ПМТФ, № 5, 1973

УДК 517.946

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЛОКАЛИЗАЦИЯ ТЕПЛОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ПРИ НАГРЕВАНИИ СРЕД С ОБЪЕМНЫМ ПОГЛОЩЕНИЕМ ТЕПЛА

К. Б. Павлов

(Москва)

Построены решения типа тепловых волн, описывающие стационарные и нестационарные процессы нагревания сред с постоянной теплопроводностью и с объемным поглощением тепла.

В случае изотропных сред, коэффициент теплопроводности которых $\varkappa$ является степенной функцией температуры T, $\varkappa = \varkappa_0 T^k$, $\varkappa_0$, $k = \text{const} > 0$, тепловые возмущения распространяются от теплового источника с конечной скоростью [1]. Если в среде имеется объемное поглощение тепла, то продвижение фронта тепловой волны, разделяющего области с $\nabla T = 0$ и $\nabla T \neq 0$, может происходить лишь на определенное конечное расстояние [2].

Пространственная локализация тепловых возмущений и ограниченное продвижение фронта тепловой волны могут быть обнаружены также в случае сред с постоянным коэффициентом теплопроводности $\varkappa_0$ при наличии в них объемного поглощения тепла — «тепловых стоков». Ниже рассматривается процесс нагревания изотропной среды с $\varkappa = \varkappa_0$, заполняющей полупространство $z > 0$ и имеющей постоянную начальную температуру $T_0 = \text{const} > 0$, когда температура на поверхности $z = 0$, начиная с момента времени $t = 0$, изменяется по закону $T = T_w(t)$.

Если в среде с постоянной теплопроводностью действуют тепловые стоки f, то в предположении существования фронта тепловой волны $z = \zeta(t)$ распределение температуры $T(z, t)$ при $0 \leqslant z \leqslant \zeta(t)$ определяется из решения задачи

$$\partial T / \partial t = a\partial^2 T / \partial z^2 - f(z, t, T), \quad T(z, 0) = T_0 \tag{1}$$

$$T(0, t) = T_w(t), \quad T[\zeta(t), t] = T_0, \quad \frac{\partial T}{\partial z}[\zeta(t), t] = 0$$

Здесь и далее $a = \varkappa_0 c^{-1}\rho^{-1}$ — постоянный коэффициент температуропроводности, c и ρ — теплоемкость и плотность среды. В открытой области D фазовой плоскости zt $(0 < z < \zeta(t),\ 0 < t < \tau < \infty)$ требуется определить функцию $T(z, t)$, непрерывную вместе со своей производной $\partial T(z, t)/\partial z$ всюду в замкнутой области $\bar{D}$, за исключением, может быть, одной точки (0, 0). Решение задачи (1) предполагает определение закона движения неизвестной границы $z = \zeta(t)$ — фронта тепловой волны. При $\zeta(t) < z < \infty$, $0 < t < \tau < \infty$ распределение температуры $T(z, t) = T_0$.

Существование областей с различным аналитическим выражением для распределения температуры, характерное для решений типа тепловой волны, в конечном счете оказывается связанным с существованием особых решений обыкновенных дифференциальных уравнений, причем в этом отношении нет никакого различия между средами с постоянной теплопроводностью и средами с теплопроводностью, зависящей от температуры

Для выяснения аналитической природы решений типа тепловой волны рассмотрим задачу об определении стационарного распределения температуры в среде с постоянной теплопроводностью и тепловыми стоками вида

(2) $$f = \gamma T^n \theta (T - T_0), \quad T \geqslant T_0$$

$$\gamma = \mathrm{const} > 0, \; n = \mathrm{const} > -1, \; \theta (T - T_0) = \lim_{N\to\infty} (T - T_0)^{1/N}$$

если на поверхности $z = 0$ поддерживается постоянное значение температуры $T_m > T_0$. Тепловые волны, найденные при решении (1), могут быть получены из задачи

(3) $$\partial T/\partial t = a\partial^2 T/\partial z^2 - f(z, t, T), \qquad T(z, 0) = T_0$$

$$T(0, t) = T_w(t), \quad T(\infty, t) = T_0, \quad \frac{\partial T}{\partial z}(\infty, t) = 0$$

$$T[\zeta(t) - 0, t] = T[\zeta(t) + 0, t], \quad \frac{\partial T}{\partial z}[\zeta(t) - 0, t] = \frac{\partial T}{\partial z}[\zeta(t) + 0, t]$$

