критической деформации (следовательно, и силы), когда происходит потеря устойчивости, соответствует $n = 2$.

Поступила 20 VIII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. **Zahorski S.** On plastic instability in some cases of simple flow.— «Bull. Acad. polon. sci.» Ser. sci. techn., 1964, vol. 12, N 12.
2. **Zahorski S.** Kinematic stability in the case of slow steady plastic flow.— «Arch. mech. stosowanej», 1964, vol. 16, N 6.
3. **Спорыхин А. Н., Трофимов В. Г.** О пластической неустойчивости в некоторых случаях простого течения.— ПММ, 1974, т. 38, вып. 4.
4. **Скаченко А. В., Спорыхин А. Н.** Устойчивость упругопластических тел при больших пластических деформациях.— ПМ, 1976, т. XII, № 5, с. 11—17.
5. **Wesolowski Z.** Stability of an elastic thickwalled spherical shell loaded by an external pressure.— «Arch. mech. stosowanej», 1967, vol. 19, N 1.

УДК 539.4.012.1

ФОРМУЛЫ ДЛЯ РАСЧЕТА НАИБОЛЕЕ УСТОЙЧИВЫХ ПОД ВНЕШНИМ ДАВЛЕНИЕМ АРМИРОВАННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

В. М. Павлов, Л. И. Шкутин

(Новосибирск)

Задача об определении структуры армирования, обеспечивающей наибольшую устойчивость нагруженной внешним давлением цилиндрической оболочки, поставлена в работе [1]. На основе формулы, определяющей предел устойчивости безмоментного состояния шарнирно-опертой анизотропной круговой цилиндрической оболочки средней длины, в [1] получено ее численное решение для частного класса структур. В данной работе предел устойчивости определяется более точной формулой, не требующей ограничения длины оболочки, а оптимизация осуществляется в более широком классе структур.

1. Рассматривается круговая цилиндрическая оболочка постоянной толщины H, среднего радиуса R и длины L, изготовленная из волокнистого композиционного материала. Предполагается, что материал имеет регулярнослоистую структуру, так что в нем выделяется характерный слой, толщина которого мала по сравнению с толщиной оболочки; характерный слой имеет многонаправленное армирование, симметричное относительно произвольного осевого сечения оболочки; волокна всех направлений изготовлены из одного и того же линейно-упругого материала; связующий материал является линейно-упругим и изотропным.

Для описания напряженно-деформированного состояния характерного слоя используется механическая модель, предложенная в работе [2]. При сформулированных выше предположениях эта модель подменяет элемент армированного слоя статически эквивалентным ему элементом ортотропно-упругого однородного слоя, напряженно-деформированное состояние которого определяется в главной системе поверхностных координат симметричными плоскими тензорами осредненных напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} (индексы i, j пробегают значения 1 и 2). Упрощенные в соответствии с исходными предположениями уравнения связи [2] между компонентами этих тензоров имеют вид

(1.1) $$\sigma_{11} = \omega \mathrm{E}(a_{11}\varepsilon_{11} + a_{12}\varepsilon_{12}),\ \sigma_{12} = \omega \mathrm{E} a_{33}\varepsilon_{12},\ 1 \rightleftarrows 2;$$

(1.2) $$a_{11} = \varepsilon + \sum_{k=1}^{K} \frac{\omega_k}{\omega}\chi_{1k}^2,\quad a_{12} = \varepsilon\nu_0 + \sum_{k=1}^{K}\frac{\omega_k}{\omega}\chi_{1k}^2\chi_{2k}^2,\quad 1 \rightleftarrows 2,$$

$$a_{33} = \varepsilon(1-\nu_0) + 2\sum_{k=1}^{K}\frac{\omega_k}{\omega}\chi_{1k}^2\chi_{2k}^2,\quad \omega_k \geqslant 0,\quad \omega = \sum_{k=1}^{K}\omega_k < 1,$$

$$\varepsilon = (1-\omega)\mathrm{E}_0/(1-\nu_0^2)\mathrm{E}\omega > 0,\quad 0 \leqslant \nu_0 \leqslant 1/2,$$

где E_0, E — модули упругости связующего и волокон соответственно; ν_0 — коэффициент Пуассона связующего; $\omega_k (k = 1, 2, \ldots, K)$ — удельное объемное содержание волокон k-го направления (K — число всех направлений); ω — удельное объемное содержание арматуры; χ_{ik} — направляющие косинусы k-го направления относительно i-й координатной линии.

