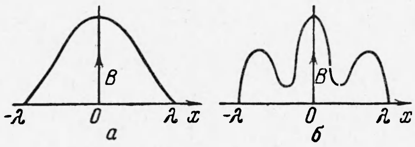
$$\Delta I = R\alpha^{**} I_{\lambda c}\left(\frac{1}{\rho_{\min}} - \frac{1}{\rho_{\max}}\right)\left(1 + \frac{R\alpha^*}{\rho_{\min}}\right)^{-1} + \frac{2}{\rho_{\min}}\left(1 + \frac{R\alpha^*}{\rho_{\min}}\right)^{-1} \times$$
$$\times \left\{[P^1(0, \delta) - P^1(0, -\delta)]\frac{\alpha^*}{2} + \frac{2\delta}{\pi}\int_1^\infty S(x, \delta) \sum\left(\frac{x}{\lambda}\right) d\left(\frac{x}{\lambda}\right) + \right.$$
$$\left. + \int_0^\lambda S(x, \delta)\, dx - \left(1 - \frac{\rho_{\min}}{\rho_{\max}}\right)\frac{V}{c}\int_{x_1}^\lambda B(x)\, dx\right\} \qquad (3.2)$$

Здесь через $I_{\lambda c}$ обозначена величина [1]

$$I_{\lambda c} = \frac{1}{\rho_{\min}}\left(1 + \frac{R\alpha^*}{\rho_{\min}}\right)^{-1}\frac{V}{c}\int_{-\lambda}^{\lambda} B(x)\, dx \qquad (3.3)$$

равная полному току при $\rho = \rho_{\min} = \text{const}$.

Ниже приводятся значения отношения $\Delta I / pI_{\lambda c}$, вычисленные по формулам (3.2) и (3.3) при $\lambda / \delta = 1$, $R / \rho_{\min} = 1$ для трех вариантов задания функции $B(x)$, указанных на фиг. 4.



Фиг. 6

$$\frac{\Delta I}{pI_{\lambda c}} = 0.136\left(1 + \frac{\rho_{\min}}{\rho_{\max}}\right) + 0.104 \qquad (a)$$

$$\frac{\Delta I}{pI_{\lambda c}} = 0.198\left(1 + \frac{\rho_{\min}}{\rho_{\max}}\right) + 0.078 \qquad (б)$$

$$\frac{\Delta I}{pI_{\lambda c}} = 0.271\left(1 + \frac{\rho_{\min}}{\rho_{\max}}\right) + 0.041 \qquad (в)$$

Рассмотрим предельный случай $\rho_{\max} = \infty$ ($\sigma_{\min} = 0$). Параметр p при этом равен единице. В области, где $\rho = \rho_{\max}$, ток не протекает, а в той области, где $\rho = \rho_{\min}$, векторные линии $\mathbf{j}$ и grad ω_2, согласно условию Вейерштрасса (1.5), должны быть антипараллельны.

Легко проверить, что поставленным условиям удовлетворяет в известных случаях следующее распределение проводимости:

$$\rho = \begin{cases}\rho_{\max} = \infty, & |x| > l \\ \rho_{\min}, & |x| < l\end{cases} \qquad (l \leqslant \lambda) \qquad (3.4)$$

Составляющие плотности тока выражаются при этом следующими формулами:

$$\zeta^1 = 0, \qquad \zeta^2 = 0 \qquad \text{при } |x| > l \qquad (3.5)$$

$$\zeta^2 = \frac{V}{c\rho_{\min}}\left[B(x) - \frac{R}{\rho_{\min}}\frac{l}{\delta}\left(1 + \frac{R}{\rho_{\min}}\frac{l}{\delta}\right)^{-1}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} B(x)\, dx\right] \qquad \text{при } |x| < l$$

Функционал I равен

$$I_l = \frac{G_l}{\rho_{\min}}\left(1 + \frac{R}{\rho_{\min}}\frac{l}{\delta}\right)^{-1}, \qquad G_l = \frac{V}{c}\int_{-l}^{l} B(x)\, dx \qquad (3.6)$$

Электрическое поле однородно; единственная его y-составляющая равна $-I_l R / 2\delta$. В рассматриваемом случае задача одномерна (зависимость от координаты y отсутствует); нетрудно видеть, что в этих условиях вектор grad ω_2 имеет лишь одну y-составляющую, которая постоянна и отрицательна. Условие (2.3) накладывает ограничение на абсциссы $\pm l$ вертикальных линий разрыва проводимости.

