ПМТФ, № 5, 1965

ПОЛЯ ПРОИЗВОЛЬНО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ДИСЛОКАЦИЙ И СИЛОВЫХ ДИПОЛЕЙ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ УПРУГОЙ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

И. А. Кунин

(Новосибирск)

Предлагается единообразное математическое описание особенностей поля напряжений упругой среды. Вводятся характеристики распределения дислокаций и силовых диполей на линиях, поверхностях и в области. Рассматривается общий метод расчета соответствующих напряжений в неограниченной упругой анизотропной среде. Показывается эквивалентность полей напряжения дислокаций и силовых диполей. В качестве иллюстрации приводятся некоторые простейшие задачи со сферической и цилиндрической симметрией.

1. Дельта-функции, определяемые поверхностями[1]. Пусть K — пространство основных функций [1], состоящее из бесконечно дифференцируемых финитных функций $\varphi(x)$ точки $x(x^1, x^2, x^3)$, евклидова пространства R_3, и пусть L — некоторая кривая. Равенство

$$\int \delta(L)\varphi(x)\,dx = \int_L \varphi(x_L)\,dL \tag{1.1}$$

где dL — элемент длины, определяет на K обобщенную функцию $\delta(L)$. Аналогично для поверхности S и области V определяются $\delta(S)$ и $\delta(V)$

$$\int \delta(S)\varphi(x)\,dx = \int_S \varphi(x_S)\,dS, \qquad \int \delta(V)\varphi(x)\,dx = \int_V \varphi(x_V)\,dV \tag{1.2}$$

причем $\delta(V)$, очевидно, совпадает с характеристической функцией области V. Относительно L, S и V предполагается лишь существование правых частей в (1.1), (1.2). Справедливо представление

$$\delta(L) = \int_L \delta(x - x_L)\,dL \tag{1.3}$$

которое нужно понимать в том смысле, что

$$\int dx\,\varphi(x)\int_L \delta(x - x_L)\,dL = \int_L dL\int \delta(x - x_L)\varphi(x)\,dx = \int_L \varphi(x_L)\,dL$$

Аналогично

$$\delta(S) = \int_S \delta(x - x_S)\,dS, \qquad \delta(V) = \int_V \delta(x - x_V)\,dV \tag{1.4}$$

Пусть, например, L — ось x^3, а S — плоскость x^1x^2. Тогда $\delta(L)$ и $\delta(S)$ можно представить как прямое произведение одномерных δ-функций и функций, тождественно равных единице

$$\delta(L) = \delta(x^1)\times\delta(x^2)\times 1(x^3), \qquad \delta(S) = 1(x^1, x^2)\times\delta(x^3)$$

[1] Относительно обобщенных функций, связанных с поверхностями, см. также [1]. Однако следует отметить, что рассматриваемые там функционалы отличаются от вводимых ниже δ-функций.

Имеем $$\int_S \delta(L)\,dS = \int \delta(x^1)\times\delta(x^2)\times 1(0)\,dx^1 dx^2 = 1$$

$$\int_L \delta(S)\,dL = \int 1(0, 0)\times\delta(x^3)\,dx^3 = 1$$

Отсюда следует, что в данном случае можно положить

$$\delta(L)\,\delta(S) = \delta(x^1)\times\delta(x^2)\times\delta(x^3) = \delta(x) \tag{1.5}$$

Легко видеть, что (1.5) не зависит от конкретного вида L и S, если только они пересекаются в одной точке $x = 0$. Поэтому в общем случае, если кривая L пересекает поверхность S в одной точке $x = x_0$, положим

$$\delta(L)\,\delta(S) = \delta(x - x_0) \tag{1.6}$$

Для ограниченных L, S и V

$$\int \delta(L)\,dx = l, \qquad \int \delta(S)\,dx = s, \qquad \int \delta(V)\,dx = v \tag{1.7}$$

где l, s и v — соответственно длина, площадь и объем.

Если V стягивается к точке x_0, то

$$\delta(V) \approx v\delta(x - x_0), \qquad \lim_{V\to x_0} \frac{1}{v}\,\delta(V) = \delta(x - x_0) \tag{1.8}$$

Аналогичные предельные формулы имеют место для $\delta(L)$ и $\delta(S)$.