где $0 < z < \infty$, $0 < t < \tau < \infty$. Тождественность решений задач (1) и (3) при одном и том же выражении тепловых стоков f может быть установлена, если представить оба решения в интегральной форме с помощью функции источника для полубесконечной прямой [3]. Интегрируя один раз стационарное уравнение (3) с учетом предельных условий (3) при $z \to \infty$, можно получить

(4) $$dT/dz = A(T^{n+1} - T_0^{n+1})^{1/2}, \qquad A \equiv -[2\gamma/a(1+n)]^{1/2}$$

Очевидно, что уравнению (4) удовлетворяет решение $T = T_0$, а частное решение, проходящее на плоскости zT через точку $(0, T_{m0})$ записывается в виде

(5) $$Az = \int_{T_{m0}}^{T} \frac{dT}{(T^{n+1} - T_0^{n+1})^{1/2}}$$

При $T \to T_0$ интеграл в (5) становится несобственным; он сходится, если $T_0 \geqslant 0$ при $-1 < n < 1$, или, если $T_0 > 0$ при $n \geqslant 1$. В этих случаях $z \to \zeta_0 < \infty$, т. е. на плоскости zT интегральная кривая (5) в точке (ζ_0, T_0) приходит на прямую $T = T_0$. Следовательно, решение $T = T_0$ оказывается особым решением, так как во всех его точках нарушено свойство единственности [4]. На плоскости zT особое решение $T = T_0$ является огибающей семейства частных решений уравнения (4). Именно поэтому стационарное решение задачи (2), (3) удается представить в виде функции, склеенной в точке $z = \zeta_0$ из частного решения (5), которое определяет распределение температуры в возмущенной области при $0 \leqslant z \leqslant \zeta_0$, и особого решения $T = T_0$, которое определяет постоянную температуру в невозмущенной области при $\zeta_0 \leqslant z < \infty$.

Анализируя автомодельные задачи, описывающие нестационарные процессы нагревания сред, рассмотренные в [1, 2, 5], а также в данной работе, можно убедиться, что обыкновенное дифференциальное уравнение, которое необходимо интегрировать при решении таких задач, имеет особое решение. Существование особого решения обеспечивает возможность склеивания интегральных поверхностей $T(z, t) \neq \mathrm{const}$ и $T(z, t) = T_0 = \mathrm{const}$ вдоль линии $z = \zeta(t)$, описывающей закон движения фронта тепловой волны.

Связь между решениями типа тепловых волн и существованием особых решений соответствующих обыкновенных дифференциальных уравнений может быть также установлена для произвольных нестационарных режимов нагревания сред. Действительно, для достаточно малых интервалов времени, в течение которых скорость распространения тепловой волны можно считать постоянной, в системе координат, связанной с фронтом волны, распределение температуры вблизи фронта описывается обыкновенным дифференциальным уравнением, имеющим особое решение. Особое решение всегда соответствует постоянному значению температуры в невозмущенной области среды, в то время как распределение температуры в возмущенной области описывается частным решением, склеенным с особым на поверхности фронта тепловой волны.

Перейдем к рассмотрению конкретных примеров решений типа тепловых волн, описывающих некоторые режимы нагревания среды с постоянной теплопроводностью и объемным поглощением тепла.

Пусть

$$f = f_1 \equiv \gamma_1 \exp(\alpha [z - \zeta(t)])\, \theta(T - T_0) \tag{6}$$

$$\alpha,\ T_0 = \mathrm{const} \geqslant 0, \quad \gamma_1 = \mathrm{const} > 0$$

Если температура стенки $z = 0$ монотонно растет в соответствии с выражением

$$T_w(t) = T_0 + \frac{\gamma_1}{v\alpha}\left[\frac{a\alpha \exp(v^2 t/a) + v \exp(-\alpha v t)}{v + a\alpha} - 1\right], \quad v = \mathrm{const} > 0 \tag{7}$$

то распределение температуры в среде должно быть определено при решении задачи (1), (6), (7); в результате можно получить

$$T(z, t) = \tag{8}$$

$$= \begin{cases} T_0 + \dfrac{\gamma_1}{v\alpha}\left[\dfrac{a\alpha \exp[-v(z - vt)/q] + v \exp[\alpha(z - vt)]}{v + a\alpha} - 1\right] & \text{при } 0 \leqslant z \leqslant \zeta(t) \\ T_0 & \text{при } \zeta(t) \leqslant z < \infty \end{cases}$$

$$\zeta(t) = vt$$

Таким образом, в среде существует фронт тепловой волны $z = \zeta(t)$, который движется с постоянной скоростью от поверхности $z = 0$.

