

**ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЛОКАЛИЗАЦИЯ ТЕПЛОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ПРИ НАГРЕВАНИИ СРЕД С ОБЪЕМНЫМ ПОГЛОЩЕНИЕМ ТЕПЛА**

**К. Б. Павлов**

(Москва)

Построены решения типа тепловых волн, описывающие стационарные и нестационарные процессы нагревания сред с постоянной теплопроводностью и с объемным поглощением тепла.

В случае изотропных сред, коэффициент теплопроводности которых  $\kappa$  является степенной функцией температуры  $T$ ,  $\kappa = \kappa_0 T^k$ ,  $\kappa_0, k = \text{const} > 0$ , тепловые возмущения распространяются от теплового источника с конечной скоростью [1]. Если в среде имеется объемное поглощение тепла, то продвижение фронта тепловой волны, разделяющего области с  $\nabla T = 0$  и  $\nabla T \neq 0$ , может происходить лишь на определенное конечное расстояние [2].

Пространственная локализация тепловых возмущений и ограниченное продвижение фронта тепловой волны могут быть обнаружены также в случае сред с постоянным коэффициентом теплопроводности  $\kappa_0$  при наличии в них объемного поглощения тепла — «тепловых стоков». Ниже рассматривается процесс нагревания изотропной среды с  $\kappa = \kappa_0$ , заполняющей полупространство  $z > 0$  и имеющей постоянную начальную температуру  $T_0 = \text{const} > 0$ , когда температура на поверхности  $z = 0$ , начиная с момента времени  $t = 0$ , изменяется по закону  $T = T_w(t)$ .

Если в среде с постоянной теплопроводностью действуют тепловые стоки  $f$ , то в предположении существования фронта тепловой волны  $z = \zeta(t)$  распределение температуры  $T(z, t)$  при  $0 \leq z \leq \zeta(t)$  определяется из решения задачи

$$(1) \quad \begin{aligned} \partial T / \partial t &= a \partial^2 T / \partial z^2 - f(z, t, T), \quad T(z, 0) = T_0 \\ T(0, t) &= T_w(t), \quad T[\zeta(t), t] = T_0, \quad \frac{\partial T}{\partial z}[\zeta(t), t] = 0 \end{aligned}$$

Здесь и далее  $a = \kappa_0 c^{-1} \rho^{-1}$  — постоянный коэффициент температуропроводности,  $c$  и  $\rho$  — теплоемкость и плотность среды. В открытой области  $D$  фазовой плоскости  $zt$  ( $0 < z < \zeta(t)$ ,  $0 < t < \tau < \infty$ ) требуется определить функцию  $T(z, t)$ , непрерывную вместе со своей производной  $\partial T(z, t) / \partial z$  всюду в замкнутой области  $D$ , за исключением, может быть, одной точки  $(0, 0)$ . Решение задачи (1) предполагает определение закона движения неизвестной границы  $z = \zeta(t)$  — фронта тепловой волны. При  $\zeta(t) < z < \infty$ ,  $0 < t < \tau < \infty$  распределение температуры  $T(z, t) = T_0$ .

Существование областей с различным аналитическим выражением для распределения температуры, характерное для решений типа тепловой волны, в конечном счете оказывается связанным с существованием особых решений обыкновенных дифференциальных уравнений, причем в этом отношении нет никакого различия между средами с постоянной теплопроводностью и средами с теплопроводностью, зависящей от температуры.

Для выяснения аналитической природы решений типа тепловой волны рассмотрим задачу об определении стационарного распределения температуры в среде с постоянной теплопроводностью и тепловыми стоками вида

$$(2) \quad f = \gamma T^n \theta (T - T_0), \quad T \geq T_0 \\ \gamma = \text{const} > 0, \quad n = \text{const} > -1, \quad \theta (T - T_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} (T - T_0)^{1/N}$$

если на поверхности  $z = 0$  поддерживается постоянное значение температуры  $T_m > T_0$ . Тепловые волны, найденные при решении (1), могут быть получены из задачи

$$(3) \quad \partial T / \partial t = a \partial^2 T / \partial z^2 - f(z, t, T), \quad T(z, 0) = T_0 \\ T(0, t) = T_w(t), \quad T(\infty, t) = T_0, \quad \frac{\partial T}{\partial z}(\infty, t) = 0 \\ T[\zeta(t) - 0, t] = T[\zeta(t) + 0, t], \quad \frac{\partial T}{\partial z}[\zeta(t) - 0, t] = \frac{\partial T}{\partial z}[\zeta(t) + 0, t]$$