Наряду со скалярными будем рассматривать векторные δ-функции $\delta(L^\nu)$ и $\delta(S^\nu)$, определив их для ориентированных кусочно-гладких L и S соотношениями

$$\int \delta(L^\nu)\,\varphi(x)\,dx = \int_L \varphi(x_L)\,dL^\nu \qquad (dL^\nu = \lambda^\nu\,dL)$$

$$\int \delta(S^\nu)\,\varphi(x)\,dx = \int_S \varphi(x_S)\,dS^\nu \qquad (dS^\nu = n^\nu\,dS) \tag{1.9}$$

где $\lambda^\nu(x_L)$ и $n^\nu(x_S)$ — соответственно единичный касательный вектор к L и нормаль к S. Для ограниченных L и S

$$\int \delta(L^\nu)\,dx = l^\nu, \qquad \int \delta(S^\nu)\,dx = s^\nu \tag{1.10}$$

где l^ν и s^ν — векторные длина и площадь. Для замкнутых L и S они равны нулю. Если L и S пересекаются в одной точке $x = x_0$, то

$$\delta(L_\nu)\,\delta(S^\nu) = \pm\,\delta(x - x_0) \tag{1.11}$$

в зависимости от того, согласованы их ориентации или нет. Действительно, деформируя L и S, можно превратить их в прямую и плоскость с постоянными единичными векторами λ_ν и n^ν и свести задачу к (1.6).

Производные δ-функций определим, как обычно, перекидкой операции на основную функцию, например,

$$\int \delta_{,\mu}(S^\nu)\,\varphi(x)\,dx = -\int_S \varphi_{,\mu}(x_S)\,dS^\nu$$

Введенные выше δ-функции имеют простую геометрическую интерпретацию. Можно показать, что с точностью до постоянного множителя они являются ядрами соответствующих операторов усреднения по L, S или V.

Важное значение имеют соотношения типа формул Стокса для δ-функций. Пусть V — область в R_3 с кусочно-гладкой границей S (ориентации согласованы). Тогда для тензора p (индексы опускаем) имеем

$$\int \delta_{,\lambda}(V)\,p(x)\,dx = -\int_V \partial_\lambda p(x_V)\,dV = -\int_S p(x_S)\,dS_\lambda = -\int \delta(S_\lambda)\,p(x)\,dx$$

Отсюда $$\operatorname{grad}\delta(V) = -\,\delta(S) \tag{1.12}$$

Следовательно, для замкнутой поверхности S

$$\operatorname{rot} \delta (\mathbf{S}) = 0 \tag{1.13}$$

Пусть теперь S — двумерная поверхность с кусочно-гладкой границей L (ориентации согласованы). Тогда из формул ($\varepsilon^{\lambda\mu\nu}$ — антисимметричный псевдотензор)

$$\int \varepsilon^{\lambda\mu\nu} \delta_{,\mu} (S_\lambda)\, p(x)\, dx = -\int\limits_S \varepsilon^{\lambda\mu\nu} \partial_\mu p(x_S)\, dS_\lambda = -\int\limits_L p(x_L)\, dL^\nu = -\int \delta(L^\nu)\, p(x)\, dx$$

следует

$$\operatorname{rot} \delta (\mathbf{S}) = \delta (\mathbf{L}) \tag{1.14}$$

Отсюда для замкнутого контура

$$\operatorname{div} \delta (\mathbf{L}) = 0 \tag{1.15}$$

Пусть теперь задан ориентированный контур L и на нем некоторая скалярная или тензорная функция $f(x_L)$. Тогда соответствующая δ-функция с весом $f(x_L)$ определяется формулой

$$\int [f(x_L)\, \delta(L)]\, \varphi(x)\, dx = \int\limits_L \varphi(x_L)\, f(x_L)\, dL \tag{1.16}$$

Аналогично определяются остальные δ-функции с весом.

Производные δ-функций с весом определяются обычным образом переброской операции на $\varphi(x)$. В тех случаях, когда это не может вызвать недоразумения, скобки в выражениях для δ-функций с весом будут опускаться, например, $\operatorname{rot}^{\mu\lambda} M_\lambda (x_L)\, \delta (L)$ — оператор rot действует здесь на все выражение. Легко видеть, что имеют место соотношения

$$\delta(L^\nu) = \lambda^\nu (x_L)\, \delta(L), \qquad \delta(S^\nu) = n^\nu (x_S)\, \delta(S) \tag{1.17}$$

где λ^ν и n^ν — соответственно единичный касательный вектор и нормаль.