Для деформаций оболочки, подчиненных кинематическим гипотезам Кирхгофа, справедливо представление

$$\varepsilon_{ij} = p_{ij} + \zeta q_{ij},$$

где p_{ij}, q_{ij} — симметричные тензоры тангенциальных и изгибных деформаций срединной поверхности; ζ — нормальная к ней координата. Пусть N_{ij} — симметричный тензор тангенциальных усилий, M_{ij} — симметричный тензор внутренних моментов оболочки. Обычной процедурой интегрирования по нормальной координате из (1.1) устанавливаются следующие уравнения связи между силовыми и деформационными тензорами рассматриваемой оболочки:

(1.3) $$M_{11} = D(a_{11}q_{11} + a_{12}q_{22}),\ M_{12} = Da_{33}q_{12},$$

$$p_{22} = B(b_{12}N_{11} + b_{11}N_{22}),\ p_{21} = Bb_{33}N_{21},\ 1 \rightleftarrows 2;$$

(1.4) $$b_{11} = a_{11}/a,\ b_{22} = a_{22}/a,\ b_{12} = -a_{12}/a,\ b_{33} = 1/a_{33},$$

$$a = a_{11}a_{22} - a_{12}^2,\quad B = 1/H\mathrm{E}\omega,\quad D = H^3\mathrm{E}\omega/12.$$

Полученные уравнения ортотропно-упругой связи используем для определения предела устойчивости рассматриваемой оболочки с шарнирно-опертыми торцами при сжатии ее равномерным поперечным давлением. Предполагая, что оболочка достаточно тонкая, пренебрежем влиянием на ее предел устойчивости докритических изгибных деформаций. Устойчивость безмоментного состояния рассматриваемой оболочки исследуем с помощью уравнений непологих оболочек, представленных в смешанной (статико-геометрической) форме [3] (для ортотропной оболочки разрешающая система двух уравнений получается так же, как для изотропной). Эти уравнения дают следующее условие устойчивости безмоментного состояния (p — интенсивность поперечного давления, $m = 1, 2, 3, \ldots$ — число полуволн по образующей, $n = 2, 3, 4, \ldots$ — число волн по окружности):

(1.5) $$q < q^* = \min_{m,n} Q;$$

(1.6) $$Q = tn^2Q_1 + r^4m^4n^{-6}t^{-3}/Q_2,$$

$$Q_1 = a_{22}(1-n^{-2}) + 2[(1-n^{-2})a_{12} + a_{33}]r^2n^{-2}m^2 + a_{11}r^4n^{-4}m^4,$$

$$Q_2 = b_{22}(1-n^{-2}) + 2[(1-n^{-2})b_{12} + b_{33}]r^2n^{-2}m^2 + b_{11}r^4n^{-4}m^4,$$

$$q = p/(\sqrt{12}t^5\omega\mathrm{E}),\ r = \pi R/L,\ t^2 = H/\sqrt{12}R.$$

Критическое значение q^* параметра нагрузки q определяет предел устойчивости нагруженной поперечным давлением оболочки. Так как входящие в выражение (1.5) коэффициенты упругости a_{ij}, a_{33}, b_{ij}, b_{33} зависят, согласно (1.2), от структуры композиционного материала и от упругих свойств его отдельных компонент, то имеется реальная возможность управления пределом устойчивости рассматриваемой оболочки.

2. Поставим следующую задачу оптимизации [1]: при заданных упругих характеристиках армирующего и связующего материала и постоянном объемном содержании арматуры определить такую структуру армированного материала (структуру армирования), которой отвечает наибольшее критическое значение нагрузки.