где  $0 < z < \infty$ ,  $0 < t < \tau < \infty$ . Тождественность решений задач (1) и (3) при одном и том же выражении тепловых стоков  $f$  может быть установлена, если представить оба решения в интегральной форме с помощью функции источника для полубесконечной прямой [3]. Интегрируя один раз стационарное уравнение (3) с учетом предельных условий (3) при  $z \rightarrow \infty$ , можно получить

$$(4) \quad dT/dz = A (T^{n+1} - T_0^{n+1})^{1/2}, \quad A \equiv -[2\gamma/a(1+n)]^{1/2}$$

Очевидно, что уравнению (4) удовлетворяет решение  $T = T_0$ , а частное решение, проходящее на плоскости  $zT$  через точку  $(0, T_{m0})$  записывается в виде

$$(5) \quad Az = \int_{T_{m0}}^T \frac{dT}{(T^{n+1} - T_0^{n+1})^{1/2}}$$

При  $T \rightarrow T_0$  интеграл в (5) становится несобственным; он сходится, если  $T_0 \geq 0$  при  $-1 < n < 1$ , или, если  $T_0 > 0$  при  $n \geq 1$ . В этих случаях  $z \rightarrow \xi_0 < \infty$ , т. е. на плоскости  $zT$  интегральная кривая (5) в точке  $(\xi_0, T_0)$  приходит на прямую  $T = T_0$ . Следовательно, решение  $T = T_0$  оказывается особым решением, так как во всех его точках нарушено свойство единственности [4]. На плоскости  $zT$  особое решение  $T = T_0$  является огибающей семейства частных решений уравнения (4). Именно поэтому стационарное решение задачи (2), (3) удается представить в виде функции, склеенной в точке  $z = \xi_0$  из частного решения (5), которое определяет распределение температуры в возмущенной области при  $0 \leq z \leq \xi_0$ , и особого решения  $T = T_0$ , которое определяет постоянную температуру в невозмущенной области при  $\xi_0 \leq z < \infty$ .

Анализируя автомоделные задачи, описывающие нестационарные процессы нагревания сред, рассмотренные в [1, 2, 5], а также в данной работе, можно убедиться, что обыкновенное дифференциальное уравнение, которое необходимо интегрировать при решении таких задач, имеет особое решение. Существование особого решения обеспечивает возможность склеивания интегральных поверхностей  $T(z, t) \neq \text{const}$  и  $T(z, t) = T_0 = \text{const}$  вдоль линии  $z = \zeta(t)$ , описывающей закон движения фронта тепловой волны.

Связь между решениями типа тепловых волн и существованием особых решений соответствующих обыкновенных дифференциальных уравнений

может быть также установлена для произвольных нестационарных режимов нагревания сред. Действительно, для достаточно малых интервалов времени, в течение которых скорость распространения тепловой волны можно считать постоянной, в системе координат, связанной с фронтом волны, распределение температуры вблизи фронта описывается обыкновенным дифференциальным уравнением, имеющим особое решение. Особое решение всегда соответствует постоянному значению температуры в невозмущенной области среды, в то время как распределение температуры в возмущенной области описывается частным решением, склеенным с особым на поверхности фронта тепловой волны.

Перейдем к рассмотрению конкретных примеров решений типа тепловых волн, описывающих некоторые режимы нагревания среды с постоянной теплопроводностью и объемным поглощением тепла.

Пусть

$$(6) \quad f = f_1 \equiv \gamma_1 \exp(\alpha[z - \zeta(t)]) \theta(T - T_0) \\ \alpha, T_0 = \text{const} \geq 0, \quad \gamma_1 = \text{const} > 0$$

Если температура стенки  $z = 0$  монотонно растет в соответствии с выражением

$$(7) \quad T_w(t) = T_0 + \frac{\gamma_1}{v\alpha} \left[ \frac{a\alpha \exp(v^2 t/a) + v \exp(-\alpha vt)}{v + a\alpha} - 1 \right], \quad v = \text{const} > 0$$

то распределение температуры в среде должно быть определено при решении задачи (1), (6), (7); в результате можно получить

$$(8) \quad T(z, t) = \begin{cases} T_0 + \frac{\gamma_1}{v\alpha} \left[ \frac{a\alpha \exp[-v(z-vt)/a] + v \exp[\alpha(z-vt)]}{v + a\alpha} - 1 \right] & \text{при } 0 \leq z \leq \zeta(t) \\ T_0 & \text{при } \zeta(t) \leq z < \infty \end{cases} \\ \zeta(t) = vt$$

Таким образом, в среде существует фронт тепловой волны  $z = \zeta(t)$ , который движется с постоянной скоростью от поверхности  $z = 0$ .

