

УДК 539.217 2:66.084

ИЗВЛЕЧЕНИЕ ВЕЩЕСТВА ИЗ ПОРИСТОГО ТЕЛА В ДВИЖУЩУЮСЯ ЖИДКОСТЬ

А. И. Мошинский

Санкт-Петербургский химико-фармацевтический университет,
197376 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: alex-moshinskij@yandex.ru

Исследуется нестационарный процесс извлечения вещества из пористого тела, моделируемого системой полубесконечных капилляров, в движущуюся жидкость, когда скорость переноса вещества в потоке представляет собой линейную функцию поперечной потоку координаты. Рассматривается случай, когда скорость жидкости на границе среды становится равной нулю. При этом полагается, что процесс диффузии в потоке является квазистационарным. Найдены аналитические зависимости на границе пористого материала и области течения для представляющих практический интерес характеристик массообмена (концентрации, диффузионного потока, суммарного диффузионного потока и полного выхода целевого компонента через сечение пористого тела).

Ключевые слова: пористое тело, массообмен, поток массы, двухкомпонентность, извлечение.

DOI: 10.15372/PMTF20190411

Введение. Для описания процесса извлечения целевого компонента (ЦК) из пористой среды часто используется диффузионная модель [1]. При описании ряда природных и технологических процессов учитывается конвективный перенос вещества, сопровождающийся диффузионным и другими обменными процессами в пористой среде [1]. При этом сплошная среда полагается однородной и перенос ЦК в ней описывается обычным уравнением диффузии. Таким образом, внутренняя структура пористого материала практически игнорируется. Иногда она учитывается косвенным образом путем введения некоторого эффективного коэффициента диффузии, отличающегося от молекулярного. Основным уравнением, описывающим процесс, является обычное уравнение диффузии, а особенности конкретного процесса извлечения ЦК учитываются с помощью граничных и начальных условий. Решение ряда задач экстрагирования с использованием указанной модели изложено, например, в работах [2, 3], однако и в этих работах использовались двухфазные (двухкомпонентные) модели процессов извлечения.

Исследования показывают, что результаты моделирования пористой среды с помощью однородного континуума (описания с помощью простого уравнения диффузии) часто не согласуются с экспериментальными данными. Для описания процесса предлагаются различные варианты двухфазных моделей, более точно учитывающие структуру пористой среды, т. е. двухфазное строение пористого тела предполагает, что в данной точке пространства присутствуют одновременно два континуума, в каждом из которых проис-

ходит массоперенос ЦК по особому закону. Кроме того, ЦК может переходить из одной фазы в другую и обратно по определенному закону.

При выводе уравнений переноса в двух взаимопроникающих континуумах используется процедура осреднения уравнений переноса в фазах [4–6]. Более простым подходом является построение модели пористой среды как элемента осредненной структуры и вывод уравнения процесса с помощью традиционных методов. Опыт моделирования процессов в пористой среде показывает, что результирующие уравнения часто имеют одинаковый вид. В настоящей работе используется второй подход.

На процесс извлечения вещества из порового пространства в жидкость нередко оказывает влияние внешний поток, параллельный границе раздела сред. Известно, что при обтекании твердой поверхности в пристенном слое скорость потока является линейной функцией поперечной потоку координаты, обращающейся в нуль на поверхности [7]. Для пористых систем на граничной поверхности твердая и жидкая фазы чередуются, на твердой части поверхности скорость жидкости равна нулю, на жидкой части не равна нулю. Поскольку массообмен происходит в зоне контакта жидких сред, представляет интерес случай, когда скорость переноса на границе раздела сред (для определенности рассматривается плоская граница $X = 0$) является постоянной (осредненной). Однако на процесс также может оказывать влияние градиент скорости вблизи поверхности, поэтому актуальным является исследование массообмена между средами при следующем (локальном вблизи поверхности раздела сред) профиле скорости: $U = u + \lambda X$ ($u \geq 0$, $\lambda \geq 0$). Ограничимся случаем $u = 0$, так как случай $u = \text{const} > 0$, $\lambda = 0$ изучен в большей степени (см., например, [8, 9]).

Многочисленные экспериментальные проверки (в частности, в работе [8]) показывают, что бидисперсная модель переноса ЦК в пористом теле позволяет получить адекватное описание процессов конвективного теплопереноса в пористых системах.

