УДК 533.6.011

О ДВУХ КЛАССАХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА И ИХ СВЯЗИ С ТЕОРИЕЙ БЕГУЩИХ ВОЛН

А. Ф. Сидоров

(Свердловск)

Дано описание двух классов пространственных движений жидкости и газа обладающих большим функциональным произволом и характеризуемых свойство линейности основных параметров течений по части пространственных координат Построенные классы решений позволяют учесть такие свойства сплошной среды, ка теплопроводность и электропроводность для газа, вязкость и электропроводность дл жидкости в приближении Буссинеска. Для невязкого газа исследована связь описан ных течений с теорией бегущих волн ранга три-тройных волн. Получены в качеств спецификаций исходных классов течений определенные системы уравнений, описы вающие новые типы вихревых тройных волн, обладающих функциональным произ волом. Построены серии точных решений.

1. Классы решений нестационарных пространственных уравнени движения несжимаемой жидкости и газовой динамики, когда компонент вектора скорости — линейные функции от всех пространственных коор динат, хорошо известны и изучались в [1, 2] для несжимаемой среды и [3, 4] для газа. В групповой терминологии такие классы течений являют ся H-инвариантными решениями [5], они нашли ряд содержательных ин терпретаций [4]. Нетривиален вопрос о существовании пространствен ных течений жидкости и газа с линейной зависимостью компонент вектор скорости $u_k(x_1, x_2, x_3, t)$ от части пространственных координат (одной ил двух).

В течениях такого типа должны быть выполнены соотношения

$$u_k = l_k(x_1, t)x_2 + f_k(x_1, t)x_3 + g_k(x_1, t) \quad (k = 1, 2, 3) \tag{1.1}$$

для течений класса I и

$$u_k = f_k(x_1, x_2, t)x_3 + g_k(x_1, x_2, t) \quad (k = 1, 2, 3) \tag{1.2}$$

для течений класса II, где l_k, f_k, g_k — функции, подлежащие определени

Уравнения движения среды обычно удается привести к виду, когд каждое слагаемое содержит полиномиальную нелинейность от неизвес ных функций не выше квадратичной. Соответствующие термодинамически функции также представляются выражениями типа (1.1), (1.2) (иногд они могут содержать и квадратичные по x_2, x_3 слагаемые).

После подстановки в такую систему уравнений представлений тип (1.1), (1.2) для всех неизвестных функций получаются полиномиальны соответственно по переменным x_2, x_3 или x_3 выражения с коэффициентам содержащими дифференциальные агрегаты от l_k, f_k, g_k. Приравнивая нулю все эти коэффициенты, получим сильно переопределенную систем m дифференциальных уравнений с частными производными для n неи вестных функций l_k, f_k, g_k и аналогичных коэффициентов, входящих в те модинамические функции ($m > n$).

Общий анализ совместности таких систем весьма громоздок и сложе Провести его и определить произвол в решениях, кроме нескольких час ных случаев, не удается. Однако оказалось возможным для ряда случае с учетом упомянутых выше свойств среды указать простые достаточны условия совместности получающихся систем [6—8]. Построенные пр этом определенные системы l уравнений (l — число уравнений, пример для невязкого газа будут приведены ниже) обладают широким функци нальным произволом. Хотя эти системы исследованы еще совершенно н достаточно, они уже нашли ряд применений при решении конкретных г зодинамических задач [9—11], в частности, при исследовании динамик вихревых вращающихся потоков газа, позволили также построить класс точных решений.

Класс движений		Невязкий газ			Вязкая жидкость	
		идеальный	теплопроводный	электропроводный	в приближении Буссинеска	с учетом электропроводности
I (1.1)	m	24	46	67	27	48
	n	12	15	24	18	27
	l	8	9	11	11	13; 5
II (1.2)	m	12	19	30	14	25
	n	8	10	16	11	17
	l	5	6	7	7	8; 8

Численные значения m, n, l для нескольких основных типов сред приведены в таблице. Отметим, что число l в случае, если все уравнения получающейся системы имеют первый порядок, совпадает с числом произвольных функций одного или двух аргументов, от которых зависит соответствующий класс движений. Для электропроводной вязкой жидкости в приближении Буссинеска возникают два разных варианта определенных систем.

