

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ЗАДАЧИ МАКРОДИСПЕРСИИ В СЛОИСТЫХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

А. А. Рошаль

(Москва)

Массоперенос примесей в слоистых пористых средах может быть описан уравнением диффузии с конвективным членом.

Коэффициент дисперсии при этом пропорционален квадрату скорости фильтрации. В работе рассматриваются задачи налива раствора в пласт через скважину и последующая откачка его из той же скважины, приводятся решения задачи для различных граничных условий и их асимптотические представления. Результаты работы позволяют построить методику опробования с помощью односкважного метода с целью определения параметров переноса.

Массоперенос динамически нейтральных примесей в слоистых пористых средах при движении растворов параллельно слоистости характеризуется явлением продольной макродисперсии [1-3]. В своем асимптотическом выражении процесс описывается диффузионным уравнением с конвективным членом. Суммарный коэффициент дисперсии D^* , учитывающий явления молекулярной диффузии, конвективной диффузии и макродисперсии, при этом имеет вид [1-3]

$$D^* = D + \lambda v + \delta v^2 \quad (0.1)$$

Здесь D — коэффициент молекулярной диффузии в свободном поровом пространстве, λ — параметр конвективной диффузии, δ — параметр макродисперсии, v — скорость фильтрации, характеризующаяся как средневзвешенное значение скоростей фильтрации по каждому слою, или суммарный фильтрационный расход, отнесенный ко всей мощности рассматриваемой среды.

В существенно неоднородных средах при значительных скоростях фильтрации первые два члена в формуле (0.1) оказываются малыми по сравнению с третьим членом, т. е. суммарный коэффициент дисперсии в этом случае равен [2, 3]

$$D^* \approx \delta v^2 \quad (0.2)$$

1. Постановка задачи. Будем рассматривать движение раствора относительно избыточной концентрации C в закрытой многослойной изотропной пористой среде при наливе или откачке его из скважины радиусом r_0 , полагая, что фильтрационный поток является стационарным стабилизированным, подчиняющимся линейному закону Дарси. В этом случае осесимметричное уравнение массопереноса имеет вид

$$n \frac{\partial C}{\partial t_{\pm}} + \frac{Q_{\pm}}{2\pi m r} \frac{\partial C}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(D_{\pm}^* r \frac{\partial C}{\partial r} \right), \quad D_{\pm}^* = \delta \left(\frac{Q_{\pm}}{2\pi m r} \right)^2 \quad (1.1)$$

Здесь n , m — средневзвешенное значение активной пористости и мощность многослойной среды; Q — расход раствора поступающего или откачиваемого из скважины; r — расстояние от оси скважины; t — текущее время. Индекс плюс относится к величинам при наливе раствора, индекс минус — при откачке. В уравнении (1.1) величина расхода раствора при наливе имеет положительное значение, а при откачке отрицательное.

Введем обобщенные независимые переменные

$$x = \pm \frac{r^2 - r_0^2}{m^2}, \quad \tau_{\pm} = \frac{t_{\pm}}{\delta n} \quad (1.2)$$

Тогда уравнение (1.1) можно привести к виду

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - a_{\pm} \frac{\partial C}{\partial x} - a_{\pm}^2 \frac{\partial C}{\partial \tau_{\pm}} = 0, \quad a_{\pm} = \frac{m^3}{\delta Q_{\pm}} \quad (1.3)$$

Выражение (1.3) является одномерным диффузионным уравнением с конвективным членом в области переменной x , определяемой преобразованием (1.2). Следовательно, в рамках рассматриваемых предпосылок осесимметричные задачи макродисперсии сводятся к одномерным задачам.

Рассмотрим задачу макродисперсии при откачке из скважины с расходом Q_- после предварительного налива раствора в течении времени t_+ в ту же скважину с расходом Q_+ .

Краевые условия в этом случае будут иметь вид

$$C(x, 0; \tau_+) = \Phi(a_+x, \tau_+), \quad C(\infty, \tau_-; \tau_+) = 0, \quad \left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (1.4)$$

Начальное условие (первое краевое условие (1.4)) определяется распределением концентраций раствора на конец налива его в скважину. Это распределение может быть определено из следующих соображений.