Отметим, что задача (1), (6) имеет стационарное решение, если на поверхности $z = 0$ поддерживается постоянное значение температуры $T_w(t) = T_{m0} = \mathrm{const}$, $T_{m0} > T_0$. В этом случае распределение температуры в среде определяется выражениями

$$T(z) = \begin{cases} T_0 + \dfrac{\gamma_1}{a\alpha^2}[\exp[\alpha(z - \zeta_0)] - \alpha(z - \zeta_0) - 1] & \text{при } 0 \leqslant z \leqslant \zeta_0 \\ T_0 & \text{при } \zeta_0 \leqslant z < \infty \end{cases} \tag{9}$$

причем положение неподвижного фронта тепловой волны $z = \zeta_0$, т. е. границы прогретого слоя среды, прилегающего к нагретой поверхности $z = 0$, должно быть найдено при решении трансцендентного уравнения

$$\exp(-\alpha\zeta_0) + \alpha\zeta_0 = 1 + (a\alpha^2/\gamma_1)(T_{m0} - T_0) \tag{10}$$

Определим распределение температуры при установившемся колебательном режиме температуры поверхности $z = 0$

$$T_w(t) = T_{m0} + T_{m1} e^{i\omega t}, \quad T_{m0}, T_{m1}, \omega = \mathrm{const} > 0, \tag{11}$$

$$T_{m0} - T_0 > T_{m1}$$

Будем считать для простоты, что в выражении тепловых стоков (9) $\alpha \equiv 0$, тогда решение задачи без начальных условий (1), (6), (11) целесообразно представить в форме

(12)

$$T(z,t)=\begin{cases} T_{m0}+T_{m1}\operatorname{ch}\Omega_1 z\exp(i\omega t)+\dfrac{\gamma_1 z^2}{2a}+A_0 z+\sum\limits_{l=0}^{\infty}A_l\operatorname{sh}\Omega_l z\exp(il\omega t) & \text{при } 0\leqslant z\leqslant\zeta(t)\\ T_0 & \text{при } \zeta(t)\leqslant z<\infty\end{cases}$$

$$\zeta(t)=\sum_{j=0}^{\infty}\zeta_j\exp(ij\omega t),\quad \Omega_l=(1+i)\sqrt{\omega l/2a},\quad A_0,\ A_1,\ldots,\ \zeta_0,\ \zeta_1,\ldots \text{— const}$$

Функция $T(z, t)$ (12) удовлетворяет дифференциальному уравнению и краевому условию (1) на поверхности $z = 0$ с $T_w(t)$, определенной в соответствии с (11). Из выражений $T(z, t)$ и $\zeta(t)$ (12) и краевых условий (1) на фронте тепловой волны $z = \zeta(t)$ можно найти значения констант A_0, $A_1, \ldots, \zeta_0, \zeta_1, \ldots$

(13)
$$\zeta_0=\sqrt{\frac{2a}{\gamma_1}(T_{m0}-T_0)},\quad \zeta_1=\frac{aT_{m1}\Omega_1}{\gamma_1\operatorname{sh}\Omega_1\zeta_0},$$
$$\zeta_2=-\frac{a^2T_{m1}^2\Omega_1^2\Omega_2\operatorname{cth}\Omega_2\zeta_0}{2\gamma_1\operatorname{sh}^2\Omega_1\zeta_0}\ldots$$
$$A_0=-\sqrt{\frac{2\gamma_1}{a}(T_{m0}-T_0)},\quad A_1=-T_{m1}\operatorname{cth}\Omega_1\zeta_0,$$
$$A_2-\frac{aT_{m1}^2\Omega_1^2}{2\gamma_1\operatorname{sh}^2\Omega_1\zeta_0\operatorname{sh}\Omega_2\zeta_0}\ldots$$

Отметим, что выражение ζ_0 (13) определяет стационарное положение фронта тепловой волны в среде, если на поверхности $z = 0$ поддерживается постоянное значение температуры $T_{m0} > T_0 > 0$.