Прежде всего выделим независимые параметры оптимизации и исследуем области их возможных значений. Пусть

$$\varphi = \sum_{k=1}^{K} \frac{\omega_k}{\omega} \chi_{1k}^2, \quad \psi = \sum_{k=1}^{K} \frac{\omega_k}{\omega} \chi_{1k}^2 \chi_{2k}^2. \tag{2.1}$$

Тогда выражения (1.2) примут вид

$$\begin{gathered} a_{11} = \varepsilon + \varphi - \psi, \; a_{22} = 1 + \varepsilon - \varphi - \psi, \\ a_{12} = \psi + \nu_0 \varepsilon, \; a_{33} = 2\psi + (1 - \nu_0)\varepsilon, \end{gathered} \tag{2.2}$$

выявляющий зависимость коэффициентов упругости от двух параметров φ, ψ (постоянные ε и ν_0 заданы). Конкретная структура армирования, отвечающая фиксированным значениям параметров φ и ψ, определяется из уравнений (2.1), вообще говоря, неоднозначно. Поэтому оптимальным значениям этих параметров может отвечать целый набор оптимальных структур армирования.

Область изменения параметров φ, ψ не может быть произвольной, поскольку они вычисляются через параметры ω_k, χ_{ik}, подчиняющиеся условиям

$$\omega_k \geqslant 0, \quad \sum_{k=1}^{K} \omega_k/\omega = 1, \quad 0 \leqslant \chi_{ik}^2 \leqslant 1, \quad \chi_{2k}^2 = 1 - \chi_{1k}^2,$$

используя которые, можно доказать, что все значения φ и ψ, соответствующие какой-либо структуре армирования, лежат в области

$$\Omega : 0 \leqslant \varphi \leqslant 1, \; 0 \leqslant \psi \leqslant \varphi(1 - \varphi).$$

Действительно, первое ограничение следует непосредственно из (2.1), поскольку величины χ_{1k}^2 $(k = 1, 2, \ldots, K)$ независимы. Далее, пусть $J \leqslant K$ — такой номер, что

$$\chi_{1k}^2 \chi_{2k}^2 \leqslant \chi_{1J}^2 \chi_{2J}^2 = \chi_{1J}^2 (1 - \chi_{1J}^2).$$

При этом знак равенства достигается здесь, когда $\chi_{ik} = \chi_1$ $(k = 1, 2, \ldots$ $\ldots, K)$, т. е. когда, согласно (2.1), $\chi_{1J}^2 = \varphi$. Это значит, что

$$\chi_{1k}^2 \chi_{2k}^2 \leqslant \varphi (1 - \varphi).$$

Применяя это неравенство к выражению (2.1) для ψ, устанавливаем второе из ограничений Ω.

В системе координат φ, ψ область Ω — это сегмент параболы $\psi = \varphi(1 - \varphi)$, отсекаемый прямой $\psi = 0$. Каждая точка прямой границы области Ω определяет два семейства волокон, одно из которых направлено по окружности, другое — по образующей, а каждая точка ее параболической границы определяет два симметричных косых семейства. Исключение составляют две угловые точки границы: $\varphi = 0$, $\psi = 0$ и $\varphi = 1$, $\psi = 0$. Первой отвечает одно окружное семейство, второй — одно осевое.

Задача оптимизации заключается в нахождении таких значений параметров ортотропии φ, ψ, для которых критическое значение параметра нагрузки является наибольшим:

$$q^+ = \max_{\varphi,\psi} q^* = \max_{\varphi,\psi} \min_{m,n} Q. \tag{2.3}$$

Если значения параметров φ, ψ из Ω таковы, что выполнено неравенство

$$b_{12} + b_{33} \geqslant 0, \tag{2.4}$$

то значение параметра m, реализующее минимум Q, равно единице для любого $n \geqslant 2$, так как оба слагаемых выражения (1.6) являются возрастающими по m функциями. Действительно, из формул (2.2) и (1.4) следуют справедливые в области Ω оценки

$$a_{11} \geqslant \varepsilon + \varphi^2 > 0,\ a_{22} \geqslant \varepsilon + (1-\varphi)^2 > 0,\ 0 < a_{12} \leqslant \nu_0\varepsilon + \varphi(1-\varphi),$$

$$a \geqslant \left(1-\nu_0^2\right)\varepsilon^2 + [(1-2\varphi)^2 + 2\varphi(1-\varphi)(1-\nu_0)]\,\varepsilon > 0,\quad b_{11} > 0,\quad b_{22} > 0,$$