Отметим, что задача (1), (6) имеет стационарное решение, если на поверхности  $z = 0$  поддерживается постоянное значение температуры  $T_w(t) = T_{m0} = \text{const}$ ,  $T_{m0} > T_0$ . В этом случае распределение температуры в среде определяется выражениями

$$(9) \quad T(z) = \begin{cases} T_0 + \frac{\gamma_1}{a\alpha^2} [\exp[\alpha(z - \zeta_0)] - \alpha(z - \zeta_0) - 1] & \text{при } 0 \leq z \leq \zeta_0 \\ T_0 & \text{при } \zeta_0 \leq z < \infty \end{cases}$$

причем положение неподвижного фронта тепловой волны  $z = \zeta_0$ , т. е. границы прогретого слоя среды, прилегающего к нагретой поверхности  $z = 0$ , должно быть найдено при решении трансцендентного уравнения

$$(10) \quad \exp(-\alpha\zeta_0) + \alpha\zeta_0 = 1 + (a\alpha^2/\gamma_1)(T_{m0} - T_0)$$

Определим распределение температуры при установившемся колебательном режиме температуры поверхности  $z = 0$

$$(11) \quad T_w(t) = T_{m0} + T_{m1} e^{i\omega t}, \quad T_{m0}, T_{m1}, \omega = \text{const} > 0, \\ T_{m0} - T_0 > T_{m1}$$

Будем считать для простоты, что в выражении тепловых стоков (9)  $\alpha \equiv 0$ , тогда решение задачи без начальных условий (1), (6), (11) целе-

сообразно представить в форме

(12)

$$T(z, t) = \begin{cases} T_{m0} + T_{m1} \operatorname{ch} \Omega_1 z \exp(i\omega t) + \frac{\gamma_1 z^2}{2a} + A_0 z + \sum_{l=0}^{\infty} A_l \operatorname{sh} \Omega_l z \exp(i\omega t) \\ T_0 \end{cases} \begin{array}{l} \text{при } 0 \leq z \leq \zeta(t) \\ \text{при } \zeta(t) \leq z < \infty \end{array}$$

$$\zeta(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \zeta_j \exp(ij\omega t), \quad \Omega_l = (1+i)\sqrt{\omega l/2a}, \quad A_0, A_1, \dots, \zeta_0, \zeta_1, \dots - \text{const}$$

Функция  $T(z, t)$  (12) удовлетворяет дифференциальному уравнению и краевому условию (1) на поверхности  $z = 0$  с  $T_w(t)$ , определенной в соответствии с (11). Из выражений  $T(z, t)$  и  $\zeta(t)$  (12) и краевых условий (1) на фронте тепловой волны  $z = \zeta(t)$  можно найти значения констант  $A_0, A_1, \dots, \zeta_0, \zeta_1, \dots$ .

$$(13) \quad \begin{aligned} \zeta_0 &= \sqrt{\frac{2a}{\gamma_1} (T_{m0} - T_0)}, \quad \zeta_1 = \frac{aT_{m1}\Omega_1}{\gamma_1 \operatorname{sh} \Omega_1 \zeta_0}, \\ \zeta_2 &= -\frac{a^2 T_{m1}^2 \Omega_1^2 \Omega_2 \operatorname{cth} \Omega_2 \zeta_0}{2\gamma_1 \operatorname{sh}^2 \Omega_1 \zeta_0} \dots \\ A_0 &= -\sqrt{\frac{2\gamma_1}{a} (T_{m0} - T_0)}, \quad A_1 = -T_{m1} \operatorname{cth} \Omega_1 \zeta_0, \\ A_2 &= \frac{aT_{m1}^2 \Omega_1^2}{2\gamma_1 \operatorname{sh}^2 \Omega_1 \zeta_0 \operatorname{sh} \Omega_2 \zeta_0} \dots \end{aligned}$$

Отметим, что выражение  $\zeta_0$  (13) определяет стационарное положение фронта тепловой волны в среде, если на поверхности  $z = 0$  поддерживается постоянное значение температуры  $T_{m0} > T_0 > 0$ .

Предположим теперь, что в среде действуют тепловые стоки вида

$$(14) \quad f = f_2 \equiv 1/2 \gamma_2 t^{-1/2} \theta(T), \quad \gamma_2 = \text{const} > 0$$

Если температура поверхности  $z = 0$  изменяется по закону

$$(15) \quad T_w(t) = \gamma_2 [\exp(\xi_0^2/2) - 1] \sqrt{t}, \quad \xi_0 = \text{const} > 0$$

а начальная температура среды  $T_0 = 0$ , то распределение температуры в среде должно быть определено при решении автомодельной задачи (1), (14), (15); в результате можно получить

(16)

$$T(z, t) = \begin{cases} \gamma_2 \sqrt{t} \left\{ \exp[(\xi_0^2 - \xi^2)/2] + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \xi \exp(\xi_0/2) [\Phi(\xi) - \Phi(\xi_0)] - 1 \right\} \\ 0 \end{cases} \begin{array}{l} \text{при } 0 \leq z \leq \zeta(t) \\ \text{при } \zeta(t) \leq z < \infty \end{array}$$

$$\zeta(t) = \xi_0 \sqrt{2at}, \quad \xi = z/\sqrt{2at}$$

где  $\Phi(\xi)$  и  $\Phi(\xi_0)$  — интегралы ошибок.