2. Характеристики распределения дислокаций и силовых диполей. Уравнение Кренера, связывающее внутреннюю деформацию ε с суммарной плотностью источников внутренних напряжений (несовместностью) η, имеет вид [2]

$$\operatorname{Rot} \varepsilon = \eta \tag{2.1}$$

где оператор Rot определяется выражением

$$\operatorname{Rot}^{\lambda\mu\rho\nu} = \varepsilon^{\lambda\tau\rho} \varepsilon^{\mu\sigma\nu} \partial_\tau \partial_\sigma \qquad \left(\partial_\tau = \frac{\partial}{\partial x^\tau}\right)$$

В дальнейшем предполагается, что внутренние напряжения обусловлены дислокациями. Если, как обычно, ввести тензор плотности дислокаций α, удовлетворяющий условию $\operatorname{div} \alpha = 0$, то для η, как известно [1],

$$\eta^{\lambda\mu} = \operatorname{rot}^{(\lambda}_{\cdot\nu}\, \alpha^{\mu)\nu} \tag{2.2}$$

Отметим, что α, в отличие от η, в рамках континуальной модели является непосредственно измеримой величиной.

Наряду с η и α, введем третью, пожалуй, наиболее удобную для приложений характеристику распределения дислокаций. Положим

$$\alpha = \operatorname{rot} \mu \tag{2.3}$$

где μ — тензор плотности моментов дислокаций — величина, определенная с точностью до градиента произвольного векторного поля. Имеем

$$\eta^{\lambda\mu} = \operatorname{rot}^{(\lambda}_{\cdot\nu} \alpha^{\mu)\nu} = \operatorname{rot}^{(\lambda}_{\cdot\nu} \operatorname{rot}^{\mu)}_{\cdot\rho} \mu^{\rho\nu} = \operatorname{Rot}^{\lambda\mu}_{\cdot\cdot\rho\nu} \mu^{(\rho\nu)} \tag{2.4}$$

Отсюда следует, что антисимметричная составляющая μ не влияет на η и, следовательно, на ε (но не на α).

[1] Здесь и в дальнейшем круглые скобки при индексах обозначают симметрирование по соответствующим индексам.

Рассмотрим поверхность S, ограниченную контуром L, и пусть b^ν — постоянный вектор. Выражение

$$\alpha^{\mu\nu}(x) = b^\nu \delta(L^\mu) \tag{2.5}$$

в силу (1.15) можно рассматривать как плотность некоторого распределения дислокаций. Проведем произвольную поверхность F, пересекающую L в одной точке, и рассмотрим поток α через F. Учитывая (1.11), находим

$$\int_F \alpha^{\mu\nu}(x_F)\, dF_\mu = b^\nu \int_F \delta(L^\mu)\, dF_\mu = \pm b^\nu$$

Здесь знаки плюс или минус берутся в зависимости от того, согласованы или не согласованы ориентации L и F.

Так как этот поток не зависит от выбора F, пересекающей L, и равен нулю, если F не пересекает L, то отсюда следует, что (2.4) является плотностью, соответствующей линейной дислокации с контуром L и вектором Бюргерса b^ν. С другой стороны, учитывая (1.14) и (1.17), имеем

$$\alpha^{\mu\nu}(x) = \mathrm{rot}^{\cdot\mu}_{\cdot\cdot\rho} b^\nu \delta(S^\rho) = \mathrm{rot}^{\cdot\mu}_{\cdot\cdot\rho} b^\nu n^\rho(x_S)\,\delta(S) \tag{2.6}$$

т. е. α можно также интерпретировать как распределение дислокаций по поверхности S с постоянным вектором Бюргерса b^ν и поверхностной плотностью моментов $M^{\rho\nu}(x_S) = b^\nu n^\rho(x_S)$. Величина

$$\mu^{\rho\nu}(x) = b^\nu \delta(S^\rho) = M^{\rho\nu}(x_S)\,\delta(S) \tag{2.7}$$