Квазистационарная массоотдача от твердой поверхности в движущуюся жидкость. Для упрощения задачи используем предположение о квазистационарности массопереноса в жидкой фазе, что является оправданным, так как в реальных условиях характерное время нахождения экстрагента в жидкости составляет секунды, тогда как процесс диффузии в капилляре — часы [8, 10]. Таким образом, в настоящей работе не рассматривается начальная стадия массообмена, когда уравнение массопереноса для внешней по отношению к пористому телу среды в общем случае нельзя считать стационарным.

Математическая модель процесса массопереноса с поверхности $X = 0$ в поток жидкости со скоростью, линейно зависящей от поперечной потоку координаты (рис. 1), формулируется следующим образом [8, 10]:

$$\lambda X \frac{\partial C_1}{\partial Y} = K_f \frac{\partial^2 C_1}{\partial X^2}, \quad C_1 = C_1(X, Y), \quad X \in (0, \infty), \quad Y \in (0, \infty); \quad (1)$$

$$C_1(0, Y) = C_s(Y, t), \quad C_1(X, Y)|_{X \rightarrow \infty} < \infty, \quad C_1(X, 0) = 0. \quad (2)$$

Здесь C_1 — концентрация вещества в потоке; $C_s(Y, t)$ — концентрация на границе раздела фаз; K_f — эффективный коэффициент диффузии в направлении, перпендикулярном потоку жидкости; λ — множитель, пропорциональный градиенту скорости потока (скорость сдвига). Как правило, диффузионный перенос в направлении потока в пристенных областях значительно менее интенсивный по сравнению с диффузионным переносом в направлении потока, поэтому им пренебрегается. В силу квазистационарности процесса массообмена зависимость концентрации ЦК от времени t является параметрической, что учитывается только для граничной функции $C_s(Y, t)$.

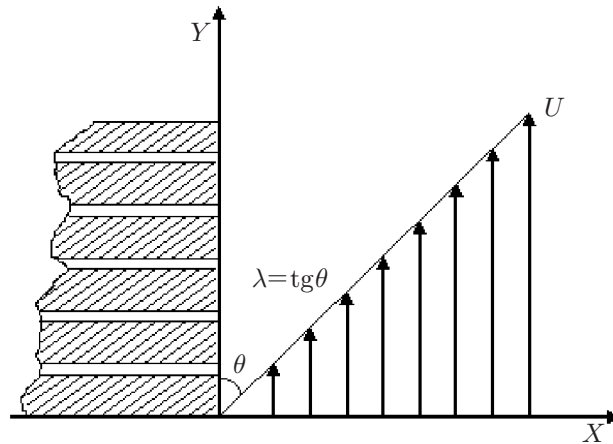


Рис. 1. Профиль скорости в жидкости вблизи поверхности пористой системы

Сначала рассмотрим задачу, полагая, что функция $C_s(Y, t)$ известна на начальном этапе исследования. При рассмотрении сопряженной задачи для двух областей $X > 0$ и $X < 0$ эта функция будет искомой (см. рис. 1).

В настоящей работе исследуется только начальная стадия процесса, когда влияние конечности длины застойных капилляров невелико и данным фактором можно пренебречь.

Требуется по заданной величине $C_s(Y, t)$ найти диффузионный поток $q_s(Y)$ через границу, равный $q_s = K_f \partial C_1 / \partial X |_{X=0}$, и другие характеристики процесса извлечения ЦК.

Введем безразмерные координаты

$$G(x, y) = \frac{C_1}{C_0}, \quad x = \frac{X\sqrt{\lambda}}{\sqrt{K_f}}, \quad y = \frac{Y\sqrt{\lambda}}{\sqrt{K_f}}.$$

В этих координатах уравнение (1) и дополнительные условия (2) принимают вид

$$\begin{aligned} x \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}, \quad G(0, y) = G_s(y, t) = \frac{C_s}{C_0}, \quad x \in (0, \infty), \quad y \in (0, \infty), \\ G(x, 0) = 0, \quad G(x, y)|_{x \rightarrow \infty} < \infty. \end{aligned} \quad (3)$$

Получим соотношение между безразмерным потоком ЦК $\partial G / \partial x |_{x=0}$ и граничной функцией $G_s(y, t)$. Для этого применим преобразование Лапласа

$$f^*(s) = \int_0^{\infty} f(y) e^{-sy} dy$$

по переменной y к уравнению (3). С учетом соответствующего условия (3) получаем

$$sxG^* = \frac{d^2 G^*}{dx^2}, \quad G^*(0, s) = G_s^*(s, t), \quad G(x, s)|_{x \rightarrow \infty} < \infty. \quad (4)$$