которые вместе с условием (2.4) обеспечивают (при $n \geqslant 2$) положительность всех коэффициентов выражений Q_1 и Q_2, рассматриваемых как полиномы относительно m. Поэтому с ростом m функция Q_1 возрастает, функция Q_2/m^4 убывает, а обратная ей функция m^4/Q_2 возрастает.

Заметим, что условие (2.4) может нарушаться на параболической границе области Ω. Действительно, параметры a_{ij}, a_{33} здесь принимают значения, сравнимые с единицей, тогда как параметр a имеет порядок ε — малой по определению композиционного материала величины. Согласно (1.4), параметр b_{12} может принимать здесь большие отрицательные значения при сравнимых с единицей положительных значениях b_{33}. Этот анализ позволяет установить механический смысл условия (2.4): оно исключает оболочки, армированные двумя косыми семействами волокон и обладающие (при малой жесткости связующего) более высокой податливостью на растяжение и сжатие, чем на сдвиг.

Очевидно, что

$$q^*(\varphi, \psi) = \min_{m,n} Q \leqslant \min_{m=1,n} Q \equiv q_*(\varphi, \psi),$$

причем для значений параметров φ, ψ, удовлетворяющих неравенству (2.4), имеет место знак равенства. Отсюда следует, что если значения $\varphi = \varphi_+$, $\psi = \psi_+$, реализующие максимум

$$q_+ = \max_{\varphi,\psi} q_* = \max_{\varphi,\psi} \min_{m=1,n} Q, \tag{2.5}$$

удовлетворяют условию (2.4), то эти значения реализуют максимум (2.3), так как

$$q^*(\varphi_+, \psi_+) = q_*(\varphi_+, \psi_+) \geqslant q_*(\varphi, \psi) \geqslant q^*(\varphi, \psi),$$

т. е.

$$q^*(\varphi_+, \psi_+) \geqslant q^*(\varphi, \psi)$$

(для любых φ, ψ из Ω).

В дальнейшем рассматривается вспомогательная задача вычисления экстремума (2.5) и реализующих его значений $\varphi = \varphi_+$, $\psi = \psi_+$, $n = n_+$. Эта задача решается последовательно в два этапа. На первом этапе выявляется подобласть области Ω, для точек которой порядок величины q_* является наибольшим, и оценивается порядок соответствующих этим точкам минимизирующих значений n. Это позволяет заменить точную задачу (2.5) некоторой упрощенной задачей. На втором этапе отыскиваются явные решения упрощенной задачи в некоторых областях изменения геометрических параметров t, r. Для этих решений условие (2.4) оказывается выполненным, так что они являются асимптотически точными решениями поставленной задачи оптимизации.

Ограничим временно область изменения параметров φ, ψ требованием

(2.6) $$a_{22} = O(1),$$

исключающим из области Ω окрестность точки $\varphi = 1$, $\psi = 0$. Свяжем порядок величин r, n, Q (при $m = 1$) с малым параметром t

$$r = O(t^{\alpha}),\ \alpha \geqslant 0,\ n^2 = O(t^{-\beta}),\ \beta \geqslant 0,\ Q|_{m=1} = O(t^{\gamma})$$

(α, β, γ — показатели порядка). Смысл первого из этих равенств — сравнительная оценка двух независимых геометрических параметров r, t, значения которых известны по условию. Поэтому известно и значение показателя α (условие $\alpha \geqslant 0$ исключает очень короткие оболочки). Остальные же показатели порядка неизвестны и определяются в результате асимптотического анализа решения сформулированной задачи оптимизации.