является плотностью моментов дислокаций, соответствующей распределениям (2.6) или (2.4). Можно естественно обобщить это на случай произвольного распределения дислокаций. Пусть, например, дислокации распределены в некоторой области V. Тогда наиболее общими характеристиками распределения дислокаций являются плотности

$$\mu^{\rho\nu}(x) = M^{\rho\nu}(x_V)\,\delta(V)$$
$$\alpha^{\mu\nu}(x) = \mathrm{rot}^{\cdot\mu}_{\cdot\cdot\rho} M^{\rho\nu}(x_V)\,\delta(V), \qquad \eta^{\lambda\mu}(x) = \mathrm{Rot}^{\cdot\lambda\mu}_{\cdot\cdot\rho\nu} M^{(\rho\nu)}(x_V)\,\delta(V) \tag{2.8}$$

где $M^{\rho\nu}(x_V)$ — объемная плотность моментов дислокаций.

При распределении дислокаций по поверхности S или контуру L следует заменить $\delta(V)$ на $\delta(S)$ или $\delta(L)$, а $M^{\rho\nu}(x_V)$ — на поверхностную $M^{\rho\nu}(x_S)$ или линейную $M^{\rho\nu}(x_L)$ плотности моментов дислокаций.

В предельном случае элементарной дислокации, которую можно получить, например, стягиванием поверхности S в (2.6) в точку x_0 или, что то же, достаточным удалением точки наблюдения x, выражения для μ, α и η при учете (1.8) принимают вид

$$\mu^{\rho\nu}(x) = M^{\rho\nu}\delta(x - x_0), \qquad \alpha^{\mu\nu}(x) = \mathrm{rot}^{\cdot\mu}_{\cdot\cdot\rho} M^{\rho\nu}\delta(x - x_0)$$
$$\eta^{\lambda\mu}(x) = \mathrm{Rot}^{\cdot\lambda\mu}_{\cdot\cdot\rho\nu} M^{(\rho\nu)}\,\delta(x - x_0), \qquad M^{\rho\nu} = b^\nu s^\rho \tag{2.9}$$

где s^ρ — векторная площадь S.

Аналогичными характеристиками распределения силовых диполей в области V являются

$$f^\rho(x) = -\partial_\nu Q^{\rho\nu}(x_V)\,\delta(V), \qquad q^{\rho\nu}(x) = Q^{\rho\nu}(x_V)\,\delta(V) \tag{2.10}$$

где $f^\rho(x)$ — плотность эквивалентной объемной силы, $q^{\rho\nu}(x)$ — плотность моментов диполей и $Q^{\rho\nu}(x_V)$ — объемная плотность моментов диполей. При распределении диполей по S или L следует соответственно заменить $\delta(V)$ на $\delta(S)$ или $\delta(L)$, а $Q^{\rho\nu}(x_V)$ — на поверхностную $Q^{\rho\nu}(x_S)$ или линейную $Q^{\rho\nu}(x_L)$ плотности моментов диполей.

Сравним различные характеристики распределения дислокаций и силовых диполей, считая остальные характеристики среды фиксированными. Плотность дислокаций α содержит полную информацию о дислокациях как физическом объекте, но с точки зрения внутренних напряжений — содержит излишнюю информацию. Дислокационная несовместность η содержит полную информацию о внутренних напряжениях, вызванных дислокациями, но часть информации о самих дислокациях в ней потеряна. Плотность моментов μ содержит полную информацию о дислокациях, но определена с точностью до ∇v, где v — произвольный вектор. По отношению к внутренним напряжениям μ определена с точностью до $\operatorname{def} v + \omega$, где ω — произвольный антисимметричный тензор [1]. Эквивалентная плотность объемных сил f содержит полную информацию о силовых диполях как источниках напряжений, но часть информации о распределении диполей потеряна. Плотность моментов диполей q содержит полную информацию о распределении диполей, но по отношению к напряжениям определена с точностью до произвольного тензора p, удовлетворяющего условию $p \cdot \nabla = 0$.