Решение задачи (4) выражается через функцию Эйри $\text{Ai}(z)$ [11] и имеет вид

$$G^* = G_s^*(s, t) \text{Ai}(x \sqrt[3]{s}) / \text{Ai}(0). \quad (5)$$

Из соотношения (5) находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial G^*}{\partial x} \Big|_{x=0} &= G_s^*(s, t) \sqrt[3]{s} \frac{\text{Ai}'(0)}{\text{Ai}(0)} \Leftrightarrow \mu \frac{\partial^{1/3} G_s(y, t)}{\partial y^{1/3}}, \\ \mu &= \frac{\text{Ai}'(0)}{\text{Ai}(0)} = \frac{3^{1/3} \Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)} = 0,7290 \end{aligned} \quad (6)$$

(“ \Leftrightarrow ” — знак соответствия оригинала и изображения по Лапласу). Также использовано определение дробной производной функции $f(t)$ порядка ν [12, 13]:

$$\frac{d^\nu f(t)}{dt^\nu} = D_t^\nu f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{-\nu} f(\tau) d\tau, \quad \nu < 1 \quad (7)$$

($\Gamma(z)$ — гамма-функция). Соотношение (6) получено в работе [10].

Уравнение для концентрации на границе раздела фаз. Для потока ЦК в пористом теле имеем соотношение [8, 13]

$$-\sqrt{K_p} \frac{\partial C_2}{\partial X} \Big|_{X=0} = \frac{\partial^{1/2}}{\partial t^{1/2}} [C_0 - C_s(Y, t)], \quad (8)$$

где K_p — коэффициент диффузии в поре, $\text{м}^2/\text{с}$. Приравнивая выражения для потока ЦК (6) и (8) и переходя к безразмерному времени $\tau = t\lambda\mu^2 K_f / (\varepsilon^2 K_p)$, получаем уравнение для определения функции $G_s(y, \tau)$

$$\frac{\partial^{1/3}}{\partial y^{1/3}} G_s(y, \tau) = \frac{\partial^{1/2}}{\partial \tau^{1/2}} [1 - G_s(y, \tau)] \quad (9)$$

(ε — площадь поверхности раздела фаз, занятая отверстиями пор). В размерном виде данное уравнение предложено в работах [8, 10].

Очевидно, что в окрестности стыка каналов диффузионные уравнения нельзя считать одномерными в пористой системе. Принятие одномерности — постулируемое упрощение постановки задачи. Заметим также, что данное уравнение можно использовать для описания процесса в некотором промежутке времени $t_1 < t < t_2$, где t_2 определяется возможностью использования аппроксимации (8), а t_1 — временем выхода на квазистационарный режим. В случае $t_1 > t_2$ уравнение (9) необходимо корректировать.

ЗАМЕЧАНИЕ. При выводе уравнения (9) использовалась задача массообмена в областях $X > 0$ и $X < 0$, поэтому преобразование Лапласа левой части (9) в соответствии с (6) должно быть равно $s^{1/3} G_s^*(s, \tau)$. Ядром дифференциального оператора $\partial^{1/3} / \partial y^{1/3}$ является не ограниченная в нуле, но интегрируемая в его окрестности функция $f = A/y^{2/3}$ ($A = \text{const}(y)$), т. е. преобразование Лапласа этой функции существует в классическом смысле. Для функции $A/y^{2/3}$ вместо нуля при использовании $s^{1/3} f^*(s)$ получаем $A\Gamma(1/3)$. Нетрудно показать, что если к любому решению (9) добавить функцию $B/(y^{2/3}\tau^{1/2})$ ($B = \text{const}$), то новая функция также будет удовлетворять уравнению (9), поскольку функция $B/\tau^{1/2}$ является ядром дифференциального оператора $\partial^{1/2} / \partial \tau^{1/2}$. Поэтому в соответствии с первоначальной постановкой задачи будем рассматривать имеющие физический смысл ограниченные решения уравнения (9).

Теория уравнений типа уравнений (9) и решение соответствующих задач рассмотрены в работах [14–16]. В настоящей работе рассматривается частная задача, которая решается непосредственно, без использования приведенных в [14–16] результатов. К тому