Обозначим показатель порядка первого слагаемого в выражении (1.6) (при $m = 1$) через γ_1, а показатель порядка второго — через γ_2. Показатель γ выражается через γ_1, γ_2 по формуле

$$\gamma = \min(\gamma_1, \gamma_2).$$

Этот показатель рассматривается как функция параметров β, φ, ψ (значение параметра α предполагается фиксированным). Пусть

$$q_* = O(t^{\gamma_*}),\quad q_+ = O(t^{\gamma_+}),$$

тогда в соответствии с (2.5)

(2.7) $$\gamma_+ = \min_{\varphi,\psi} \gamma_*,\ \gamma_* = \max_{\beta} \gamma = \max_{\beta} [\min(\gamma_1, \gamma_2)],$$

пользуясь соотношениями (2.6), (1.4), (2.2), можно показать, что

$$Q_1|_{m=1} = O(1),\ Q_2 = O(t^{-\tau}),\ \tau \geqslant 0\ (Q_2 > 1/(1+\varepsilon))$$

и, следовательно,

(2.8) $$\gamma_1 = 1 - \beta,\ \gamma_2 = 4\alpha + 3\beta - 3 + \tau(\beta, \varphi, \psi).$$

Так как величина γ_2 является возрастающей, а величина γ_1 — убывающей по β, то (β_* — значение параметра β, реализующее максимум (2.7))

(2.9) $$\gamma_* = \begin{cases} 1, & \text{если } \gamma_1(0) \leqslant \gamma_2(0), \\ 1 - \beta_0, & \text{если } \gamma_1(0) > \gamma_2(0), \end{cases} \quad \beta_* = \begin{cases} 0, & \text{если } \gamma_1(0) \leqslant \gamma_2(0), \\ \beta_0, & \text{если } \gamma_1(0) > \gamma_2(0), \end{cases}$$

где β_0 — решение уравнения

(2.10) $$\gamma_1(\beta) = \gamma_2(\beta).$$

Условие $\gamma_1(0) > \gamma_2(0)$, которое в развернутом виде можно записать как

$$\alpha + \tau(0, \varphi, \psi)/4 < 1,$$

обеспечивает существование решения уравнения (2.10). Из формул (2.8)—(2.10) следует представление

$$\gamma_*(\varphi, \psi) = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha + \tau(0, \varphi, \psi)/4 \geqslant 1, \\ \alpha + \tau(\beta_0, \varphi, \psi), & \text{если } \alpha + \tau(0, \varphi, \psi)/4 \leqslant 1, \end{cases}$$

$$\beta_*(\varphi, \psi) = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha + \tau(0, \varphi, \psi)/4 \geqslant 1, \\ 1 - \alpha - \tau(\beta_0, \varphi, \psi)/4, & \text{если } \alpha + \tau(0, \varphi, \psi)/4 \leqslant 1, \end{cases}$$

из которого получаем (поскольку $\tau \geqslant 0$)

(2.11) $$\gamma_+ = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha \geqslant 1, \\ \alpha, & \text{если } \alpha \leqslant 1, \end{cases} \quad \beta_+ = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha \geqslant 1, \\ 1-\alpha, & \text{если } \alpha \leqslant 1 \end{cases}$$

(β_+ — значение величины β, соответствующее γ_+). Эти значения реализуются для параметров φ, ψ, удовлетворяющих условиям

$$a_{22} = O(1),\ \tau(1-\alpha, \varphi, \psi) = 0, \text{ если } 0 \leqslant \alpha \leqslant 1,$$
$$a_{22} = O(1), \text{ если } \alpha > 1,$$

которые эквивалентны следующим:

(2.12) $$\varepsilon + 1 - \varphi - \psi = O(1),\ \varepsilon\nu_0 + 2\psi \geqslant O(t^{1+\alpha}),$$
$$a = O(1), \text{ если } 0 \leqslant \alpha \leqslant 1;$$

(2.13) $$\varepsilon + 1 - \varphi - \psi = O(1), \text{ если } \alpha > 1.$$

Из приведенного анализа следует, что если $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, то при вычислении величины q_+ по формуле (2.5) в выражении (1.6) существенны оба слагаемых. Если же $\alpha > 1$, то определяющую роль играет первое слагаемое этого выражения, так как при $\beta = \beta_+$