Предположим теперь, что в среде действуют тепловые стоки вида

(14)
$$f=f_2\equiv {}^1/_2\,\gamma_2 t^{-1/2}\,\theta(T),\qquad \gamma_2=\text{const}>0$$

Если температура поверхности $z = 0$ изменяется по закону

(15)
$$T_w(t)=\gamma_2[\exp(\xi_0^2/2)-1]\sqrt{t},\quad \xi_0=\text{const}>0$$

а начальная температура среды $T_0 = 0$, то распределение температуры в среде должно быть определено при решении автомодельной задачи (1), (14), (15); в результате можно получить

(16)

$$T(z,t)=\begin{cases}\gamma_2\sqrt{t}\left\{\exp[(\xi_0^2-\xi^2)/2]+\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\xi\exp(\xi_0/2)[\Phi(\xi)-\Phi(\xi_0)]-1\right\} & \text{при } 0\leqslant z\leqslant\zeta(t)\\ 0 & \text{при } \zeta(t)\leqslant z<\infty\end{cases}$$

$$\zeta(t)=\xi_0\sqrt{2at},\quad \xi=z/\sqrt{2at}$$

где $\Phi(\xi)$ и $\Phi(\xi_0)$ — интегралы ошибок.

Рассмотрим тепловые стоки вида

(17)
$$f=f_3\equiv\gamma_3 T\theta(T-T_0),\qquad \gamma_3,\ T_0=\text{const}>0$$

Заметим, что принципиально возможно рассмотрение более общего закона действия тепловых стоков f_3, содержащего в правой части выражения (17) экспоненциальный множитель $\exp(\alpha[z - \zeta(t)])$, однако соответствующие результаты здесь не приводятся из-за громоздкости окончательных соотношений.

Если температура поверхности $z = 0$ колеблется по гармоническому закону (11), то распределение температуры в среде должно быть определено при решении задачи без начальных условий (1), (11), (17). Соответствующие вычисления приводят к выражениям

$$T(z,t) = \begin{cases} T_{m0}\operatorname{ch}\Omega_0 z + T_{m1}\operatorname{ch}\Omega_1 z\exp i\omega t + \sum\limits_{l=0}^{\infty} A_l \operatorname{sh}\Omega_l z\exp il\omega t & \text{при } 0 \leqslant z \leqslant \zeta(t) \\ T_0 & \text{при } \zeta(t) \leqslant z < \infty \end{cases} \tag{18}$$

$$\zeta(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \zeta_j \exp ij\omega t$$

$$\Omega_l = \left(\frac{il\omega + \gamma_3}{a}\right)^{1/2}, \quad \zeta_0 = \frac{1}{\Omega_0} Ar\operatorname{ch}\frac{T_{m0}}{T_0}, \quad \zeta_1 = \frac{T_{m1}\Omega_1}{T_0\Omega_0^2 \operatorname{sh}\Omega_1\zeta_0}$$

$$\zeta_2 = -\frac{T_{m_1}^2 \Omega_1^2\Omega_2 \operatorname{cth}\Omega_2\zeta_0}{2T_0^2\Omega_0^4 \operatorname{sh}^2\Omega_1\zeta_0}\ldots, \quad A_0 = -\sqrt{T_{m0}^2 - T_0^2} \tag{19}$$

$$A_1 = -T_{m1}\operatorname{cth}\Omega_1\zeta_0, \quad A_2 = \frac{T_{m1}^2\Omega_1^2}{2T_0\Omega_0^2 \operatorname{sh}\Omega_2\zeta_0 \operatorname{sh}^2\Omega_1\zeta_0}\ldots$$

Выражение ζ_0 (19) определяет стационарное положение фронта тепловой волны в среде, если на поверхности $z = 0$ поддерживается постоянное значение температуры $T_{m0} > T_0 > 0$.