Если налив проводился при постоянной концентрации в скважине (граничное условие первого рода), т. е. при условиях

$$C(0, \tau_+) = 1, \quad C(x, 0) = 0, \quad C(\infty, \tau_+) = 0 \quad (1.5)$$

то начальное условие будет иметь вид [4]

$$\begin{aligned} & C(x, 0; \tau_+) = \\ & = \Phi_1(a_+x, \tau_+) = 0.5 \left\{ \operatorname{erfc} \left(\frac{a_+x - \tau_+}{2\sqrt{\tau_+}} \right) + \exp(a_+x) \operatorname{erfc} \left(\frac{a_+x + \tau_+}{2\sqrt{\tau_+}} \right) \right\} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Однако, как показано в работах [5-7], более правильным граничным условием на скважине при наливе будет граничное условие третьего рода

$$-D_+ * \frac{2\pi m r_0}{Q_+} \left. \frac{\partial C}{\partial r} \right|_{r=r_0} + C(r_0, t_+) = 1 \quad (1.7)$$

что в обобщенных переменных (1.2) равно

$$-\frac{1}{a_+} \left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{x=0} + C(0, \tau_+) = 1 \quad (1.8)$$

В этом случае начальное условие может быть записано в виде [5,7]

$$\begin{aligned} C(x, 0; \tau_+) = \Phi_2(a_+x, \tau_+) = 0.5 \left\{ \operatorname{erfc} \left(\frac{a_+x - \tau_+}{2\sqrt{\tau_+}} \right) - \right. \\ \left. - \exp(a_+x) \operatorname{erfc} \left(\frac{a_+x + \tau_+}{2\sqrt{\tau_+}} \right) + 2\sqrt{\tau_+} \exp(a_+x) i \operatorname{erfc} \left(\frac{a_+x + \tau_+}{2\sqrt{\tau_+}} \right) \right\} \end{aligned} \quad (1.9)$$

2. Решение задачи. Преобразуем (1.3) для случая откачки с учетом начального условия (первое краевое условие (1.4)) по переменной τ_- по Лапласу

$$\frac{d^2W}{dx^2} + a_- \frac{dW}{dx} - a_-^2 q \Phi(a_+x, \tau_+) - a_-^2 q W = 0 \quad (2.1)$$

Здесь

$$W(x, q; \tau_+) = L \{ C(x, \tau_-; \tau_+) \} = q \int_0^{\infty} e^{-q\tau_-} C(x, \tau_-; \tau_+) d\tau_-$$

по Карсону — Хэвисайду.

Общий интеграл уравнения (2.1) представим в виде

$$W(x, q; \tau_+) = A \exp \left[- \left(\frac{1}{2} + \sqrt{q + \frac{1}{4}} \right) a_- x \right] + \\ + B \exp \left[- \left(\frac{1}{2} - \sqrt{q + \frac{1}{4}} \right) a_- x \right] + \frac{a_- q}{2 \sqrt{q + \frac{1}{4}}} \int_0^{\infty} \left\{ \exp \left[- \left(\frac{1}{2} + \sqrt{q + \frac{1}{4}} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times a_- (x - \theta) \right] - \exp \left[- \left(\frac{1}{2} - \sqrt{q + \frac{1}{4}} \right) a_- (x - \theta) \right] \right\} \Phi(a_+ \theta, \tau_+) d\theta \quad (2.2)$$

Используя граничное условие на скважине (1.4), запишем (2.2) следующим образом;

$$W(x, q; \tau_+) = B \left\{ \exp \left[- \left(\frac{1}{2} - \sqrt{q + \frac{1}{4}} \right) a_- x \right] - \right. \quad (2.3) \\ \left. - \frac{\frac{1}{2} - \sqrt{q + \frac{1}{4}}}{\frac{1}{2} + \sqrt{q + \frac{1}{4}}} \exp \left[- \left(\frac{1}{2} + \sqrt{q + \frac{1}{4}} \right) a_- x \right] \right\} + \frac{a_- q}{2 \sqrt{q + \frac{1}{4}}} \int_0^{\infty} \left\{ \exp \left[- \left(\frac{1}{2} + \sqrt{q + \frac{1}{4}} \right) a_- (x - \theta) \right] - \right. \\ \left. + \exp \left[- \left(\frac{1}{2} - \sqrt{q + \frac{1}{4}} \right) a_- (x - \theta) \right] \right\} \Phi(a_+ \theta, \tau_+) d\theta$$