(2.14) $$\gamma_1 = 1,\ \gamma_2 = 1 + 4(\alpha - 1) + \tau.$$

Этим завершается исследование порядка величины q_* в той части области Ω, для которой выполняется условие (2.6). В результате аналогичного, но громоздкого и поэтому опущенного здесь исследования было установлено, что порядок величины q_* в оставшейся части области Ω (окрестность точки $\varphi = 1$, $\psi = 0$) меньше, чем в подобластях, выделенных условиями (2.12), (2.13). В этих подобластях, как следует из (2.11),

(2.15) $$r^2 n_*^{-2} = O(t^{\delta}),\quad \delta = \begin{cases} 1+\alpha, & \text{если } 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \\ 2\alpha, & \text{если } \alpha > 1 \end{cases}$$

(n_* — значение n, минимизирующее Q при $m = 1$), так что выражение (1.6) можно упростить (при $m = 1$) к виду

(2.16) $$Q = t(n^2 - 1) a_{22} + \frac{r^4 n^{-6} t^{-3}}{(1 - n^{-2}) b_{22} + 2 b_{33} r^2 n^{-2}}$$

По этому упрощенному выражению величина q_* вычисляется с погрешностью порядка t^{δ} (δ определяется, согласно (2.15)) в подобластях (2.12), (2.13) и с большей погрешностью в остальной части Ω. Но так как наибольшее значение q_* при этом реализуется в указанных подобластях, то оно вычисляется с погрешностью порядка t^{δ}, если даже формулой (2.16) пользоваться во всей области Ω.

Покажем, что в тех случаях, когда значение параметра α не лежит вблизи единицы, выражение (2.16) можно упростить так, что вспомогательная задача (2.5) с определенной степенью точности решается аналитически.

Пусть значение α лежит в интервале $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Разобьем область Ω прямой

(2.17) $$\psi = \psi_0 \equiv \begin{cases} t^{\alpha+1/2} - (1-\nu_0)\varepsilon/2, & \text{если } t^{\alpha+1/2} \geqslant (1-\nu_0)\varepsilon/2, \\ 0, & \text{если } t^{\alpha+1/2} \leqslant (1-\nu_0)\varepsilon/2, \end{cases}$$

на две подобласти:

(2.18) $$\psi_0 \leqslant \psi \leqslant \varphi(1-\varphi),\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 1;$$

(2.19) $$0 \leqslant \psi \leqslant \min[\psi_0, \varphi(1-\varphi)],\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 1$$

(при $\psi_0 = 0$ имеется только одна подобласть, совпадающая со всей областью Ω). В подобласти (2.18)

$$b_{33} r^2 n_*^{-2} \leqslant O(t^{1/2}),$$

так что, допуская погрешность порядка $t^{1/2}$, этим членом можно пренебречь по сравнению с b_{22}. Поскольку в подобласти (2.19) $\psi \leqslant t^{\alpha+1/2}$, а реализующее экстремум (2.5) значение $\varphi = \varphi_+$, согласно (2.12), таково, что

$$\varphi_+ = O(1), \; 1 - \varphi_+ = O(1),$$

можно принять

$$a_{22} \approx a_{22}^0 = 1 - \varphi + \varepsilon, \quad b_{22} \approx b_{22}^0 = 1/(\varphi + \varepsilon).$$

В результате приходим к следующим упрощенным выражениям:

(2.20) $$Q = t(n^2 - 1) a_{22} + \frac{r^4 n^{-6} t^{-3}}{(1 - n^{-2}) b_{22}} \quad \text{(в подобласти (2.18))},$$

$$Q = t(n^2 - 1) a_{22}^0 + \frac{r^4 n^{-6} t^{-3}}{(1 - n^{-2}) b_{22}^0 + 2 b_{33} r^2 n^{-2}} \quad \text{(в подобласти (2.19))}.$$

Первое из этих выражений является убывающей, а второе— возрастающей функцией ψ, так как

$$\partial a_{22}/\partial\psi < 0, \; \partial b_{22}/\partial\psi > 0, \; \partial b_{33}/\partial\psi < 0,$$

