ПМТФ, № 5, 1962

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ВОСПЛАМЕНЕНИЯ

А. М. Гришин

(*Саратов*)

Задачи о тепловом самовоспламенении и воспламенении рассматривались в работах [1-5].

В настоящей работе предлагается вариационный метод решения задач стационарной теории теплового взрыва. Кроме того, пользуясь методами теории теплового взрыва решена задача о зажигании смеси в цилиндрическом сосуде накаленным цилиндром.

В работе показано, что решение этой задачи может служить решением обратной задачи о зажигании смеси, граничащей с накаленным телом. Наряду с этим попутно решается задача о самовоспламенении смеси в цилиндрической полости.

§ 1. Вариационный метод. Решение наиболее общих, пространственных задач теории стационарного взрыва в постановке Д. А. Франк-Каменецкого сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}+\mu\exp\theta=0$$

$$\theta=\frac{(T-T_1)\,E}{RT_1^2}, \qquad \mu=\frac{qr^2zE\exp(-E\,/\,RT_1)}{\lambda RT_1^2} \tag{1.1}$$

с граничным условием

$$\theta/\Gamma=0 \tag{1.2}$$

Здесь θ — безразмерная температура, μ — безразмерный параметр, подлежащий определению, r — характерный размер, q — теплотворная способность топлива, E — энергия активации, λ — коэффициент теплопроводности, T_1 — температура стенок сосуда, z — предэкспоненциальный множитель, Γ — граница области D, в которой происходит самовоспламенение.

Краевая задача (1.1) (1.2) может быть сведена к решению вариационной задачи по определению экстремума функционала

$$J=\iiint\limits_D(\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_z^2-2\mu e^{\varphi})\,dx\,dy\,dz \tag{1.3}$$

Здесь φ — функция, имеющая непрерывные вторые производные по x, y, z и удовлетворяющая (1.2). Вариационная задача (1.3) эквивалентна задаче по определению экстремума функционала

$$2\mu=\iiint\limits_D(\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_z^2)\,dx\,dy\,dz\Big/\iiint\limits_D e^{\varphi}\,dx\,dy\,dz \tag{1.4}$$

Эквивалентность вариационных задач (1.3) и (1.4) легко показать, сравнив вариации (1.3) и (1.4). Они обращаются в нуль одновременно и для одинаковых функций φ. Вариационная задача (1.4) принципиально может быть решена прямыми методами, но технически найти это решение затруднительно. Однако, если нам удалось получить профиль температуры конкретной горючей смеси в сосуде при воспламенении, например, экспериментально, то, подставив этот профиль в (1.4) в качестве φ, получим критическое значение μ, которое будет характеризовать воспламенение любой горючей смеси в сосуде той же формы. Следует отметить, что при вариационной постановке задач о тепловом взрыве нет необходимости пользоваться разложением Д. А. Франк-Каменецкого для exp $(-E/RT)$. Можно учесть также зависимость коэффициента теплопроводности λ от температуры. В этом случае необходимо найти экстремум функционала

$$2j = \iiint_D (\varphi_x{}^2 + \varphi_y{}^2 + \varphi_z{}^2)\, dx\, dy\, dz \Big/ \iiint_D F(\varphi)\, dx\, dy\, dz \tag{1.5}$$

при условии

$$j = \frac{qzr^2 R}{\lambda E}, \qquad F(\varphi) = \int \exp\left(-\frac{1}{\varphi}\right)\frac{d\varphi}{\psi(\varphi)} \tag{1.6}$$

$$\varphi\,|_\Gamma = U_0$$

Здесь $U = RT/E$ — безразмерная температура, $\psi = \psi(\varphi)$ — безразмерный коэффициент теплопроводности. В качестве допустимых функций при решении вариационной задачи (1.4) методом Ритца удобно выбирать

$$\varphi_i = \ln\frac{a_i^2 - f(x,\,y,\,z)}{a_i^2 - 1} \quad (i = 1, \ldots, n) \qquad f(x,y,z)\,|_\Gamma = 1 \tag{1.7}$$

Здесь a_i — параметры, подлежащие определению.