3. Поля дислокаций и силовых диполей. Из (2.1) следует, что внутренние напряжения σ в линейной теории удовлетворяют уравнениям

$$\operatorname{Rot} C^{-1}\sigma = \eta, \qquad \operatorname{div} \sigma = 0 \tag{3.1}$$

где C — тензор упругих констант. Если распределение дислокаций задано и отлично от нуля лишь в конечной области, то решение (3.1) в неограниченной среде, учитывая (2.4), можно представить в виде

$$\sigma^{\alpha\beta}(x) = H^{\alpha\beta}{}_{\cdot\cdot\lambda\mu} * \eta^{\lambda\mu} = \operatorname{rot}^{(\lambda}{}_{\cdot\nu} H^{|\alpha\beta|}{}_{\cdot\cdot\lambda\mu} * \alpha^{\mu)\nu} = \operatorname{Rot}^{\lambda\mu}{}_{\cdot\cdot\rho\nu} H^{\alpha\beta}{}_{\cdot\cdot\lambda\mu} * \mu^{(\rho\nu)} \tag{3.2}$$

где $H^{\alpha\beta}{}_{\cdot\cdot\lambda\mu}(x)$ — тензор Грина для внутренних напряжений [6]. Операция $*$, как обычно, обозначает интегральную свертку.

Сопоставим распределению дислокаций с плотностью моментов $\mu^{\rho\nu}$ распределение силовых диполей с дуальной симметричной плотностью моментов $q^{\rho\nu}$ при помощи соотношений

$$q^{\rho\nu} = -C^{\rho\nu}{}_{\cdot\cdot\sigma\tau}\mu^{\sigma\tau}, \qquad \mu^{(\rho\nu)} = -C^{-1\rho\nu}{}_{\cdot\cdot\sigma\tau} q^{\sigma\tau} \tag{3.3}$$

Тогда напряжения σ', соответствующие q, удовлетворяют уравнениям

$$\operatorname{Rot} C^{-1}\sigma' = 0, \qquad \operatorname{div} \sigma' = -f \quad (f = -\operatorname{div} q) \tag{3.4}$$

решение которых можно при помощи тензора Грина теории упругости для напряжений [8] представить в виде

$$\sigma^{\alpha\beta}(x) = G^{\alpha\beta}{}_{\cdot\cdot\rho} * f^{\rho} \tag{3.5}$$

Сравнение (3.1) и (3.4) немедленно приводит к важному соотношению

$$\sigma' = \sigma' - q = \sigma' + C\mu \tag{3.6}$$

Иными словами, каждой задаче (линейной) континуальной теории дислокаций для неограниченной среды с заданной плотностью моментов μ можно однозначно сопоставить задачу классической теории упругости с дуальной плотностью моментов силовых диполей q, причем соответствующие напряжения связаны соотношениями (3.6); соотношения (3.6) впервые записаны в явном виде (для изотропной среды) в работе [4].

---

[1] Можно показать, что μ формально совпадает с пластической дисторсией β^P Кренера [2], остаточной дисторсией ε° В. Л. Инденбома [3] и плотностью дислокационных петель γ Кроупа [4] (см. также А. М. Косевич, В. Д. Нацик [7]). Однако все эти величины, вообще говоря, не являются функциями состояния и зависят от предыстории среды [4]. Поэтому, если ограничиваться рамками упругого континуума, как принято здесь, целесообразно не приписывать плотности моментов μ самостоятельного физического смысла и рассматривать ее как тензорный потенциал плотности дислокаций α.

Преобразование выражения (3.5) для σ' с учетом (3.3) дает выражение смещения u_λ, соответствующего дуальной плотности силовых диполей

$$u_\lambda(x) = G^{\rho\nu}_{\cdot\cdot\lambda} * \mu_{\rho\nu} = U_{\lambda\rho} * f^\rho \tag{3.7}$$

где $U_{\lambda\rho}$ — тензор Грина теории упругости для смещений.

Так как в области, где $\mu = 0$, напряжение σ совпадает с σ', то в этой и только в этой области $\mathbf{u}$ можно рассматривать как векторный потенциал, вообще говоря, неоднозначный, через который по обычным формулам выражаются (локально) ε и σ. В этой области с указанной оговоркой $\mathbf{u}$ можно интерпретировать как поле смещений, вызванное данным распределением дислокаций.

Рассмотрим теперь некоторые важнейшие случаи распределения дислокаций и дуальных моментов и соответствующие им поля напряжений.