Для определения постоянной интегрирования в выражении (2.3) воспользуемся граничным условием на бесконечности (1.4). Тогда

$$B = \frac{a_- q}{2 \sqrt{q + \frac{1}{4}}} \int_0^{\infty} \exp \left[\left(\frac{1}{2} - \sqrt{q + \frac{1}{4}} \right) a_- \theta \right] \Phi(a_+ \theta, \tau_+) d\theta \quad (2.4)$$

Отсюда

$$W(x, q; \tau_+) = \frac{a_- q}{2 \sqrt{q + \frac{1}{4}}} \left\{ \int_x^{\infty} \exp \left[\left(\frac{1}{2} - \sqrt{q + \frac{1}{4}} \right) a_- (\theta - x) \right] \Phi(a_+ \theta, \tau_+) d\theta - \right. \\ \left. - \frac{\frac{1}{2} - \sqrt{q + \frac{1}{4}}}{\frac{1}{2} + \sqrt{q + \frac{1}{4}}} e^{-a_- x} \int_0^{\infty} \exp \left[\left(\frac{1}{2} - \sqrt{q + \frac{1}{4}} \right) a_- (\theta - x) \right] \Phi(a_+ \theta, \tau_+) d\theta + \right. \\ \left. + \int_0^x \exp \left[\left(\frac{1}{2} + \sqrt{q + \frac{1}{4}} \right) a_- (\theta - x) \right] \Phi(a_+ \theta, \tau_+) d\theta \right\} \quad (2.5)$$

Формула (2.5) при $x = 0$ примет вид

$$W(0, q; \tau_+) = \frac{a_- q}{\frac{1}{2} + \sqrt{q + \frac{1}{4}}} \int_0^{\infty} \exp \left[\left(\frac{1}{2} - \sqrt{q + \frac{1}{4}} \right) a_- \theta \right] \Phi(a_+ \theta, \tau_+) d\theta \quad (2.6)$$

Оригинал (2.6) запишется так:

$$C(0, \tau_-; \tau_+) = \int_0^{\infty} F(\theta, \tau_-) \Phi(\alpha \theta, \tau_+) d\theta, \quad F(\theta, \tau_-) = \frac{1}{\sqrt{\pi \tau_-}} \exp \left[- \frac{(\theta - \tau_-)^2}{4 \tau_-} \right] - \\ - 0.5 e^{\theta} \operatorname{erfc} \left(\frac{\theta + \tau_-}{2 \sqrt{\tau_-}} \right), \quad [\alpha = a_+ / a_-] \quad (2.7)$$

Аналогично может быть построен оригинал выражения (2.5).

Функция $\Phi(\alpha \theta, \tau_+)$, стоящая в формуле (2.7), определяется начальными условиями (1.6) или (1.9) в зависимости от граничных условий при наливе раствора в скважину.

3. Асимптотические представления решения при граничном условии первого рода. Рассмотрим первоначально асимптотические представления решения при $x = 0$. С этой целью преобразуем выражение (2.6) при начальном условии (1.6) по параметру τ_+ по Лапласу

$$Y(0, q; p) = \frac{a_-(1/2 - \sqrt{q + 1/4})}{a_-(1/2 - \sqrt{q + 1/4}) + a_+(1/2 - \sqrt{p + 1/4})} \quad (3.1)$$

Асимптотика изображения (3.1) и ее оригинал при больших значениях параметра τ_+ будут иметь вид

$$Y(0, q; p) \approx \frac{a_-(1/2 - \sqrt{q + 1/4})}{a_-(1/2 - \sqrt{q + 1/4}) - a_+p}, \quad C(0, \tau_-; \tau_+) \approx 1 - \Phi_1(\tau_+ / \alpha, \tau_-) \quad (3.2)$$

Асимптотические представления (3.2) при больших значениях переменной τ_- и $\tau_- > \alpha\tau_+$ соответственно равны

$$Y(0, q; p) \approx -\frac{a_-q}{a_-q + a_+p(q + 1)}, \quad C(0, \tau_-; \tau_+) \approx 1 - J(\tau_+ / \alpha, \tau_-) \quad (3.3)$$

и совпадают с (3.2) с погрешностью не более 5% при условии [3]

$$\tau_- > \tau_+ / \alpha > 0.1 \quad (3.4)$$

В формуле (3.3)

$$J(\sigma, \chi) = 1 - e^{-\chi} \int_0^\sigma e^{-z} I_0(2\sqrt{\chi z}) dz \quad (3.5)$$