Решение вариационной задачи (1.2), (1.4) для шара было найдено методом Ритца путем использования в качестве φ одночленного выражения типа (1.7). Полученное при этом значение $\mu = 2.5$ на 25% ниже точного значения $\mu = 3.32$, указанного в работе [1]. Решение задачи для шара позволило установить, что тип экстремума для функционала (1.4) — максимум. Вариационная постановка задачи о тепловом взрыве позволяет установить физическое содержание критического значения μ. Для плоского сосуда выражение (1.4), если найдено критическое значение μ, можно записать так

$$r_*{}^2 qz \exp\left(-\frac{E}{RT_1}\right)\int_0^1 e^{\varphi}\, dx = \lambda\,\frac{RT_1{}^2}{E}\int_0^1 \frac{1}{2}\,\varphi'^2(x)\, dx \quad \left[\frac{\text{кал}}{\text{см.сек}}\right] \tag{1.8}$$

Здесь μ записано в явном виде, r_* — радиус сосуда, при котором смесь воспламеняется.

Слева стоит член, характеризующий тепловыделение в смеси за счет саморазогрева. Следовательно, тепловой поток от саморазогрева в единицу времени равен теплоотводу за счет кондукции также в единицу времени. Таким образом, физическое содержание критического условия в стационарной теории теплового взрыва Д. А. Франк-Каменецкого [1] является таким же, как и в теории воспламенения Н. Н. Семенова [2].

§ 2. Постановка задачи о зажигании смеси накаленным цилиндром. Вывод критических условий. Рассмотрим бесконечный цилиндр, наполненный горючей смесью. В середину этого сосуда внесем накаленный цилиндр. Определим размер и температуру T_2 накаленного цилиндра, при которых смесь в сосуде воспламенится. При решении этой задачи считаем выполненными допущения, сделанные в [1] и, кроме того, считаем, что поверхность тела не является катализатором и на ней не протекают реакции.

Математически задача сводится к интегрированию уравнения

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d\theta}{dx} + \mu\exp\theta = 0 \quad \left(x = \frac{\xi}{r_1},\ \ \mu = 2\delta = mr_1{}^2\right) \tag{2.1}$$

с граничными условиями

$$\theta = 0 \ \text{ при } x = 1, \qquad \theta = \theta_2 \ \text{ при } x = k\left(k = \frac{r_2}{r_1}\right), \qquad \theta_2 = \frac{(T_2 - T_1)E}{RT_1{}^2} \tag{2.2}$$

Здесь r_2 — радиус накаленного цилиндра, r_1 — радиус цилиндра, заключающего смесь, θ_2 — безразмерная температура накаленного цилиндра, μ — безразмерный параметр, подлежащий определению, m — физико-химическая константа, χ — безразмерная координата.

Меняя второе граничное условие (2.2), можно из решения этой задачи получить решение ряда других задач. Положив $\theta = \theta_2$ при $x = 0$, получим решение задачи о самовоспламенении смеси в цилиндрическом сосуде[1]. Полагая $\theta = 0$ при $x = k$, получим решение задачи о самовоспламенении смеси в цилиндрической полости. Наконец, если взять граничные условия в виде (2.2), но считать θ_2 таким, что невозможно принудительное зажигание, получим решение задачи о самовоспламенении смеси в цилиндрической полости, когда внутренний цилиндр несколько теплее внешнего.

Введем, согласно [3], новую независимую переменную $u = \ln x$ и новую функцию $v = \theta + 2u$. Тогда уравнение (1.1) примет вид

$$\frac{d^2v}{du^2} + \mu \exp v = 0 \tag{2.3}$$

а граничные условия преобразуются к виду

$$v = 0 \quad \text{при } u = 0, \qquad v = 2 \ln k + \theta_2 \quad \text{при } u = \ln k \tag{2.4}$$

Согласно Д. А. Франк-Каменецкому [1], общий интеграл уравнения (2.3) можно записать так

$$\exp v = \frac{a}{ch^2 (b \pm \sqrt{a\delta} u)} \tag{2.5}$$

Удовлетворяя (2.5) граничным условиям (2.4) для определения произвольных постоянных a и b, получаем систему

$$a = \mathrm{ch}^2 b, \ \exp (\theta_2 + 2 \ln k) = \frac{a}{\mathrm{ch}^2 (b \pm \sqrt{a\delta} \ln k)}$$

Исключая из этой системы a, имеем

$$ne^{\varkappa} \mathrm{ch} (b \pm \varkappa \sqrt{\delta} \,\mathrm{ch}\, b) = \mathrm{ch}\, b \qquad \left(n = \exp \frac{\theta_2}{2}, \ \varkappa = \ln k\right) \tag{2.6}$$