и, следовательно, наибольшее значение величины q_* достигается на линии $\psi = \psi_0$, т. е. $\psi_+ = \psi_0$. Поэтому при вычислении экстремума (2.5) с погрешностью порядка $t^{1/2}$ вместо (2.16) можно использовать выражение

(2.21) $$Q = t(n^2 - 1) a_{22}^0 + \frac{r^4 n^{-6} t^{-3}}{(1 - n^{-2}) b_{22}^0}.$$

Если значение параметра α не очень близко к единице, то можно пренебречь n_*^{-2} по сравнению с единицей, так как для значений параметров φ, ψ, реализующих максимум (2.5) по порядку, в силу (2.11)

$$n_*^{-2} = O(t^{1-\alpha}).$$

Благодаря этому выражение (2.21) упрощается к виду

$$Q = t n^2 a_{22}^0 + r^4 n^{-6} t^{-3} / b_{22}^0.$$

Минимум этой величины по n, а затем максимум величины q_* по φ вычисляются аналитически. В результате для величин, реализующих экстремум (2.5), получаются следующие выражения:

(2.22) $$q_+ = r[1 + O(t^{1/2} + t^{1-\alpha} + \varepsilon)], \; 0 \leqslant \alpha < 1,$$

$$n_+ = \langle \sqrt{t^{-1}} r \rangle, \; \varphi_+ = 1/4, \; \psi_+ = \psi_0$$

(угловые скобки обозначают целую часть числа). Значение ψ_0 дается формулой (2.17).

Заметим, что если $\varepsilon = O(t^\rho)$, то при $1/2 + \alpha \leqslant \rho \leqslant 1 + \alpha$ можно считать $\psi_+ = 0$, а результат (2.22) верен с погрешностью порядка $t^{1+\alpha-\rho}$. При $\rho > 1 + \alpha$, хотя значение ψ_0 близко к нулю, нельзя считать, что $\psi_+ = 0$, так как наибольшее по φ значение величины q_*, имеющее при $\psi = 0$ порядок $t^{\alpha+\delta}$ $(\delta = (\rho - \alpha - 1)/3 > 0)$, существенно меньше значения (2.22), имеющего порядок t^α.

Формулы (2.22) дают полное решение вспомогательной задачи в интервале $0 \leqslant \alpha < 1$. В интервале $\alpha > 1$ из (2.14) следует, что для Q можно принять выражение

$$Q = t(n^2 - 1)a_{22},$$

из которого находим полное решение вспомогательной задачи в виде

$$(2.23) \qquad q_+ = 3t\{1 + O[t^{2\alpha} + t^{4(\alpha-1)} + \varepsilon]\},\ n_+ = 2,\ \varphi_+ = \psi_+ = 0.$$

Для значений α, близких к единице, вспомогательная задача в явном виде не решается. При ее численном решении можно пользоваться упрощенным выражением (2.16), а если $\alpha < 1$, то еще более простым выражением (2.21).

Значения параметров φ_+, ψ_+, определяемые формулами (2.22), (2.23), удовлетворяют условию (2.4). Поэтому решения (2.22), (2.23) вспомогательной задачи дают решения задачи оптимизации в областях изменения параметров t, r, соответствующих рассмотренным интервалам изменения параметра α. Для удобства приведем эти решения, выраженные в размерных параметрах.

Область А. Параметры t, r удовлетворяют соотношению

$$r = O(t^\alpha),\ 0 \leqslant \alpha < 1$$

(оболочки «средней» длины).

Имеем следующие формулы для оптимальных величин:

$$(2.24) \qquad p_+ = \sqrt{12}\,\pi\omega \frac{R}{L}\left(\frac{H}{\sqrt{12}R}\right)^{5/2}\mathrm{E},\quad n_+ = \left\langle \sqrt{\left(\frac{\sqrt{12}R}{H}\right)^{1/2}\frac{\pi R}{L}} \right\rangle,\ \varphi_+ = 1/4,\ \psi_+ = \psi_0$$

(величина ψ_0 определяется формулой (2.17)). Соответствующие значениям $\varphi = \varphi_+$, $\psi = \psi_+$ оптимальные структуры армирования определяются в результате решения системы уравнений (2.1). Для значений $\varphi_+ = 1/4$, $\psi_+ = 0$ имеется единственная оптимальная структура армирования, определяемая двумя семействами волокон: первое направлено по образующей и имеет удельное объемное содержание $\omega_1 = \omega/4$, второе направлено по окружности и имеет удельное объемное содержание $\omega_2 = 3\omega/4$.