Общими для всех рассмотренных случаев являются следующие свойства движений: завихренность, неизоэнергетичность, невырожденность в общем случае годографа скоростей. Неясна пока групповая природа таких решений. Структура получающихся систем определенных уравнений, описывающих классы движений I и II, схожа со структурой исходных уравнений движения жидкости или газа при уменьшении на единицу размерности пространства независимых переменных, но в правые части полученных систем входят массовые силы, зависящие нелинейно от неизвестных функций. Заметим, что в наиболее общем случае течений вязкого сжимаемого газа не удалось пока получить достаточные условия совместности, приводящие к нетривиальным определенным системам, описывающим содержательные классы движений.

2. Рассмотрим вопрос о связи движений классов I и II с теорией бегущих волн. Для уравнений газовой динамики теория бегущих волн получила к настоящему времени широкое развитие. Наиболее полный обзор имеющихся результатов содержится в [12]. При этом под бегущими волнами понимаются классы решений уравнений газовой динамики, характеризуемые тем, что для них четырехмерной области исходного физического пространства x_1, x_2, x_3, t соответствует в пространстве годографа скоростей u_1, u_2, u_3 область меньшей размерности r ($r = 1, 2, 3$). Величина r называется рангом волны.

Практически полностью изучен случай $r = 1$ — так называемые простые волны. При $r = 2$ (двойные волны) наиболее полно изучены газодинамические течения в предположении потенциальности потока, а также двойные волны с прямолинейными образующими, которые характеризуются тем, что основные газодинамические параметры сохраняют постоянное значение вдоль некоторой совокупности прямых в исходном физическом пространстве. Для этих типов двойных волн получены определяющие уравнения и установлен функциональный произвол, имеющийся в решениях. В последнее время дана достаточно полная классификация двойных волн общего типа для двумерных плоскопараллельных нестационарных течений [13]. Что же касается тройных волн ($r = 3$), то даже для потенциальных течений отсутствует их регулярное описание (с помощью определенных систем дифференциальных уравнений). Построены лишь отдельные классы (хотя и достаточно широкие, обладающие функциональным произволом) точных решений типа потенциальной тройной волны [12] и один частный класс вихревых тройных волн [6].

Трудности изучения волн рангов два и три, являющихся с групповой точки зрения частично инвариантными решениями [14], связаны с необходимостью исследования сложных и громоздких переопределенных систем уравнений с частными производными. Несмотря на имеющиеся общие подходы к решению таких задач (алгоритм Картана и его модификации), конкретная реализация их связана с большими аналитическими вычислениями и пока даже с использованием специализированных программ для проведения аналитических выкладок на ЭВМ не привела к успеху, в частности, при исследовании совместности системы уравнений потенциальных тройных волн. Фактически каждое серьезное продвижение в теории кратных бегущих волн потребовало специализированного аналитического изучения в подходящих пространствах зависимых и независимых переменных.

Цель следующих пунктов — описание новых классов вихревых тройных волн, которые возникают как отдельные специализации более общих (с невырожденным годографом скорости) газодинамических течений классов I и II, рассмотренных в п. 1. Сужение этих классов движений, когда дополнительно налагается условие вырожденности годографа скоростей, как и ранее, приводит к новым переопределенным системам уравнений. Тем не менее, хотя общий анализ совместности провести весьма трудно, можно указать достаточные условия, когда полученные переопределенные системы сводятся к определенным, и найти, таким образом, новые описания вихревых бегущих волн ранга три с широким функциональным произволом.

3. Рассмотрим бегущие волны в классе течений со свойством линейности по двум пространственным координатам. Систему уравнений газовой динамики для функций $\mathbf{u}$ (вектор скорости), $Q = \rho^{\gamma-1}$ (ρ — плотность), W (энтропийная функция, уравнение состояния имеет вид $p = W\rho^{\gamma}$, p — давление, γ — показатель адиабаты) запишем в форме

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{u} + Q\,\mathrm{grad}\,W + \frac{\gamma}{\gamma-1}W\,\mathrm{grad}\,Q = 0; \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + (\mathbf{u}\,\mathrm{grad}\,Q) + (\gamma-1)\,Q\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0; \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + (\mathbf{u}\,\mathrm{grad}\,W) = 0. \tag{3.3}$$