же ограниченное решение уравнения (9) является автомодельным. Нетрудно показать, что задача (9) инвариантна относительно однопараметрической группы преобразований

$$G_s(y, \tau) = G_s(\alpha^3 y, \alpha^2 \tau), \quad \alpha > 0. \quad (10)$$

Поскольку в соотношении (10) в качестве параметра α можно выбирать любое положительное число, возьмем $\alpha = y^{-1/3}$. Тогда $G_s(y, \tau)$ является функцией только одной независимой переменной $\tau/y^{2/3}$, или (для удобства записи) $\xi = \tau^{1/2}/y^{1/3}$. Итак, имеем $G_s(y, \tau) = G_s(\xi)$. Уравнение (9) можно привести к виду, содержащему только автомодельную переменную ξ :

$$\frac{d}{d\xi} \int_0^\xi \frac{z G_s(z)}{(\xi^2 - z^2)^{1/2}} dz - \sigma \xi^4 \frac{d}{d\xi} \left[\frac{1}{\xi} \int_\xi^\infty \frac{G_s(z)}{z^3 (z^3 - \xi^3)^{1/3}} dz \right] = 1,$$

где $\sigma = \Gamma(1/2)/\Gamma(2/3) = 1,3089$.

Для решения уравнения (9) выполним преобразование Лапласа по переменным y и τ с параметрами s и p соответственно. В результате получаем следующее выражение для дважды преобразованной функции $G_s(y, \tau)$:

$$G_s^{**}(s, p) = \frac{1}{s(p + s^{1/3} p^{1/2})}. \quad (11)$$

Разложим функцию G_s^{**} в ряд сначала по степеням $s^{1/3}/p^{1/2}$, затем по степеням $p^{1/2}/s^{1/3}$ и выполним обращение преобразования Лапласа, используя соотношение $s^{-\nu} \Leftrightarrow y^{\nu-1}/\Gamma(\nu)$. Получаем два разложения

$$G_s(\xi) = 1 + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\xi)^n \Gamma(n/3)}{\Gamma(1 + n/2)} \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) \simeq \frac{1}{\pi \xi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\xi^{2n}} \frac{\Gamma(n + 1/2)}{\Gamma(2(2 + n)/3)}, \quad (12)$$

первое из которых представляет собой всюду сходящийся ряд, второе — асимптотический ряд, который можно использовать для расчетов при больших значениях переменной ξ . В процессе вывода использовалось известное [11, 17] выражение $\Gamma(1 - z)\Gamma(z) = \pi/\sin(\pi z)$ теории гамма-функции.

Основные характеристики процесса извлечения ЦК. Из соотношения (9) можно получить уравнение для безразмерного потока ЦК $Q_s(y, t) = D_y^{1/3} G_s(y, t)$:

$$\left(\frac{\partial^{-1/3}}{\partial y^{-1/3}} + \frac{\partial^{-1/2}}{\partial \tau^{-1/2}} \right) Q_s(y, \tau) = 1, \quad (13)$$

используя известные свойства дробного дифференцирования [13, 18]

$$D_t^\nu D_t^\varkappa f(t) = D_t^{\nu+\varkappa} f(t), \quad \nu + \varkappa \leq 1.$$

Решения в виде рядов получаем, как и в (12), с помощью преобразования Лапласа и соответствующих разложений в пространстве изображений по степеням $s^{1/3}/p^{1/2}$ и $p^{1/2}/s^{1/3}$. Данное решение также является автомодельным и имеет вид $Q_s(y, t) = q_s(\xi)y^{-1/3}$. В результате для функции $q_s(\xi)$ получаем разложения

$$q_s(\xi) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\xi)^n \Gamma[(n + 1)/3]}{\Gamma(1 + n/2)} \sin\left(\frac{\pi(n + 1)}{3}\right) \simeq \frac{1}{\pi \xi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\xi^{2n}} \frac{\Gamma(n + 1/2)}{\Gamma(1 + 2n/3)} \quad (14)$$

(всюду сходящийся ряд и асимптотический ряд).

Заметим, что сходящийся ряд для функции $q_s(\xi)$ (14) можно получить из формулы в работе [16. С. 52] при использованных в настоящей работе значениях параметров в соотношении (13). При этом в [15, 16] рассмотрено уравнение типа (13) с положительными не превышающими единицу порядками дробного дифференцирования, произведение которых строго меньше единицы. Асимптотическое разложение, обобщающее вторую формулу (14), приведено в работе [19].

Зависящее от комбинации переменных τ и y решение в виде $\xi = \tau^{1/2}/y^{1/3}$ оказывает существенное влияние на запись асимптотических разложений при малых и больших значениях времени. В работах [8, 10] это не отмечено, однако получены несколько первых слагаемых соответствующих разложений, в частности для функции q_s типа (14). Следует отметить, что в этих работах не исследована роль второй переменной η (аналог y). Вообще говоря, ряд разложений в [8, 10] неравномерен по этой переменной и в некоторых областях изменения η не может быть использован для практических расчетов. Кроме того, в [8, 10] получено только конечное (небольшое) число слагаемых рассматриваемых разложений и не определены границы области применимости найденных зависимостей.