где J — функция, введенная Шуманом [8], I_0 — модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Далее рассмотрим асимптотику изображения (3.1) и ее оригинал при больших значениях переменной τ_-

$$Y(0, q; p) \approx \frac{a_-q}{a_-q - a_+(1/2 - \sqrt{p + 1/4})}, \quad C(0, \tau_-; \tau_+) \approx \Phi_1(\alpha\tau_-, \tau_-) \quad (3.6)$$

Асимптотика изображения (3.6) и ее оригинал при больших значениях параметра τ_+ и $\tau_+ > \alpha\tau_-$ соответственно равны

$$Y(0, q; p) \approx \frac{a_-q(p + 1)}{a_-q(p + 1) + a_+p}, \quad C(0, \tau_-; \tau_+) \approx J(\alpha\tau_-, \tau_-) \quad (3.7)$$

Разложение (3.7) совпадает с (3.6) с погрешностью не более 5% при условии [3]

$$\tau_+ > \alpha\tau_- > 0.1 \quad (3.8)$$

Для оценки применимости приведенных асимптотических разложений (3.2) и (3.6) запишем решение (2.7) в виде

$$C(0, \tau_-; \tau_+) \approx \int_0^\beta F(\theta, \tau_-) d\theta + \int_\beta^\gamma F(\theta, \tau_-) \Phi_1(\alpha\theta, \tau_+) d\theta \quad (3.9)$$

определив пределы интегрирования β и γ как границы зоны дисперсии, образовавшейся при наливке, с погрешностью не более 0.1% в выражении (3.9)

$$\beta = \alpha^{-1}(\tau_+ - 5\sqrt{\tau_+}); \quad \gamma = \alpha^{-1}(\tau_+ + 5\sqrt{\tau_+}) \quad (3.10)$$

Функция $\Phi_1(\alpha, \theta, \tau_+)$ в области $\beta \leq \theta \leq \gamma$ изменяется практически от 1 до 0. Если положить, что в этой области

$$\Phi_1(\alpha, \theta, \tau_+) \equiv 1 \quad (3.11)$$

то

$$C(0, \tau_-; \tau_+) < 1 - \Phi_1([\tau_+ + 5\sqrt{\tau_-}] \alpha^{-1}, \tau_-) \quad (3.12)$$

Сопоставление формул (3.2) и (3.12) определяет погрешность применимости (3.2)

$$\Delta < \frac{|\Phi_1([\tau_+ + 5\sqrt{\tau_-}] \alpha^{-1}, \tau_-) - \Phi_1(\tau_+/\alpha, \tau_-)|}{1 - \Phi_1(\tau_+/\alpha, \tau_-)} \quad (3.13)$$

Аналогично определив пределы интегрирования β и γ в формуле (3.9) как границы зоны дисперсии, образующейся при откачке, получим погрешность применимости формулы (3.6) в виде

$$\Delta < 1 - \frac{\Phi_1(\alpha[\tau_- + 5\sqrt{\tau_-}], \tau_+)}{\Phi_1(\alpha\tau_-, \tau_+)} \quad (3.14)$$

Далее могут быть построены асимптотические представления решения при любых значениях переменной x . Можно показать, что при больших значениях параметра τ_+ асимптотика решения, изображение которого определяется выражением (2.5), будет иметь вид

$$C(x, \tau_-; \tau_+) \approx 1 - 0.5 \left\{ \operatorname{erfc} \left(\frac{a_-[\tau_+/\alpha - x] - \tau_-}{2\sqrt{\tau_-}} \right) + \exp(\tau_+/\alpha) \operatorname{erfc} \left(\frac{a_-[\tau_+/\alpha + x] + \tau_-}{2\sqrt{\tau_-}} \right) \right\} \quad (3.15)$$

при этом $\tau_+ \gg a_+x$, а асимптотическое представление решения при больших значениях переменной τ_- определяется следующим образом;

$$C(x, \tau_-; \tau_+) \approx \Phi_1(a_+[\tau_-/\alpha - x], \tau_+) \quad (3.16)$$

Условия применимости асимптотических выражений (3.15) и (3.16) могут быть построены по аналогии с условиями (3.13) и (3.14).