В [6] построены решения системы (1.1)—(1.3) в виде

$$\begin{aligned} u_k &= l_k(x_1, t)x_2 + f_k(x_1, t)x_3 + g_k(x_1, t) \quad (k = 1, 2, 3),\\ Q &= l(x_1, t)x_2 + f(x_1, t)x_3 + g(x_1, t),\\ W &= L(x_1, t)x_2 + F(x_1, t)x_3 + G(x_1, t). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Если в (3.4) положить

$$l_1 = f_1 = l = f = L = F = 0, \tag{3.5}$$

то оставшиеся девять неизвестных функций $l_2, l_3, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3, g, G$ удовлетворяют следующей системе девяти уравнений:

$$\frac{\partial l_i}{\partial t} + g_1\frac{\partial l_i}{\partial x_1} + l_2 l_i + l_3 f_i = 0, \quad i = 2, 3; \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + g_1\frac{\partial f_i}{\partial x_1} + f_2 l_i + f_3 f_i = 0, \quad i = 2, 3; \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial g_i}{\partial t} + g_1\frac{\partial g_i}{\partial x_1} + g_2 l_i + g_3 f_i = 0, \quad i = 2, 3; \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial t} + g_1\frac{\partial g_1}{\partial x_1} + g\frac{\partial G}{\partial x_1} + \frac{\gamma}{\gamma-1}G\frac{\partial g}{\partial x_1} = 0; \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} + g_1\frac{\partial g}{\partial x_1} + (\gamma-1)\,g\left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1} + l_2 + f_3\right) = 0; \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} + g_1\frac{\partial G}{\partial x_1} = 0. \tag{3.11}$$

Как известно, бегущей волной ранга r называют такое решение системы (3.1)—(3.3), для которого ранг матрицы Якоби A для u_k, Q, W равен

r. В данном случае матрица A имеет вид

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial g_1}{\partial t} \\ \frac{\partial l_2}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} x_3 + \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & l_2 & f_2 & \frac{\partial l_2}{\partial t} x_2 + \frac{\partial f_2}{\partial t} x_3 + \frac{\partial g_2}{\partial t} \\ \frac{\partial l_3}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_1} x_3 + \frac{\partial g_3}{\partial x_1} & l_3 & f_3 & \frac{\partial l_3}{\partial t} x_2 + \frac{\partial f_3}{\partial t} x_3 + \frac{\partial g_3}{\partial t} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial g}{\partial t} \\ \frac{\partial G}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial G}{\partial t} \end{vmatrix}.$$

Ясно, что если $l_2 f_3 - l_3 f_2 \neq 0$, а функции g_1 и g или g и G функционально независимы, то $r = 4$ и формулы (3.4) определяют, вообще говоря, течения общего типа.

Рассмотрим сначала случай, когда годограф для течений (3.4) вырождается и

(3.12) $$z = l_2/l_3 = f_2/f_3.$$

Тогда, если, например, $(l_2, l_3) \neq (0, 0)$, а g и g_1 функционально независимы, $r = 3$ и реализуется случай тройных волн.

Составляя линейные комбинации из пар соотношений (3.6), (3.7) соответственно с коэффициентами l_3 и $-l_2$, f_3 и $-f_2$, имеем

(3.13) $$l_3 \frac{\partial l_2}{\partial t} - l_2 \frac{\partial l_3}{\partial t} + g_1 \left(l_3 \frac{\partial l_2}{\partial x_1} - l_2 \frac{\partial l_3}{\partial x_1} \right) = 0,$$

$$f_3 \frac{\partial f_2}{\partial t} - f_2 \frac{\partial f_3}{\partial t} + g_1 \left(f_3 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - f_2 \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \right) = 0.$$

Оба уравнения (3.13) с помощью (3.12) сводятся к одному

(3.14) $$\partial z/\partial t + g_1 \partial z/\partial x_1 = 0.$$

Таким образом, вместо (3.6), (3.7) можно оставить лишь два уравнения:

(3.15) $$\partial l_2/\partial t + g_1 \partial l_2/\partial x_1 + l_2^2 + l_3 f_2 = 0;$$

(3.16) $$\partial f_2/\partial t + g_1 \partial f_2/\partial x_1 + f_2(l_2 + f_3) = 0.$$

В этом случае, полагая $l_3 = l_2 f_3 f_2^{-1}$ (3.12), для функций l_2, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3, g, G получаем определенную систему восьми уравнений (3.15), (3.16), (3.14), (3.8)—(3.11), описывающую класс вихревых нестационарных неизоэнтропических пространственных тройных волн, который обладает произволом в восемь функций одного независимого аргумента. При этом подсистема уравнений (3.14)—(3.16), (3.9)—(3.11) независима. После ее решения функции g_2 и g_3 находятся из системы двух линейных уравнений (3.8).