Следующей характеристикой процесса экстрагирования, представляющей практический интерес, является плотность выхода (на единицу площади) количества ЦК за время t . Соответствующая безразмерная величина определяется формулой

$$R_s(y, \tau) = \int_0^\tau Q_s(y, \eta) d\eta = y^{-1/3} \int_0^\tau q_s\left(\frac{\sqrt{\eta}}{\sqrt[3]{y}}\right) d\eta = \frac{2\sqrt{\tau}}{\xi} \int_0^\xi xq_s(x) dx = r_s(\xi)\sqrt{\tau}, \quad (15)$$

где $r_s(\xi) = 2\xi^{-1} \int_0^\xi xq_s(x) dx$. Для функции $r_s(\xi)$ с помощью описанного выше метода получаем выражения

$$\begin{aligned} r_s(\xi) &= \frac{\xi}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\xi)^n \Gamma[(n+1)/3]}{\Gamma(2+n/2)} \sin\left(\frac{\pi(n+1)}{3}\right) \simeq \\ &\simeq \frac{1}{\Gamma(3/2)} - \frac{1}{\xi\Gamma(4/3)} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\xi^{2n}} \frac{\Gamma(n-1/2)}{\Gamma(1+2n/3)}, \end{aligned} \quad (16)$$

также представляющие собой всюду сходящийся и асимптотический ряды соответственно.

Для поверхности тела, контактирующей с потоком на отрезке длиной y (безразмерной), целесообразно определить полный выход ЦК (на единицу длины, поскольку рассматривается “плоская” задача). Для этой величины аналогичным образом получаем

$$M_s(y, \tau) = \int_0^y R_s(\eta, \tau) d\eta = y^{4/3} m_s(\xi). \quad (17)$$

Для функции $m_s(\xi)$ имеем разложения

$$\begin{aligned} m_s(\xi) &= \frac{\xi^2}{\Gamma(5/3)} - \frac{\xi^3}{\Gamma(5/2)\Gamma(4/3)} + \frac{\xi^4}{2} + \frac{\xi^2}{\pi} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-\xi)^n \Gamma[(n-2)/3]}{\Gamma(2+n/2)} \sin\left(\frac{\pi(n-2)}{3}\right) \simeq \\ &\simeq \frac{\xi}{\Gamma(3/2)} + \frac{\xi^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\xi^{2n}} \frac{\Gamma(n-1/2)}{\Gamma(2+2n/3)}, \end{aligned} \quad (18)$$

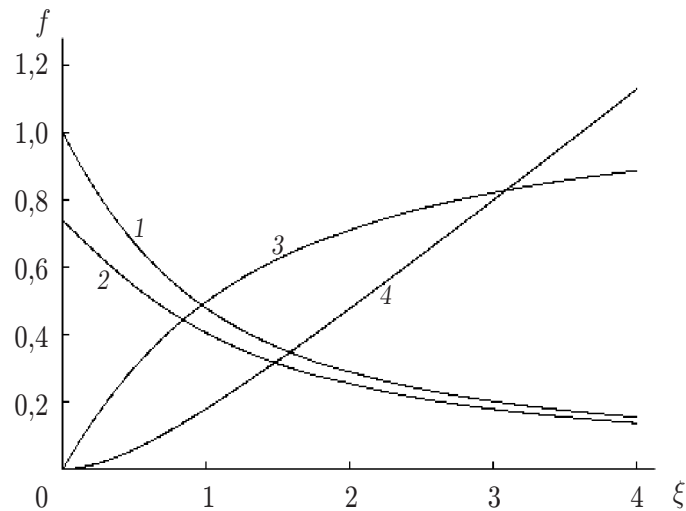


Рис. 2. Кинетические кривые:

$$1 - f = G_s, 2 - f = q_s, 3 - f = r_s, 4 - f = 0,3m_s$$

первое из которых представляет собой всюду сходящийся ряд, удобный для расчетов при малых значениях ξ , второе — асимптотический ряд, удобный для расчетов при больших значениях ξ .

На рис. 2 представлены зависимости G_s , q_s , r_s , $0,3m_s$ от параметра ξ , определенные соответственно соотношениями (12), (14), (15), (17). Заметим, что для всех перечисленных функций асимптотические формулы, включающие два-три слагаемых, достаточно точно описывают соответствующую зависимость при $\xi \geq 1,9$. Заметим также, что функции $G_s(\xi)$, $q_s(\xi)$, $r_s(\xi)$, $m_s(\xi)$ можно выразить через обобщенные гипергеометрические функции [11].