4. Асимптотические представления решения при граничном условии третьего рода. Асимптотические разложения решения при $x = 0$ при начальном условии (1.9) могут быть получены из следующих соображений. Рассмотрим двойное преобразование Лапласа формулы (2.7)

$$Y(0, q; p) = \frac{a_-(1/2 - \sqrt{q+1/4})(1/2 - \sqrt{p+1/4})}{p[a_-(1/2 - \sqrt{q+1/4}) + a_+(1/2 - \sqrt{p+1/4})]} \quad (4.1)$$

При больших значениях параметра τ_+ изображение (4.1) будет

$$Y(0, q; p) \approx \frac{a_-(1/2 - \sqrt{q+1/4})}{(p+1)[a_-(1/2 - \sqrt{q+1/4}) - a_+p]} \quad (4.2)$$

Обратное преобразование (4.2) по p дает

$$W(0, q; \tau_+) \approx 1 - \frac{\alpha(1/2 - \sqrt{q+1/4})}{1/2 - \sqrt{q+1/4} + \alpha} e^{-\tau_+} - \frac{\alpha}{1/2 - \sqrt{q+1/4} + \alpha} \exp \left[\left(\frac{1}{2} - \sqrt{q+1/4} \right) \frac{\tau_+}{\alpha} \right] \quad (4.3)$$

Это соответствует асимптотике оригинала

$$C(0, \tau_-; \tau_+) \approx 1 - \frac{1}{2(\alpha+1)} e^{-\tau_+} \{ \operatorname{erfc}(1/2\sqrt{\tau_-}) + (\alpha+1/2) \exp[\alpha(\alpha+1)\tau_-] \times \\ \times \operatorname{erfc}(-[\alpha+1/2]\sqrt{\tau_-}) \} - 0.5 \operatorname{erfc} \left(\frac{\tau_+/\alpha - \tau_-}{2\sqrt{\tau_-}} \right) - \frac{\alpha}{2(\alpha-1)} \exp(\tau_+/\alpha) \times \\ \times \operatorname{erfc} \left(\frac{\tau_+/\alpha + \tau_-}{2\sqrt{\tau_-}} \right) + \exp[-\tau_+ + \alpha(\alpha+1)\tau_-] \operatorname{erfc} \left(\frac{\tau_-/\alpha - [2\alpha+1]\tau_-}{2\sqrt{\tau_-}} \right) \quad (4.4)$$

асимптотика которого при еще больших значениях параметра τ_+ в свою очередь равна

$$C(0, \tau_-; \tau_+) \approx 1 - \Phi_1(\tau_+/\alpha, \tau_-) \quad (4.5)$$

т. е. совпадает с асимптотическим представлением (3.2) решения для граничного условия первого рода.

При больших значениях переменной τ_- асимптотика изображения (4.1), ее обратное преобразование по q и оригинал могут быть представлены соответственно в виде

$$Y(0, q; p) = \frac{a_- q^{1/2} - \sqrt{p + 1/4}}{p[a_- q - a_+^{1/2} - \sqrt{p + 1/4}]} \quad (4.6)$$

$$U(0, \tau_-; p) \approx - \frac{1/2 - \sqrt{p + 1/4}}{p} \exp \left[\left(\frac{1}{2} - \sqrt{p + \frac{1}{4}} \right) a \tau_- \right]$$

$$C(0, \tau_-; \tau_+) \approx \Phi_2(a \tau_-; \tau_+)$$

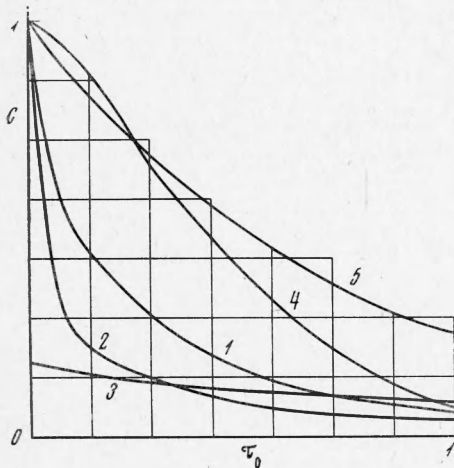
Как известно [7,9], асимптотическое представление функции (1.9) совпадает с функцией (1.6). Следовательно, асимптотики решений (4.6) и (3.6) совпадают при больших значениях переменной τ_- и параметра τ_+ .

Условия применимости приведенных асимптотических разложений, а также асимптотические представления при любых x строятся аналогично тому, как это было сделано в п. 3.

5. Анализ результатов. Численный пример. Точное решение задачи, соответствующее (2.5), является весьма сложным, однако в определенных условиях оказывается достаточным применение асимптотических разложений.