Если температура поверхности $z = 0$ изменяется согласно выражению

$$T_w(t) = T_0 e^{\beta vt}(\operatorname{ch}\delta vt - \beta\delta^{-1}\operatorname{sh}\delta vt), \quad v = \text{const} > 0 \tag{20}$$

$$\beta = v/2a, \quad \delta = \sqrt{v^2/4a^2 + \gamma_3/a}$$

то распределение температуры в среде, полученное в результате решения автомодельной задачи (1), (17), (20), имеет следующий вид

$$T(z,t) = \begin{cases} T_0\exp[-\beta(z - vt)]\left[\operatorname{ch}\delta(z - vt) + \frac{\beta}{\delta}\operatorname{sh}\delta(z - vt)\right] & \text{при } 0 \leqslant z \leqslant \zeta(t) \\ T_0 & \text{при } \zeta(t) \leqslant z < \infty \end{cases} \tag{21}$$

$$\zeta(t) = vt$$

т. е. в среде с постоянной скоростью v движется фронт тепловой волны $z = \zeta(t)$. Предположим, что в среде с $T_0 \equiv 0$ действуют тепловые стоки вида

$$f = f_4 \equiv \gamma_4 T^\beta \theta(T), \quad \beta, \gamma_4 = \text{const}, \ |\beta| < 1, \quad \gamma_4 > 0 \tag{22}$$

В случае, когда температура поверхности $z = 0$ $T_w(t) = T_{m0} = \text{const} > 0$, в среде имеет место следующее распределение температуры [2]:

$$T(z) = \begin{cases} T_{m0}(1 - z/\zeta_0)^{2/(1-\beta)} & \text{при } 0 \leqslant z \leqslant \zeta_0 \\ 0 & \text{при } \zeta_0 \leqslant z < \infty \end{cases} \tag{23}$$

$$\zeta_0 = [2a(1 + \beta)/\gamma_4 T_{m0}^{\beta-1}(1 - \beta)^2]^{1/2}$$

Если температура поверхности $z = 0$ в начальный момент времени $t = 0$ изменяется скачком от $T_0 = 0$ до $T_w(t) = T_{m0} = \text{const}$, то учитывая стационарное решение (23), приближенное выражение распределения температуры можно искать в виде

$$T(z, t) = T_{m0}[1 - z/\zeta(t)]^{2/(1-\beta)} \tag{24}$$

Так как

$$T[\zeta(t), t] = \frac{\partial T}{\partial z}[\zeta(t), t] = 0$$

то при интегрировании дифференциального уравнения (1) по z от 0 до $\zeta(t)$ можно получить уравнение интегрального теплового баланса

$$\frac{d}{dt}\int_0^{\zeta(t)} T(z, t)\,dz = -a\frac{\partial T}{\partial z}(0, t) - \gamma_4\int_0^{\zeta(t)} T^\beta(z, t)\,dz \tag{25}$$

Подставляя выражение (24) в уравнение (25), можно получить приближенный закон движения фронта тепловой волны $z = \zeta(t)$, удовлетворяющий условию $\zeta(0) = 0$

$$\zeta(t) = \zeta_0\left\{1 - \exp\left[-\frac{4\gamma_4 T_{m0}^{\beta-1}(1-\beta)}{1+\beta}t\right]\right\}^{1/2} \tag{26}$$

где ζ_0 определено в соответствии с (23). В том же приближении можно оценить время релаксации к стационарному режиму (23)

$$\tau_R \approx T_{m0}^{1-\beta}(1+\beta)/4\gamma_4(1-\beta) \tag{27}$$

Приведенные примеры действительно указывают на то, что в средах с объемным поглощением тепла могут образовываться локализованные в пространстве тепловые волны, фронт которых распространяется с конечной скоростью от источника тепловых возмущений. Необходимость исследования решений уравнения теплопроводности с членом, описывающим стоки f, возникает, в частности, при рассмотрении процесса распространения тепла в тонком стержне или тонкой пластине, сопровождающегося передачей тепла в окружающее пространство. Отметим также, что указанные решения могут быть успешно применены при рассмотрении других процессов переноса, например процесса диффузии газов в пористых средах с высокой адсорбционной способностью.

Поступила 18 IV 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зельдович Я. Б., Компанеец А. С.* К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры. Сборник, посвященный 70-летию А. Ф. Иоффе. М., Изд-во АН СССР, 1950, стр. 61—71.
2. *Мартинсон Л. К., Павлов К. Б.* К вопросу о пространственной локализации тепловых возмущений в теории нелинейной теплопроводности. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1972, т. 12, № 4, стр. 1048—1053.
3. *Павлов К. Б.* Нестационарные МГД-течения вязкопластических сред в плоских каналах. Магнитная гидродинамика, 1972, № 4, стр. 35—40.
4. *Матвеев Н. М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М., «Высшая школа», 1967.
5. *Баренблатт Г. И.* О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде. ПММ, 1952, т. 16, вып. 1, стр. 67—78.