Наличие необходимых разложений в ряды, пригодных для расчетов при малых и больших значениях независимой переменной ξ , позволяет аппроксимировать соотношения (12), (14), (16), (18) зависимостями с простой структурой типа аппроксимации Паде [20]. Например, для функции $G_s(\xi)$ (12), используя два слагаемых первого разложения и одно слагаемое второго разложения, целесообразно найти приближенную формулу в виде отношения полиномов по ξ первого и второго порядка. Указанная зависимость содержит один свободный параметр, путем подбора которого можно добиться приемлемого совпадения с точной формулой. Аппроксимационную формулу для $G_a(\xi)$ запишем в окончательном виде

$$G_a(\xi) = \frac{1 + 0,6\xi}{1 + 1,433\xi + 0,95\xi^2}.$$

Эта формула описывает асимптотику $G_s(\xi)$ при $\xi \rightarrow \infty$ и первые два слагаемых разложения (12) при малых значениях ξ . Данная зависимость достаточно близка к зависимости, которой соответствует кривая 1 на рис. 2.

Поскольку в работах [8, 10] получены только первые слагаемые разложений для некоторых характеристик процесса, это не позволяет построить соответствующие кинетические кривые. Кроме того, в [8, 10] не выявлено автомодельного характера решения задачи экстрагирования.

Обоснование найденных соотношений. В процессе вывода зависимостей (12), (14), (16), (18) использовалось соответствие $s^{-\nu} \Leftrightarrow y^{\nu-1}/\Gamma(\nu)$ между оригиналом и изображением по Лапласу за рамками классического анализа $\text{Re } \nu > 0$. Кроме того, исполь-

зовались двукратно преобразованные по Лапласу функции (см. (11)). Поскольку решение получено с использованием математически не обоснованных операций, можно проверить, удовлетворяет ли оно исходному уравнению. В случае если удовлетворяет, и при установленной единственности решения задачу следует считать решенной.

Поскольку в ряде задач экстрагирования (а также при описании других процессов) [8, 10] целесообразно обращение преобразования Лапласа для функций, изображения которых не существуют в классическом смысле (и соответствующих аналогов при использовании разложений по дробным производным определенных функций), дадим математическое обоснование найденных разложений. Заметим, что при обращении функции, однократно преобразованной по Лапласу, в ряде случаев для получения степенных разложений можно использовать соответствующую теорему [17. С. 526; 21. С. 191]. Данная теорема [21] предполагает наличие единственной особой точки s_0 с наибольшим действительным значением для изображения и возможность представить путь интегрирования в виде двух лучей ($s_{\pm} = |s - s_0| e^{\pm i\varphi}$, $\pi/2 < \varphi \leq \pi$), связанных дугой окружности бесконечно малого радиуса и уходящих в бесконечно удаленную точку в левой полуплоскости комплексной плоскости s . Тогда, если изображение допускает разложение в абсолютно сходящийся степенной ряд (не обязательно с целочисленными показателями степени), при $t \rightarrow \infty$ оригинал можно представить в виде асимптотического ряда. При этом в n -м слагаемом величина $(s - s_0)^{\lambda_n}$ заменяется выражением $e^{ts_0} t^{-\lambda_n - 1} / \Gamma(-\lambda_n)$. При натуральных значениях n соответствующее слагаемое не вносит вклад в асимптотику, поскольку $1/\Gamma(-n) = 0$.

Математическое обоснование проведем только для функции $G_s(\xi)$ (для других функций $q_s(\xi)$, $r_s(\xi)$, $m_s(\xi)$ оно аналогично). Подставляя всюду сходящийся ряд (12) в правую часть уравнения (9) и выполняя операцию дифференцирования $\partial^{1/2}/\partial\tau^{1/2}$, вновь получаем всюду сходящийся ряд, что математически оправданно. Однако в левой части (9) при классическом рассмотрении проблемы (без введения обобщенных функций [18]) члены данного ряда начиная с некоторого номера, сводятся к расходящимся интегралам (7). В таком случае целесообразно провести регуляризацию расходящихся интегралов. Это можно сделать двумя способами: либо с использованием методов теории обобщенных функций [18], либо с использованием методов теории функций комплексной переменной, связанных с аналитическим продолжением функций, заданных интегралами, как в теории гамма-функции [17, 22]. В настоящей работе используется второй способ, аналогичный применявшемуся в работе [22] для аналитического продолжения бета-функции.