Пусть дислокации распределены с поверхностной плотностью $M^{\rho\nu}(x_S)$ по поверхности S с границей L и пусть $Q^{\rho\nu}(x_S)$ — дуальная поверхностная плотность моментов диполей. Тогда для напряжений имеем

$$\sigma'^{\alpha\beta} = -G^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot\rho,\nu} * Q^{\rho\nu}(x_S)\,\delta(S) = -\int_S G^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot\rho,\nu}(x - x_{S'})\,Q^{\rho\nu}(x_S)\,dS \tag{3.8}$$

$$\sigma^{\alpha\beta} = \mathrm{Rot}^{\lambda\mu}_{\cdot\cdot\rho\nu} H^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot\lambda\mu} * M^{\rho\nu}(x_S)\,\delta(S) = \int_S \mathrm{Rot}^{\lambda\mu}_{\cdot\cdot\rho\nu} H^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot\lambda\mu}(x - x_S)\,M^{\rho\nu}(x_S)\,dS \tag{3.9}$$

Согласно (3.6), их разность равна $Q^{\rho\nu}(x_S)\,\delta(S)$, т. е. особенности, сосредоточенной на S.

Если $M^{\rho\nu}(x_S) = b^\nu n^\rho(x_S)$ и, следовательно, $\mu^{\rho\nu}$ совпадает с (2.7), то это распределение соответствует линейной дислокации с плотностью (2.5). Из (3.2) следует, что соответствующее поле напряжений имеет вид [1]

$$\sigma^{\alpha\beta} = H^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot\lambda\mu} * \mathrm{rot}^{(\lambda|\nu|}\, b_\nu \delta(L^{\mu)}) = b_\nu \int_L H^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot\lambda\mu,\tau}(x - x_L)\,\varepsilon^{\tau\nu(\lambda}\, dL^{\mu)} \tag{3.10}$$

Оно имеет особенность только на контуре L. Напротив, поле напряжений дуальных моментов

$$\sigma'^{\alpha\beta} = b_\lambda C^{\lambda\tau\rho\nu} \int_S G^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot\rho,\nu}(x - x_S)\,dS_\tau \tag{3.11}$$

имеет особенность на S. Его нельзя выразить в виде интеграла по L.

Подставляя в (3.7) выражение (2.7), находим для линейной дислокации

$$u_\lambda = b_\nu \int_S G^{\nu\mu}_{\cdot\cdot\lambda}(x - x_S)\,dS_\mu \tag{3.12}$$

Для изотропной среды эта формула переходит в формулу Бюргерса, которую обычно трактуют как выражение для смещений линейной дислокации. Точнее их следовало бы рассматривать как смещения, соответствующие дуальной плотности силовых диполей, распределенных по S.

Пусть теперь дислокации распределены в области V с границей S с постоянной объемной плотностью моментов $M^{\rho\nu}(x_V)$. Плотность дислокаций, учитывая (1.12), можно представить в виде [2]

$$\alpha^{\mu\nu}(x) = \mathrm{rot}^{\mu}_{\cdot\rho} M^{\rho\nu}\delta(V) = \varepsilon^{\mu\rho\tau} M_\rho^{\cdot\nu}\delta(S_\tau) \tag{3.13}$$

т. е. это распределение в точности равносильно соответствующему рас-

[1] Для изотропной среды представление σ через интеграл по контуру было получено Пичем и Келером [8].

[2] Этот случай соответствует задаче о включении, рассмотренной Дж. Эшелби [10].

пределению нескомпенсированных дислокаций на S, и напряжения внутри и вне S даются формулой (3.9). Отметим, что если q или μ удовлетворяют условиям $\operatorname{div} q = 0$ или $\operatorname{Rot} \mu = 0$, то в этих случаях соответственно $\sigma = -q$, $\sigma' = 0$ или $\sigma = 0$, $\sigma' = q$.

4. Задачи со сферической и цилиндрической симметрией. В качестве иллюстрации общих соотношений рассмотрим некоторые простейшие задачи, решение которых может быть получено прямым путем [1].

Начнем со случая сферической симметрии. Пусть область V есть шар, ограниченный сферой S радиуса R. Легко видеть, что в сферических координатах r, ϑ, φ

$$\delta(V) = \theta(R - r), \qquad \delta(S) = \delta(r - R) \tag{4.1}$$

где $\theta(r) = 1$ при $r > 0$ и $\theta(r) = 0$ при $r < 0$.