Область Б. Параметры t, r удовлетворяют соотношению

$$r = O(t^\alpha),\ \alpha > 1$$

(«длинные» оболочки). Для оптимальных величин имеем формулы

$$(2.25) \qquad p_+ = 3\sqrt{12}\,\omega\left(\frac{H}{\sqrt{12}R}\right)^3\mathrm{E},\quad n_+ = 2,\ \varphi_+ = \psi_+ = 0.$$

Значениям $\varphi_+ = 0$, $\psi_+ = 0$ соответствует единственная оптимальная структура армирования, определяемая одним окружным семейством волокон, имеющим удельное объемное содержание $\omega_2 = \omega$.

Точность, с которой вычислены оптимальные величины (2.24), (2.25), указана в формулах (2.22), (2.23) соответственно. Для значений параметра α, близких к единице, формулы (2.24), (2.25) дают погрешность единичного порядка и поэтому непригодны. Выше дана рекомендация по численному решению вспомогательной задачи в этой области значений α. Тот факт, что в областях A, $Б$ значения φ_+, ψ_+ удовлетворяют условию (2.4), позволяет надеяться, что это условие будет выполнено и в области $\alpha \approx 1$, так что решение вспомогательной задачи окажется решением задачи оптимизации. В противном случае задачу оптимизации необходимо решать, исходя из полного выражения (1.6), минимизируя его по m, n, а затем максимизируя по φ, ψ, согласно формуле (2.3).

Все полученные результаты без увеличения погрешности в указанных областях дают решение задачи оптимизации рассматриваемых оболочек и при всестороннем сжатии их равномерным нормальным давлением интенсивности p.

Так как через исследованную величину Q формулируется условие устойчивости (1.5), то в процессе решения поставленной задачи оптимизации попутно исследовано решение и задачи устойчивости шарнирно-опертой ортотропной цилиндрической оболочки при поперечном или всестороннем сжатии ее равномерным нормальным давлением. При этом доказаны следующие утверждения: 1) значение $m = 1$ (m — число продольных волн) является критическим (минимизирующим величину Q), по крайней мере, в области значений коэффициентов ортотропии, ограниченной условием (2.4); 2) для оболочек «средней» длины ($0 \leqslant \alpha < 1$) в области значений коэффициентов ортотропии, образуемой пересечением подобластей (2.12), (2.18), допустимо такое упрощение условия устойчивости, при котором возможна явная минимизация по числу окружных волн n (соответствующая формула для критической величины давления является аналогом известной формулы Папковича для изотропных цилиндрических оболочек); 3) для более «длинных» оболочек в этой области значений коэффициентов ортотропии допустима «полубезмоментная» формулировка условия устойчивости на основе формулы (2.20); 4) «полубезмоментная» формулировка допускает обобщение вида (2.16), которое, не нарушая точности, справедливо для оболочек «средней» и большей длины в более широкой области значений коэффициентов ортотропии, определяемой условиями (2.12), (2.13). Однако, если задача оптимизации по критической величине давления полностью решается на основе упрощенного в смысле (2.16) условия устойчивости (1.5), в самой задаче устойчивости такое упрощение допустимо лишь в определенной (указанной выше) области значений коэффициентов ортотропии.

Поступила 23 XI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. **Немировский Ю. В., Самсонов В. И.** Цилиндрические армированные оболочки, наиболее устойчивые при всестороннем внешнем давлении.— «Механика полимеров», 1974, № 1.
2. **Немировский Ю. В.** Об условии пластичности (прочности) для армированного слоя.— ПМТФ, 1969, № 5.
3. **Шкутин Л. И.** Введение двух разрешающих функций в уравнения непологих оболочек.— «Докл. АН СССР», 1972, т. 204, № 4.