Заметим, что функцию $G_s(\xi)$ (12), рассматриваемую в качестве функции комплексного аргумента y , можно представить в виде

$$G_s(\xi) = G_s\left(\frac{\tau^{1/2}}{y^{1/3}}\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{y}} G_s^1\left(\tau, \frac{1}{y}\right) + \frac{1}{\sqrt[3]{y^2}} G_s^2\left(\tau, \frac{1}{y}\right), \tag{19}$$

где G_s^1 , G_s^2 — целые функции аргумента $1/y$. Далее параметр τ (первый аргумент) в этих функциях для краткости опускается. Таким образом, с учетом (19) левая часть уравнения (9) принимает вид

$$\frac{1}{\Gamma(2/3)} \frac{\partial^{1/3}}{\partial y^{1/3}} \left(\int_0^y \frac{G_s^1(1/z)}{[(y-z)z]^{1/3}} dz + \int_0^y \frac{G_s^2(1/z)}{(y-z)^{1/3} z^{2/3}} dz \right). \tag{20}$$

В соответствии с асимптотической формулой (12) интегралы в (20) сходятся. Учитывая, что G_s^1 , G_s^2 являются однозначными целыми функциями $1/z$, по аналогии с преобразова-

нием бета-функции [22. С. 45], определенной при $\operatorname{Re} \alpha > 0$ и $\operatorname{Re} \beta > 0$ формулой

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 z^{\alpha-1} (1-z)^{\beta-1} dz,$$

можно получить следующие выражения, сходящиеся при любых α и β :

$$\begin{aligned} \varepsilon(\alpha, \beta, y) &= e^{-\pi i(\alpha+\beta)} \int_{\gamma} z^{\alpha-1} (y-z)^{\beta-1} f(1/z) dz = \\ &= -4 \sin(\pi\alpha) \sin(\pi\beta) \int_0^y z^{\alpha-1} (y-z)^{\beta-1} f(1/z) dz \quad (21) \end{aligned}$$

(γ — контур интегрирования, показанный на рис. 3; $f(1/z)$ — произвольная целая функция аргумента $1/z$). При выводе соотношения (21) полагается, что горизонтальные линии интегрирования предельно сближаются с вещественной осью комплексной плоскости z , а радиусы дуг окружностей (при $\operatorname{Re} \alpha > 0$ и $\operatorname{Re} \beta > 0$) стремятся к нулю (см. рис. 3). По аналогии с [22] аргументы функций z и $y-z$ (при вещественном y) под знаком контурного интеграла принимаем равными нулю на линии 1 (см. рис. 3). При обходе точки y аргументы становятся равными соответственно $0, 2\pi$. Далее, после обхода точки 0 в положительном направлении получаем аргументы 2π и 2π , после обхода точки y в отрицательном направлении аргументы функций z и $y-z$ становятся равными 2π и 0 и после второго обхода точки 0 принимают начальные значения $0, 0$. Это следует учитывать при вычислении аргументов многозначных функций $z^{\alpha-1}$ и $(y-z)^{\beta-1}$, что приводит к зависимости (21) при условии сходимости в ней последнего интеграла.

Функция ε является целой функцией переменных α и β , поэтому аналитическое продолжение интеграла (при произвольной целой функции $f(1/z)$)

$$\int_0^y z^{\alpha-1} (y-z)^{\beta-1} f(1/z) dz = -\frac{\varepsilon(\alpha, \beta, y)}{4 \sin(\pi\alpha) \sin(\pi\beta)} \quad (22)$$

в общем случае представляет собой мероморфную функцию α и β с простыми полюсами $\alpha = -\pi k$ и $\beta = -\pi k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). Заметим, что точки $\alpha = \pi k$ и $\beta = \pi k$ при натуральных k не являются особыми, поскольку при таких значениях α и β функция ε обращается в нуль.

Полагая $y = 1, f = 1$ в соотношениях (21) (или (22)), получаем формулу Похгаммера

$$B(\alpha, \beta) = -\frac{\varepsilon(\alpha, \beta, 1)}{4 \sin(\pi\alpha) \sin(\pi\beta)} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \quad (23)$$

являющуюся аналитическим продолжением бета-функции в область комплексных значений α и β . Если при разложении в ряд по степеням $1/z$ функций $G_s^{1,2}$ в выражении (20) получаем расходящиеся интегралы типа бета-функции, то при использовании формулы (21)

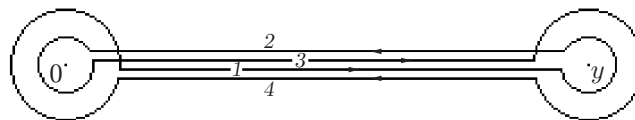


Рис. 3. Контур интегрирования по двойной петле γ :
1–4 — пути интегрирования

(разложении под знаком контурного интеграла при $f = G_s^{1,2}$) такой проблемы не возникает. При этом дальнейшее использование зависимостей (21), (23) приводит к тому, что представление интегралов через бета-функции и затем через гамма-функции получается таким же, как для сходящихся интегралов. Заметим, что в разложениях, полученных в настоящей работе, используются дробные значения α и β .