Для простоты ограничимся рассмотрением тензоров с отличными от нуля компонентами $A_{rr} \equiv A_r$, $A_{\vartheta\vartheta} = A_{\varphi\varphi} \equiv A_\vartheta$. Тогда компоненты дислокационной несовместности $\eta(r)$, определяемые (2.4), в сферических координатах запишутся в виде [10]

$$\eta_r = \frac{2}{r}\left[\mu_\vartheta' + \frac{1}{r}(\mu_\vartheta - \mu_r)\right], \qquad \eta_\vartheta = \frac{1}{r}\,[(r\mu_\vartheta)'' - \mu_r'] \tag{4.2}$$

Легко проверить, что условие $\operatorname{div} \eta = 0$, или

$$\eta_r' + 2r^{-1}(\eta_r - \eta_\vartheta) = 0 \tag{4.3}$$

выполняется тождественно. Таким образом, η имеет одну существенную компоненту η_r, через которую η_ϑ выражается при помощи (4.3).

Система уравнений (3.1) для внутренних напряжений в данном случае для изотропной среды принимают вид (λ, μ — коэффициенты Ляме)

$$\begin{gathered}\frac{2}{r}\varepsilon_\vartheta' + \frac{2}{r^2}(\varepsilon_\vartheta - \varepsilon_r) = \eta_r, \qquad \sigma_r' + \frac{2}{r}(\sigma_r - \sigma_\vartheta) = 0 \\ \sigma_r = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_r + 2\lambda\varepsilon_\vartheta, \qquad \sigma_\vartheta = \lambda\varepsilon_r + 2(\lambda + \mu)\varepsilon_\vartheta\end{gathered} \tag{4.4}$$

Пусть на сфере S задано распределение дислокаций с вектором Бюргерса, направленным по радиусу и равным по величине $b = \mathrm{const}$. Тогда для плотности моментов из общей формулы

$$\mu^{\rho\nu}(x) = b^\nu n^\rho \delta(S) \tag{4.5}$$

учитывая (4.1), находим

$$\mu_r = b\delta(r - R), \qquad \mu_\vartheta = 0 \tag{4.6}$$

Подставляя в (4.2), получаем выражение для существенной компоненты

$$\eta_r = -\frac{2b}{R^2}\,\delta(r - R) \tag{4.7}$$

Решение системы (4.4) имеет вид

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{4\mu(3\lambda + 2\mu)}{3(\lambda + 2\mu)}\,\frac{b}{R}\left[\theta(R - r) + \frac{R^3}{r^3}\,\theta(r - R)\right] \\ \sigma_\vartheta &= \frac{4\mu(3\lambda + 2\mu)}{3(\lambda + 2\mu)}\,\frac{b}{R}\left[\theta(R - r) - \frac{R^3}{2r^3}\,\theta(r - R)\right]\end{aligned} \tag{4.8}$$

Данную задачу естественно интерпретировать следующим образом. В сферическую полость радиуса R вставляется шар из того же материала с радиальным зазором (или натягом) b и производится спайка. Если вместо спайки на границе приложить двойной силовой слой, то, согласно (3,6), соответствующие напряжения будут отличаться на дуальную плотность моментов

$$q_r = -(\lambda + 2\mu)\, b\, \delta(r - R), \qquad q_\vartheta = -\lambda\, b\, \delta(r - R) \tag{4.9}$$

Другую возможную интерпретацию можно получить, если учесть, что распределению температуры с произвольным законом $T(x)$ соответствует несовместность [2]

$$\eta^{\lambda\mu}(x) = \operatorname{Rot}^{\lambda\mu}{}_{\cdot\cdot\rho\nu}\gamma T(x)\,\delta^{\rho\nu} \tag{4.10}$$

где γ — коэффициент температурного расширения. Полагая $T(r) = T_0\theta(R - r)$, $T_0 = \mathrm{const}$, находим

$$\eta_r = -\frac{2\gamma T_0}{R}\,\delta(r - R) \tag{4.11}$$

---

[1] Более общую задачу об эллипсоидальном включении см. в работах Дж. Эшелби [9].

Сравнивая с (4.7), заключаем, что это распределение температуры в точности равносильно распределению дислокаций с вектором Бюргерса $b = \gamma T_0 R$.