Пусть теперь $l_2 f_3 - l_3 f_2 \neq 0$. Так как определители четвертого порядка должны обратиться в нуль, получаем функциональные зависимости

(3.17) $$g = F(g_1), \quad G = G(g).$$

В силу (3.17) уравнение состояния должно отвечать баротропному газу, и в дальнейшем для простоты будем полагать $G = G_0 = \text{const}$, т. е. рассматривать изоэнтропический случай. Тогда уравнение (3.9) приобретает вид

(3.18) $$\frac{\partial g_1}{\partial t} + \omega(g_1) \frac{\partial g_1}{\partial x_1} = 0, \quad \omega(g_1) = g_1 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} G_0 F',$$

и общий интеграл его можно представить в форме

(3.19) $$x_1 = \omega(g_1)t + \Gamma(g_1),$$

где Г — произвольная функция. Как уже отмечалось, после определения функций l_2, l_3, f_2, f_3 функции g_2, g_3 для данного случая также находятся путем интегрирования линейной системы (3.8).

Таким образом, дело сводится к анализу совместности системы пяти уравнений (3.6), (3.7), (3.10) для четырех функций l_2, l_3, f_2, f_3, в коэффициенты которой входят две произвольные функции F и Г от одного аргумента. Уравнение (3.10) при этом примет вид

$$l_2 + f_3 = -\left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma-1)^2} G_0 \frac{F'^2}{F}\right)(\omega' t + \Gamma')^{-1}, \tag{3.20}$$

т. е. функцию f_3 можно выразить через l_2, и дальнейшему анализу подлежит система (3.6), (3.7). Полный ее анализ провести пока не удалось. Рассмотрим частный случай и покажем, что множество решений этой переопределенной системы непусто и обладает произволом по крайней мере в несколько произвольных постоянных. Тем самым с учетом (3.8) будет построен класс тройных волн с произволом в две функции от одного аргумента.

Предположим, что имеют место зависимости

$$\begin{gathered}\omega = a = \mathrm{const},\ \xi = x_1 - at,\ l_k = L_k(\xi),\\ f_k = F_k(\xi),\ g_1 = G_1(\xi) + a,\ g = H(\xi).\end{gathered} \tag{3.21}$$

Тогда уравнения (3.6), (3.7), (3.9), (3.10) приводятся к виду

$$\begin{gathered}G_1 L_2' + L_2^2 + L_3 F_2 = 0,\quad G_1 L_3' + L_3(L_2 + F_3) = 0,\\ G_1 F_2' + F_2(L_2 + F_3) = 0,\quad G_1 F_3' + F_2 L_3 + F_3^2 = 0,\\ \frac{1}{2} G_1^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} G_0 H = C_1 = \mathrm{const},\quad G_1 H' + (\gamma - 1) H (G_1' + L_2 + F_3) = 0.\end{gathered} \tag{3.22}$$

Но такая система обыкновенных уравнений (3.22) уже рассматривалась [9] при изучении стационарных течений (ξ играет роль стационарной координаты x_3') и проинтегрирована до конца в квадратурах. Решение ее зависит от шести произвольных постоянных.

Система уравнений для функций g_2, g_3 (3.8) имеет вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial g_2}{\partial t} + (G_1 + a)\frac{\partial g_2}{\partial x_1} + g_2 L_2 + g_3 F_2 = 0,\\ \frac{\partial g_3}{\partial t} + (G_1 + a)\frac{\partial g_3}{\partial x_1} + g_2 L_3 + g_3 F_3 = 0.\end{gathered} \tag{3.23}$$

Перейдем к новым независимым переменным t', ξ, положив

$$\xi = x_1 - at,\quad t' = \int \frac{d\xi}{G_1(\xi)} - t. \tag{3.24}$$

Тогда (3.23) приводится к виду

$$\begin{gathered}G_1(\xi)\frac{\partial g_2}{\partial \xi} + g_2 L_2(\xi) + g_3 F_2(\xi) = 0,\\ G_1(\xi)\frac{\partial g_3}{\partial \xi} + g_2 L_3(\xi) + g_3 F_3(\xi) = 0.\end{gathered} \tag{3.25}$$

Исключив из (3.25) g_3, получим с помощью (3.22) для g_2 следующее фактически обыкновенное линейное дифференциальное уравнение с переменной ξ:

$$G_1^2 \frac{\partial^2 g_2}{\partial \xi^2} + G_1 (G_1' + 2L_2 + 2F_3)\frac{\partial g_2}{\partial \xi} + 2 g_2 (L_2 F_3 - L_3 F_2) = 0. \tag{3.26}$$

Общее решение (3.26) можно представить как $g_2 = A_1(t')\Phi_1(\xi) + A_2(t') \times \times \Phi_2(\xi)$, где Φ_1 и Φ_2 — фундаментальные решения (3.26), а A_1 и A_2 — произвольные функции от t'.