В самом деле, если налив производится с расходом, значительно меньшим расхода откачки, дисперсией, которая возникла при наливе, можно пренебречь, считая, что перенос определяется при наливе лишь вынужденной конвекцией. В этом случае уравнение (13) должно решаться при краевых условиях

$$C(x, 0, \tau_+) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \leq \tau_+ / a_+ \\ 0 & \text{при } x > \tau_+ / a_+ \end{cases} \\ \frac{\partial C}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (5.1) \\ C(\infty, \tau_-, \tau_+) = 0,$$



Решение задачи в такой постановке может быть выведено из решения, приведенного в [8]. Это решение является весьма сложным. Однако, следуя [9], можно показать, что при определенных условиях это решение практически совпадает с (3.2) и (3.15)

Аналогично в случае, когда расход откачки значительно меньше расхода

налива, можно не учитывать дисперсию, которая будет возникать в процессе откачки, считая, что ее влияние на дисперсию, возникшую при наливе, мало. В этом случае в уравнении (1.3) опускается диффузионный член, а решение его совпадает с (3.6), (3.16) и (4.6).

Рассмотрим далее численный пример. Положим $\tau_+ = 0.4$, $a_+ = 2$, $a_- = 1$. Кривые изменения относительной концентрации в скважине, из которой производится откачка, представлены на фигуре. В этом случае предполагается, что налив производился при граничном условии первого рода, т. е. используется начальное условие

(1.6). Кривая 1 соответствует точному решению задачи (2.7), кривая 2 — асимптотическому разложению (3.2), кривая 3 — асимптотике (3.3), кривая 4 — асимптотическому представлению (3.6), а кривая 5 — (3.7).

Согласно фигуре, несмотря на то что расход откачки всего в два раза превышает расход налива, асимптотическое представление (3.2) достаточно точно отражает ход процесса в области малых значений времени откачки.

Результаты, полученные в работе, позволяют обосновать проведение опробования водоносных горизонтов с целью определения параметров переноса односкважинным методом. Подобная постановка полевого эксперимента становится весьма актуальной при изучении глубоких водоносных горизонтов.

Как показывает анализ асимптотических представлений решений, наиболее простым в своей постановке является опыт, в котором расход налива либо существенно превышает, либо значительно меньше, чем расход откачки.

Автор благодарит В. М. Шестакова, предложившего идею односкважинного метода опробования, за ряд ценных замечаний в процессе подготовки работы.

Поступила 15 V 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Marle C., Simandoux P., Passirsky J., Caulier C. Etude du déplacement de fluides miscibles en milieu poreux stratifié. Rev. Inst. Franc. petrole, 1967, vol. 22, No 2.
2. Р о ш а л ь А. А. Массоперенос в двухслойной пористой среде. ПМТФ, 1969, № 4.
3. Р о ш а л ь А. А., Ш е с т а к о в В. М. О миграции подземных вод в слоистых пластах. Темат. сб. Всес. научн.-исслед. ин-та гидрогеол. и инж. 1969, вып. 14.
4. К а р с л о у Г., Е г е р Д. Теплопроводность твердых тел. М., «Наука», 1964.
5. В г е н н е р Н. The diffusion model of longitudinal mixing in beds finite length. Numerical values. Chem. Engng. Sci, April 1962, vol. 17.
6. Б о ч е в е р Ф. М., О р а д о в с к а я А. Е. Конвективная диффузия солей в радиальном потоке подземных вод в связи с защитой их от загрязненных стоков. Тр. Всес. научн.-исслед. ин-та водоснабж. канализ. гидротехн. сооруж. и инж. гидрогеол., 1966, вып. 13.
7. Н и к о л а е в с к и й В. Н., Б о н д а р е в Э. А., М и р к и н М. И., С т е п а н о в а Г. С., Т е р з и В. П. Движение углеводородных смесей в пористой среде. М., «Недра», 1968.
8. S c h u m a n n T. E. W. Head transfer: a liquid flowing through a porous prism. J. Franklin Inst., 1929, vol. 208, No. 3.
9. А б р а м о в а В. И., Ц ы б у л ь с к и й Г. П. Анализ решений уравнения конвективной диффузии при помощи ЭВМ. Применение новых математических методов и вычислительных машин в теории и практике добычи нефти. Тр.: Всес. нефтегаз. научн. исслед. ин-та, 1966, вып. 47.