Рассмотрим тепловые стоки вида

$$(17) \quad f = f_3 \equiv \gamma_3 T \theta(T - T_0), \quad \gamma_3, T_0 = \text{const} > 0$$

Заметим, что принципиально возможно рассмотрение более общего закона действия тепловых стоков  $f_3$ , содержащего в правой части выражения (17) экспоненциальный множитель  $\exp(\alpha[z - \zeta(t)])$ , однако соответствующие результаты здесь не приводятся из-за громоздкости окончательных соотношений.

Если температура поверхности  $z = 0$  колеблется по гармоническому закону (11), то распределение температуры в среде должно быть определено при решении задачи без начальных условий (1), (11), (17). Соответствующие вычисления приводят к выражениям

$$(18) \quad T(z, t) = \begin{cases} T_{m0} \operatorname{ch} \Omega_0 z + T_{m1} \operatorname{ch} \Omega_1 z \exp i\omega t + \sum_{l=0}^{\infty} A_l \operatorname{sh} \Omega_l z \exp i\omega t & \text{при } 0 \leq z \leq \zeta(t) \\ T_0 & \text{при } \zeta(t) \leq z < \infty \end{cases}$$

$$\zeta(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \zeta_j \exp ij\omega t$$

$$(19) \quad \begin{aligned} \Omega_l &= \left( \frac{i\omega + \gamma_3}{a} \right)^{1/2}, \quad \zeta_0 = \frac{1}{\Omega_0} \operatorname{Ar} \operatorname{ch} \frac{T_{m0}}{T_0}, \quad \zeta_1 = \frac{T_{m1} \Omega_1}{T_0 \Omega_0^2 \operatorname{sh} \Omega_1 \zeta_0} \\ \zeta_2 &= -\frac{T_{m1}^2 \Omega_1^2 \Omega_2 \operatorname{cth} \Omega_2 \zeta_0}{2T_0^2 \Omega_0^4 \operatorname{sh}^2 \Omega_1 \zeta_0} \dots, \quad A_0 = -\sqrt{T_{m0}^2 - T_0^2} \\ A_1 &= -T_{m1} \operatorname{cth} \Omega_1 \zeta_0, \quad A_2 = \frac{T_{m1}^2 \Omega_1^2}{2T_0 \Omega_0^2 \operatorname{sh} \Omega_2 \zeta_0 \operatorname{sh}^2 \Omega_1 \zeta_0} \dots \end{aligned}$$

Выражение  $\zeta_0$  (19) определяет стационарное положение фронта тепловой волны в среде, если на поверхности  $z = 0$  поддерживается постоянное значение температуры  $T_{m0} > T_0 > 0$ .

Если температура поверхности  $z = 0$  изменяется согласно выражению

$$(20) \quad T_w(t) = T_0 e^{\beta vt} (\operatorname{ch} \delta vt - \beta \delta^{-1} \operatorname{sh} \delta vt), \quad v = \operatorname{const} > 0$$

$$\beta = v/2a, \quad \delta = \sqrt{v^2/4a^2 + \gamma_3/a}$$

то распределение температуры в среде, полученное в результате решения автомодельной задачи (1), (17), (20), имеет следующий вид

$$(21) \quad T(z, t) = \begin{cases} T_0 \exp[-\beta(z-vt)] \left[ \operatorname{ch} \delta(z-vt) + \frac{\beta}{\delta} \operatorname{sh} \delta(z-vt) \right] & \text{при } 0 \leq z \leq \zeta(t) \\ T_0 & \text{при } \zeta(t) \leq z < \infty \end{cases}$$

$$\zeta(t) = vt$$

т. е. в среде с постоянной скоростью  $v$  движется фронт тепловой волны  $z = \zeta(t)$ . Предположим, что в среде с  $T_0 \equiv 0$  действуют тепловые стоки вида

$$(22) \quad f = f_4 \equiv \gamma_4 T^{\beta} \theta(T), \quad \beta, \gamma_4 = \operatorname{const}, \quad |\beta| < 1, \quad \gamma_4 > 0$$

В случае, когда температура поверхности  $z = 0$   $T_w(t) = T_{m0} = \operatorname{const} > 0$ , в среде имеет место следующее распределение температуры [2]:

$$(23) \quad T(z) = \begin{cases} T_{m0} (1 - z/\zeta_0)^{2/(1-\beta)} & \text{при } 0 \leq z \leq \zeta_0 \\ 0 & \text{при } \zeta_0 \leq z < \infty \end{cases}$$

$$\zeta_0 = [2a(1+\beta)/\gamma_4 T_{m0}^{\beta-1} (1-\beta)^2]^{1/2}$$