Обозначая $\mathrm{ch}\, b = c$ и решая (2.6) относительно $\delta = \mu/2$, получим

$$2\delta = \mu = \frac{2}{c^2\varkappa^2} \left(\mathrm{Arch} \left[\frac{c^2}{n} e^{-\varkappa} \pm \sqrt{(c^2 - 1) \left[\frac{c^2}{n} e^{-2\varkappa} - 1 \right]} \right] \right)^2 \tag{2.7}$$

Нас интересуют значения μ, при которых (2.7) перестает иметь решения, так как именно при этих значениях μ, согласно стационарной теории [1], невозможно стационарное распределение температуры в реакционном сосуде. Фиксируем в (2.7) значения величин $\varkappa$ и n. Из вида (2.7) следует, что $\mu = \mu$ ($c_1 \varkappa$, n) будет монотонно убывающей функцией параметра c. Следовательно, минимальному из возможных c соответствует максимальное значение μ. Так как $c = \mathrm{ch}\, b$, то минимальное значение c равно единице. Тогда максимальным значением μ будет $\mu = \mu(1, \varkappa, n)$. При этом значении μ уравнение (2.7) перестает иметь решения, так как значения $\mu > \mu$ (1, $\varkappa$, n) уже не удовлетворяют (2.7).

Полагая $c = 1$, из (2.7) получаем критическое условие для стационарного распределения температуры в смеси

$$2\delta_* = \mu_* = \frac{2}{\varkappa} \left(\mathrm{Ar\,ch} \frac{e^{-\varkappa}}{n} \right)^2 \tag{2.8}$$

---

[1] Отметим, что к задаче о тепловом взрыве в цилиндре замена переменных вида $u = \ln x$ $v = \theta + 2u$ впервые была применена Д. А. Франк-Каменецким [6].

Имея в виду, что $\varkappa = \ln k$, $n_1 = \exp \theta_2/2$, из (2.8) получаем

$$2\delta_* = \mu_* = 2\left[\frac{\ln\left[\exp(-A_2/2) + \sqrt{e^{-\theta_2} - k^2}\right]}{\ln k} - 1\right]^2 \tag{2.9}$$

Отсюда следует, что $\lim \mu_* = 2$ при $k \to 0$, т. е. из (2.9) получаем критическое условие для задачи о самовоспламенении смеси в цилиндрическом сосуде, данное в работах [1, 3]. Положив $\theta_2 = 0$, получаем критическое условие для задачи о самовоспламенении смеси в цилиндрической полости

$$2\delta_* = \mu_* = 2\left[\frac{\ln(1 + \sqrt{1 - k^2})}{\ln k} - 1\right]^2 \tag{2.10}$$

§ 3. Решение задачи о тепловом взрыве смеси в цилиндрической полости. Критический профиль температуры для задачи в самовоспламенении смеси в полости дается формулой

$$\theta = -2 \ln \frac{1}{2} x \left(x^{\sqrt{\delta_*}} + x^{-\sqrt{\delta_*}}\right) \tag{3.1}$$

Здесь δ_* выбирается по формуле (2.10). Выясним, при всех ли k возможно решение задачи о самовоспламенении смеси в полости. Так как в нашей задаче $2\delta_* = mr_1^2$, то размер полости, или иначе зазор между внешним и внутренним цилиндрами, дается формулой

$$d = r_1 - r_2 = \sqrt{\frac{2\delta}{m}}\,(1 - k)$$

Так как $m = \mathrm{const}$, то изменение d можно проследить по изменению величины

$$d_1 = \sqrt{2\delta}\,(1 - k)$$

При увеличении k условия адиабатичности смеси в полости ухудшаются и, чтобы компенсировать это ухудшение, следует увеличивать зазор. Если увеличению k несоответствует увеличение d_1, то такие k придется отбросить. Расчет показал, что этому требованию удовлетворяют k, лежащие в пределах $0 < k \leqslant 0.07$. Тогда δ_* меняются в пределах $2 < 2\delta_* < 3.1761$.

Вычислим предвзрывной разогрев, соответствующий $k = 0.07$. Значения x, определяющие максимум (3.1), даются формулой

$$\ln x = \frac{1}{2\sqrt{\delta_*}} \ln \frac{\sqrt{\delta_*} - 1}{\sqrt{\delta_*} + 1} \tag{3.2}$$

При $k = 0.07$ имеем $2\delta_* = 3.1761$. Тогда по формуле (3.2) получаем $x = 0.424$. Подставляя это значение x в (3.1), получим $\theta = 0.891$.