Таким образом, построен класс решений типа нестационарных изоэнтропических вихревых пространственных тройных волн с произволом в две функции от одного аргумента. Функции g_2 и g_3 аналогичны известным функциям «размещения» в теории течений с вырожденным годографом [12].

4. Рассмотрим решения, линейные по одной пространственной координате.

В [6] построены решения системы (3.1)—(3.3) вида

$$u_k = f_k(x_1, x_2, t)x_3 + g_k(x_1, x_2, t) \quad (k = 1, 2, 3), \tag{4.1}$$
$$Q = f(x_1, x_2, t)x_3 + g(x_1, x_2, t),$$
$$W = F(x_1, x_2, t)\, x_3 + G(x_1, x_2, t).$$

Если в (4.1)

$$f_1 = f_2 = f = F = 0, \tag{4.2}$$

то оставшиеся шесть неизвестных функций g_1, g_2, g_3, f_3, g, G будут удовлетворять системе шести уравнений ($\mathbf{v} = (f_1, f_2)$):

$$\frac{\partial f_3}{\partial t} + (\mathbf{v}\,\mathrm{grad}\, f_3) + f_3^2 = 0, \tag{4.3}$$
$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\,\mathbf{v} + g\,\mathrm{grad}\, G + \frac{\gamma}{\gamma - 1} G\,\mathrm{grad}\, g = 0,$$
$$\frac{\partial g_3}{\partial t} + (\mathbf{v}\,\mathrm{grad}\, g_3) + f_3 g_3 = 0,$$
$$\frac{\partial g}{\partial t} + (\mathbf{v}\,\mathrm{grad}\, g) + (\gamma - 1)\, g\,(f_3 + \mathrm{div}\,\mathbf{v}) = 0,$$
$$\frac{\partial G}{\partial t} + (\mathbf{v}\,\mathrm{grad}\, G) = 0.$$

В данном случае матрица

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2} & 0 & \dfrac{\partial g_1}{\partial t} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_2} & 0 & \dfrac{\partial g_2}{\partial t} \\ x_3 \dfrac{\partial f_3}{\partial x_1} + \dfrac{\partial g_3}{\partial x_1} & x_3 \dfrac{\partial f_3}{\partial x_2} + \dfrac{\partial g_3}{\partial x_2} & f_3 & x_3 \dfrac{\partial f_3}{\partial t} + \dfrac{\partial g_3}{\partial t} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g}{\partial x_2} & 0 & \dfrac{\partial g}{\partial t} \\ \dfrac{\partial G}{\partial x_1} & \dfrac{\partial G}{\partial x_2} & 0 & \dfrac{\partial G}{\partial t} \end{pmatrix}.$$

Пусть $r < 4$ и $f_3 \neq 0$ (если $f_3 = 0$, то получается малоинтересный случай, когда все газодинамические величины не зависят от x_3). Тогда из вида A сразу же находим функциональные зависимости

$$g = M(g_1, g_2), \quad G = N(g_1, g_2). \tag{4.4}$$

Анализ совместности получающейся из (4.3), (4.4) переопределенной системы уравнений, хотя ряд промежуточных интегралов можно получить достаточно легко, весьма сложен. Несмотря на то что класс решений вида (4.1) является более общим, чем решения (3.4), тем не менее из-за дополнительных ограничений (4.2), сужающих этот класс, решения вида (3.4) уже не вкладываются в него. Вопрос о содержательности вложения в класс (4.1), (4.2) течений типа бегущих волн в общем случае остается открытым. Приведем пример, показывающий, что класс тройных волн типа (4.1), (4.2) непуст и обладает произволом по меньшей мере в пять функций одного аргумента и одну функцию от двух независимых переменных.