При $R \to 0$ предельным образом (единичной) сферической дислокации является точечный источник с плотностями (пространственной $\delta(x)$ соответствует $(2\pi r^2)^{-1}\delta(r)$).

$$\mu_r = \frac{\delta(r)}{2\pi r^2}, \quad \mu_\vartheta = 0; \qquad \eta_r = -\frac{\delta(r)}{\pi r^4} \tag{4.12}$$

$$\sigma_r = \frac{2\mu}{3\pi(\lambda+2\mu)}\left[(3\lambda+2\mu)\frac{\theta(r)}{r^3} + \frac{2}{3}(3\lambda+4\mu)\frac{\delta(r)}{r^2}\right] \tag{4.13}$$

$$\sigma_\vartheta = -\frac{\mu}{3\pi(\lambda+2\mu)}\left[(3\lambda+2\mu)\frac{\theta(r)}{r^3} - \frac{1}{3}(3\lambda-2\mu)\frac{\delta(r)}{r^2}\right] \tag{4.14}$$

Пусть теперь

$$\eta_r = -a\theta\,(R-r) \quad (a = \mathrm{const}) \tag{4.15}$$

Этой несовместности соответствует, например, распределение температуры

$$T(r) = T_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\theta(R-r), \qquad T_0 = \frac{aR^2}{4\gamma} \tag{4.16}$$

Решение уравнений для напряжений дает

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{15(\lambda+2\mu)}a\left[(5R^2-3r^2)\,\theta(R-r) + \frac{2R^5}{r^3}\theta(r-R)\right]\\ \sigma_\vartheta &= \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{15(\lambda+2\mu)}a\left[(5R^2-6r^2)\,\theta(R-r) - \frac{R^5}{r^3}\theta(r-R)\right]\end{aligned} \tag{4.17}$$

В заключение рассмотрим распределение дислокаций но поверхности цилиндра радиуса $\rho = R$ с вектором Бюргерса $b = \mathrm{const}$, направленным по ρ. Соответствующие выражения для отличных от нуля компонент μ и η имеют вид

$$\mu_\rho = b\delta(\rho - R), \qquad \eta_z = -\frac{b}{R}\delta(\rho-R) \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}\sigma_\rho &= \frac{2\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\frac{b}{R}\left[\theta(R-\rho) + \frac{R^2}{\rho^2}\theta(\rho-R)\right]\\ \sigma_\varphi &= \frac{2\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\frac{b}{R}\left[\theta(R-\rho) - \frac{R^2}{\rho^2}\theta(\rho-R)\right]\end{aligned} \tag{4.19}$$

При $R \to 0$ получаем в пределе линейный источник

$$\mu_\rho = \frac{\delta(\rho)}{\pi\rho}, \qquad \eta_z = \frac{2}{\pi}\frac{\delta(\rho)}{\rho^3} \tag{4.20}$$

$$\sigma_\rho = \frac{\mu(\lambda+\mu)}{\pi(\lambda+2\mu)}\left[\frac{2\theta(\rho)}{\rho^2} + \frac{\delta(\rho)}{\rho}\right], \qquad \sigma_\varphi = -\frac{\mu(\lambda+\mu)}{\pi(\lambda+2\mu)}\left[\frac{2\theta(\rho)}{\rho^2} - \frac{\delta(\rho)}{\rho}\right] \tag{4.21}$$

Поступила 18 XI 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции. 1959, вып. 1.
2. Kröner E. Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. Springer-Verlag, Berlin, 1958.
3. Инденбом В. Л. Тензоры взаимности и функции влияния для тензора плотности дислокаций и тензора несовместности деформаций. Докл. АН СССР, 1959, т. 128, стр. 906.
4. Kroupa F. Continuous distribution of dislocation loops. Чехосл. физ. ж., 1962, B. 12, стр. 191.
5. Косевич А. М., Нацик В. Д. Упругое поле непрерывно распределенных движущихся дислокационных петель. Физ. тверд. тела, 1964, т. 6, стр. 228.
6. Кунин И. А. Тензор Грина для анизотропной упругой среды с источниками внутренних напряжений. Докл. АН СССР, 1964, т. 157, стр. 1319.
7. Лифшиц И. М., Розенцвейг Л. Н. О построении тензора Грина для основного уравнения теории упругости в случае неограниченной упруго-анизотропной среды. Ж. эксперим. и теор. физ., 1947, т. 17, стр. 783.
8. Peach M., Koehler J. S. The forces exerted on dislocation and the stress fields produced by them. Phys. Rev., 1950, vol. 80, p. 436.
9. Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций. 1963.
10. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. 1955.