Далее проверка решения (12) сводится к подстановке сходящегося ряда в обе части уравнения (9) с учетом (20), использованию известных формул теории гамма-функции [11, 17, 21] для согласования коэффициентов при одинаковых степенях ξ и констатации факта удовлетворения уравнения (9). Эта проверка опускается.

Заключение. Предложенные зависимости для определения полного выхода целевого компонента из пористого тела, диффузионного потока и некоторых других характеристик процесса можно использовать для описания начальной стадии извлечения целевого компонента при наличии внешнего потока жидкости.

Физическая постановка задачи отражена включением параметра λ в безразмерные независимые переменные τ , x , y . Также этот параметр входит в автомодельную переменную $\xi = \tau^{1/2}/y^{1/3}$, от которой существенно зависят характеристики массопереноса.

Показано, что в случае обращения в нуль значения скорости на границе сред решение задачи имеет автомодельный характер, поэтому на рис. 2 каждая характеристика процесса представлена одной кривой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917–1967) / Под ред. П. Я. Полубариновой-Кочиной и др. М.: Наука, 1969.
2. Аксельруд Г. А. Экстрагирование (система твердое тело — жидкость) / Г. А. Аксельруд, В. М. Лысянский. М.: Химия, 1974.
3. Аксельруд Г. А. Введение в капиллярно-пористую технологию / Г. А. Аксельруд, М. А. Альтшуллер. М.: Химия, 1983.
4. Буевич Ю. А., Корнеев Ю. А. О переносе тепла и массы в дисперсной среде // ПМТФ. 1974. № 4. С. 79–87.
5. Буевич Ю. А., Корнеев Ю. А., Щелчкова И. Н. О переносе тепла и массы в дисперсном потоке // Инж.-физ. журн. 1976. Т. 30, № 6. С. 979–985.
6. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978.
7. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973.
8. Бабенко Ю. И. Экстрагирование. Теория и практические приложения / Ю. И. Бабенко, Е. В. Иванов. СПб.: Профессинал, 2009.
9. Мошинский А. И. Влияние пульсационного движения жидкости в бидисперсной пористой среде на распространение в ней вещества // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2010. № 6. С. 109–121.
10. Бабенко Ю. И., Иванов Е. В. Экстрагирование в движущуюся жидкость с градиентом скорости // Теорет. основы хим. технологии. 2008. Т. 42, № 5. С. 504–508.
11. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М.: Физматгиз, 1963.
12. Самко С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. Минск: Наука и техника, 1987.
13. Бабенко Ю. И. Тепломассообмен. Метод расчета тепловых и диффузионных потоков. Л.: Химия. Ленингр. отд-ние, 1986.
14. Clement Ph., Gripenberg G., Londen S. O. Schauder estimates for equation with fractional derivatives // Trans. Amer. Math. Soc. 2000. V. 352, N 5. P. 2239–2260.

15. **Псху А. В.** Решение краевой задачи для дифференциального уравнения с частными производными дробного порядка // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 8. С. 1092–1099.
16. **Псху А. В.** Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005.
17. **Лаврентьев М. А.** Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. М.: Наука, 1973.
18. **Гельфанд И. М.** Обобщенные функции и действия над ними / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шиллов. М.: Физматгиз, 1959. (Обобщенные функции; Вып. 1).
19. **Luchko Yu., Gorenflo R.** Scale-invariant solution of a partial differential equation of fractional order // Fract. Calculus Appl. Anal. 1998. V. 1, N 1. P. 63–78.
20. **Андрианов И. В.** Асимптотическая математика и синергетика: путь к целостной простоте / И. В. Андрианов, Р. Г. Баранцев, Л. И. Маневич. М.: Едиториал УРСС, 2004.
21. **Деч Г.** Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М.: Наука, 1971.
22. **Уиттекер Э. Т.** Курс современного анализа. Ч. 2. Трансцендентные функции / Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон. М.: Физматгиз, 1963.

*Поступила в редакцию 14/VI 2018 г.,
после доработки — 21/XII 2018 г.
Принята к публикации 28/I 2019 г.*