Будем считать, что в системе (4.3) справедливы функциональные соотношения

$$g_k = G_k(\xi_1, \xi_2) + a_k, \quad \xi_k = x_k - a_k t \quad (k = 1, 2), \tag{4.5}$$
$$g = M(\xi_1, \xi_2), \quad G = N(\xi_1, \xi_2), \quad f_3 = F(\xi_1, \xi_2).$$

Тогда пять уравнений системы (4.3) (кроме уравнения для g_3) для пяти функций G_1, G_2, M, N, F можно записать в виде

$$G_1 \frac{\partial G_k}{\partial \xi_1} + G_2 \frac{\partial G_k}{\partial \xi_2} + M \frac{\partial N}{\partial \xi_k} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} N \frac{\partial M}{\partial \xi_k} = 0 \quad (k = 1, 2),$$

$$G_1 \frac{\partial F}{\partial \xi_1} + G_2 \frac{\partial F}{\partial \xi_2} + F^2 = 0,$$

$$G_1 \frac{\partial M}{\partial \xi_1} + G_2 \frac{\partial M}{\partial \xi_2} + (\gamma - 1) M \left(F + \frac{\partial G_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial G_2}{\partial \xi_2}\right) = 0, \quad G_1 \frac{\partial N}{\partial \xi_1} + G_2 \frac{\partial N}{\partial \xi_2} = 0.$$

После решения этой системы, содержащей произвол в пять функций от одной переменной, для определения g_3 остается линейное уравнение первого порядка

$$\frac{\partial g_3}{\partial t} + (G_1 + a_1) \frac{\partial g_3}{\partial x_1} + (G_2 + a_2) \frac{\partial g_3}{\partial x_2} + F g_3 = 0.$$

Таким образом, построен класс тройных (если G_1 и G_2 функционально независимы) волн с указанным выше произволом.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Dirichlet G. L.** Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik.— J. reine angew. Math.— 1861.— Bd 58, H. 4.
2. **Риман Б.** Сочинения.— М.: Гостехиздат, 1948.
3. **Овсянников Л. В.** Новое решение уравнений гидродинамики // ДАН СССР.— 1956.— Т. 111, № 1.
4. **Богоявленский О. И., Новиков С. П.** Однородные модели в общей теории относительности и газовой динамике // УМН.— 1976.— Т. 31, № 5(191).
5. **Овсянников Л. В., Ибрагимов Н. Х.** Групповой анализ дифференциальных уравнений механики // Итоги науки и техники. Сер. Общая механика.— М.: ВИНИТИ 1975.— Т. 2.
6. **Сидоров А. Ф.** О двух классах решений уравнений газовой динамики // ПМТФ.— 1980.— № 5.
7. **Сидоров А. Ф.** Об одном классе решений уравнений газовой динамики и естественной конвекции // Численные и аналитические методы решения задач механики сплошной среды.— Свердловск: УНЦ АН СССР, 1981.
8. **Ульянов О. Н.** О двух классах движений газа в поле тяжести // Моделировани в механике.— Новосибирск, 1988.— Т. 2(19), № 1.
9. **Сидоров А. Ф.** О двух типах закрученных газовых потоков // ПММ.— 1983.— Т. 47, вып. 5.
10. **Ульянов О. Н.** Об одном классе решений уравнений газовой динамики // Приближенные методы решения краевых задач механики сплошной среды.— Свердловск УНЦ АН СССР, 1985.
11. **Ульянов О. Н.** Об одном классе закрученных газовых потоков // Моделировани процессов гидрогазодинамики и энергетики: Тр. Всесоюз. конф. молодых учены и специалистов.— Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1985.
12. **Сидоров А. Ф., Шапеев В. П., Яненко Н. Н.** Метод дифференциальных связей его приложения в газовой динамике.— Новосибирск: Наука, 1984.
13. **Мелешко С. В.** К классификации плоских изэнтропических течений газа тип двойной волны // ПММ.— 1985.— Т. 49, вып. 3.
14. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1978.

Поступила 3/VIII 1988 г.

УДК 517.958

ПРИБЛИЖЕННЫЕ СИММЕТРИИ И ФОРМАЛЬНАЯ ЛИНЕАРИЗАЦИЯ

В. А. Байков, Р. К. Газизов, Н. Х. Ибрагимов

(Уфа)

Методы классического группового анализа позволяют выделить среди всех уравнений математической физики уравнения, замечательные по своим свойствам симметрии. К сожалению, любое малое возмущение уравнения разрушает допускаему группу, что снижает прикладную ценность этих «рафинированных» уравнений и те