Именно, оно требует, чтобы линии разрыва были критическими: плотность тока на этих линиях должна обращаться в нуль

$$\zeta^2(\pm l) = 0 \qquad (3.7)$$

Последнее соотношение вместе с (3.5) приводит к уравнению для определения l. Если наименьший корень этого уравнения не превосходит λ, то этот корень и дает искомое значение абсциссы.

Существование такого корня (а значит, и существование оптимального режима (3.4)) определяется, очевидно, профилем внешнего магнитного поля $B(x)$. Формула (3.5), в частности, показывает, что для реализуемости оптимального режима (3.4) необходимо, чтобы функция $B(x)$ достаточно резко убывала к концам интервала $(-\lambda, \lambda)$ (фиг. 6*а*); в случае, если функция $B(x)$ не монотонна, оптимальное распределение проводимости может иметь вид зон максимальной проводимости, распространенных на отрезки оси x около максимумов $B(x)$ (фиг. 6*б*) и отделенных одна от другой областями нулевой проводимости.

С целью проверки докажем непосредственно, что в оптимальном режиме (3.4) ток I_l превышает ток $I_{\lambda c}$, снимаемый с электродов при повсюду одинаковой проводимости, равной $1/\rho_{\min}$ (ток $I_{\lambda c}$ определяется формулой (3.3)). Если магнитное поле задано функцией типа фиг. 6*а*, то имеет место неравенство

$$I_l \geqslant I_\lambda = \frac{G_\lambda}{\rho_{\min}}\left(1 + \frac{R}{\rho_{\min}}\frac{\lambda}{\delta}\right)^{-1}$$

его справедливость обусловлена тем фактом, что на отрезках (l, λ), $(-l, -\lambda)$ токи текут в обратном направлении (см. (3.5) и (3.7)).

Неравенство

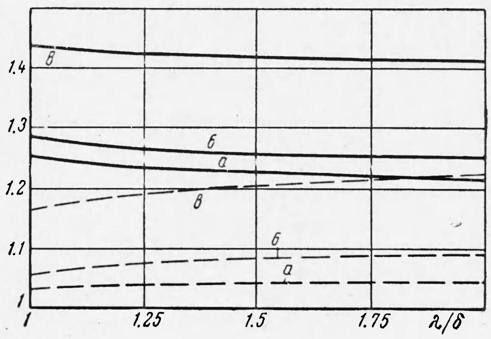
$$\frac{\alpha^*\delta}{\lambda} = \frac{\pi K(\sqrt{1-k_1^2})}{2\,\mathrm{arch}\,(k_1^{-1})\,K(k_1)} > 1$$

справедливое при $0 < k_1 < 1$, убеждает в том, что

$$I_\lambda > I_{\lambda c}$$

и, следовательно

$$I_l > I_{\lambda c}$$



Фиг. 7

На фиг. 7 представлены зависимости отношений $I_l / I_{\lambda c}$ (сплошные кривые), I_l / I_λ (штриховые кривые) от параметра λ / δ при $R / \rho_{\min} = 1$.

Автор глубоко благодарен Г. А. Гринбергу за многочисленные полезные дискуссии, а также Т. Ю. Андриевской и Н. В. Королевой за выполнение трудоемких численных расчетов.

Поступила 30 XII 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Ватажин А. Б. Магнитогидродинамическое течение в плоском канале с конечными электродами. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 1.
2. Лурье К. А. Оптимальное управление проводимостью жидкости, движущейся по каналу в магнитном поле. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2.
3. Ватажин А. Б. К решению некоторых краевых задач магнитогидродинамики. ПММ, 1961, т. 25, вып. 5.
4. Лурье К. А. Задача Майера—Больца для кратных интегралов и оптимизация поведения систем с распределенными параметрами. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.
5. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. IV. Гостехтеоретиздат, 1957.
6. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Физматгиз, 1958.