Эта температура будет максимальной из всех возможных температур для этой задачи, так как условия адиабатичности смеси в полости при $k = 0.07$ наихудшие.

§ 4. Решение задачи о зажигании смеси накаленным цилиндром. Вернемся к решению задачи о принудительном воспламенении смеси накаленным цилиндром. К условию невозможности стационарного распределения температуры (2.9) надо добавить в этом случае условие Я. Б. Зельдовича [4] для принудительного воспламенения, которое позволит из всех критических состояний горючей смеси выбрать состояние, соответствующее принудительному воспламенению смеси. В нашем случае оно имеет вид

$$\left(\frac{d\theta}{dx}\right)_{x=k} = 0 \tag{4.1}$$

Критическое распределение температуры в случае принудительного воспламенения смеси накаленным цилиндром определяется формулой (3.1), но δ_* нужно выбрать так, ч бы наполнялось условие (4.1). Следует отметить, что из (3.1) при $\delta_* = 1$ можно получить критический профиль температуры, который дан в работе [3] для теплового взрыва смеси в цилиндре

Условие (4.1) будет выполнено, если δ_* выбирать по формуле

$$\ln k = \frac{1}{2\sqrt{\delta_*}} \ln \frac{\sqrt{\delta_*} - 1}{\sqrt{\delta_*} + 1} \tag{4.2}$$

Записывая (2.8) в виде, разрешенном относительно θ_2, имеем

$$\theta_2 = -2 \ln \frac{1}{2} k \left(k^{\sqrt{\delta_*}} + k^{-\sqrt{\delta_*}}\right) \tag{4.3}$$

Формулы (4.2) и (4.3) полностью решают задачу о принудительном воспламенении смеси в сосуде накаленным цилиндром.

Действительно, пусть известен размер источника воспламенения, тогда известно k. По заданному k определим δ_*, согласно (4.2), а затем по известным k и δ_* определяем температуру источника зажигания, согласно (4.3). Расчеты показывают, что при уменьшении размера источника воспламенения температура источника возрастает.

Например, для $k = 0.424$, 0.1, 0.01 из (4.2) соответственно имеем $\sqrt{\delta_*} = 1.2606$, 1.0185, 1.0002, а из (4.3) получаем соответственно $\theta_2 = 0.891$, 1.28, 1.386.

Как видно из приведенных данных, температура накаленного цилиндра всегда выше температуры самовоспламенения смеси в цилиндрической полости и лишь при $k = 0.424$ обе температуры совпадают. При $k > 0.424$ значения θ_2 получаются меньше, чем температура самовоспламенения. Это физически нереально, поэтому значения $k > 0.424$ надо отбросить.

Зная решение задачи о зажигании смеси в сосуде, можно решить обратную задачу о воспламенении смеси, граничащей с накаленным телом. Эту задачу можно сформулировать так: дано критическое значение δ_*, требуется определить размер источника воспламенения, толщину слоя, в котором происходит воспламенение, и его температуру. Отметим, что температуре $T = T_1$ соответствует определенный пограничный слой, в котором $T \geqslant T_1$.

Если за единицу длины в задаче о воспламенении цилиндрического пограничного слоя взять r_1 — расстояние от оси накаленного цилиндра до внешней границы пограничного слоя, то формулы (4.2) и (4.3) решают обратную задачу о воспламенении пограничного слоя.

Размер источника воспламенения определяется по формуле

$$r_2 = k \sqrt{\frac{2\delta_*}{m}} \tag{4.4}$$

а толщина пограничного слоя равна

$$d = (1 - k) \sqrt{\frac{2\delta_*}{m}} \tag{4.5}$$

В заключение автор благодарит С. В. Фальковича за указания при выполнении работы.

Поступила 25 VII 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Франк-Каменецкий Д. А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. АН СССР, 1947.
2. Семенов Н. Н. Тепловая теория горения и взрывов. Усп. физ. наук, 1940, № 3, стр. 23.
3. Франк-Каменецкий Д. А. Аналитическое решение задачи о тепловом взрыве для цилиндрического случая. ЖФХ, 1958, № 5, стр. 32.
4. Зельдович Я. Б. Теория зажигания накаленной поверхностью. ЖЭТФ, 1939, № 12, стр. 9.
5. Гельфанд И. М. Задачи теории квазилинейных уравнений. Усп. матем. наук, 1959, т. XIV, № 2 (86).