

**О ВЛИЯНИИ НЕПРОНИЦАЕМОГО ВКЛЮЧЕНИЯ  
В НИЖЕЛЕЖАЩЕМ  
СИЛЬНОПРОНИЦАЕМОМ НАПОРНОМ ГОРИЗОНТЕ  
НА РЕЖИМ ГРУНТОВЫХ ВОД В ОРОШАЕМОМ ПОЧВЕННОМ СЛОЕ**

*Э. Н. Береславский*  
(Ленинград)

В гидродинамической постановке решается задача о плоской безнапорной установившейся фильтрации через почвенный слой в нижележащий напорный горизонт, содержащий на своей кровле непроницаемый участок, при равномерной инфильтрации на свободную поверхность. С помощью метода П. Я. Полубариновой-Кочкиной дается конструктивное решение задачи; получены представления для характерных размеров схемы течения и кривой депрессии. Отмечен предельный случай течения — отсутствие подпора в нижнем сильнопроницаемом слое, исследованный в [1].

Рассматриваемая схема течения представлена на рис. 1. Инфильтрационная вода, просачиваясь через почвенный слой в нижележащий сильнопроницаемый горизонт, напор над кровлей которого постоянен и равен  $H_0$ , образует над непроницаемым участком, моделируемым отрезком длины  $2L$ , бугор грунтовых вод и растекается в стороны на бесконечность. Предполагается, что интенсивность инфильтрации (отнесенная к коэффициенту фильтрации грунта) постоянна и равна  $\varepsilon$ .

Ось  $y$ , будучи линией симметрии, является линией тока. Рассмотрим правую половину области течения. Исследование описанной модели сводится к определению кривой депрессии  $AB$ , ограничивающей область  $z$ , и двух взаимно сопряженных внутри последней функций  $\varphi$  и  $\psi$  при крайних условиях

$$(1) \quad \begin{aligned} (\varphi + y)|_{AB} &= H_0, \quad \varphi|_{BC} = 0, \\ (\psi - \varepsilon x)|_{AB} &= \psi|_{AD} = \psi|_{CD} = 0, \end{aligned}$$

где  $\varphi$  и  $\psi$  — отнесенные к коэффициенту фильтрации грунта потенциал скорости и функция тока соответственно.

Для решения задачи используется метод [2], основанный на применении аналитической теории линейных дифференциальных уравнений. В качестве канонической области здесь рассматривается прямоугольник плоскости  $\tau = \tau_1 + i\tau_2$  (рис. 2), где  $\rho = K'/K$  ( $K(k)$  — полный эллиптический интеграл первого рода при модуле  $k$ ,  $K' = K(k')$ ,  $k' = \sqrt{1 - k^2}$ ).

Вводятся функции  $z(\tau)$  и  $\omega(\tau)$ , конформно отображающие указанный прямоугольник на область фильтрации  $z = x + iy$  и область комплексного потенциала  $\omega = \varphi + i\psi$ , а также функции

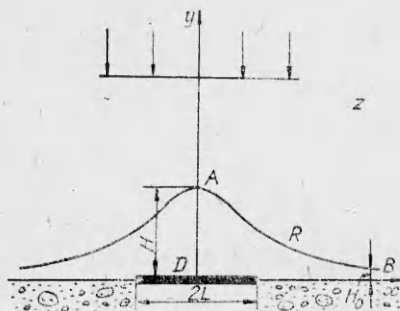
$$(2) \quad Z = dz/d\tau, \quad \Omega = d\omega/d\tau,$$

которые подлежат определению.

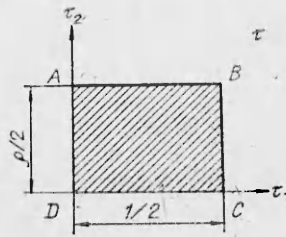
Функцию, дающую конформное отображение прямоугольника на область комплексной скорости  $w = d\omega/dz$  (рис. 3), соответствующую крайним условиям (1), запишем в виде [3]

$$(3) \quad w(\tau) = \sqrt{\varepsilon} \frac{\vartheta_2(\tau + \alpha i) - \vartheta_2(\tau - \alpha i)}{\vartheta_2(\tau + \alpha i) + \vartheta_2(\tau - \alpha i)},$$

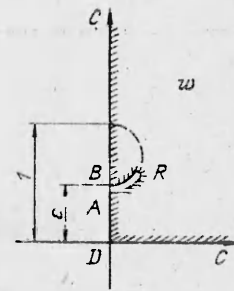
где  $\vartheta_2(\tau)$  — вторая  $\vartheta$ -функция Якоби с параметром  $q = \exp(-\pi\rho)$ ;  $\alpha = (1/2\pi) \ln[(1 + \sqrt{\varepsilon})/(1 - \sqrt{\varepsilon})]$ .



Р и с. 1



Р и с. 2



Р и с. 3

Учитывая поведение функций (2) в окрестностях особых точек, а также выражение (3), получим параметрическое решение исходной краевой задачи:

$$(4) \quad Z = C \frac{\vartheta_2(\tau + \alpha i) + \vartheta_2(\tau - \alpha i)}{\vartheta_3(\tau)}, \quad C > 0;$$

$$(5) \quad \Omega = C \sqrt{\varepsilon i} \frac{\vartheta_2(\tau + \alpha i) - \vartheta_2(\tau - \alpha i)}{\vartheta_3(\tau)}.$$

Справедливость формул (3)–(5) устанавливается непосредственной проверкой.

Запись представления (4) для различных участков границы области  $\tau$  с последующим интегрированием приводит к параметрическим уравнениям соответствующих граничных участков схемы.

Отметим предельный случай  $H_0 = 0$  (отсутствие подпора), связанный с вырождением области комплексной скорости. При  $\alpha = 0,5\pi$   $w = \sqrt{\varepsilon} \operatorname{tg} \pi t$ ,  $Z = C \cos \pi t$ ,  $\Omega = C \sqrt{\varepsilon} \sin \pi t$ . Из области  $w$  выпадает полукруг  $|w - 0,5(1 + \varepsilon)i| < 0,5(1 - \varepsilon)$ , кривая депрессии выходит на кровлю нижележащего пласта под прямым углом в некоторой точке  $B$ , с которой совмещается точка перегиба  $R$ , так что вся депрессионная кривая становится выпуклой. Для этой схемы, рассмотренной в [1], имеем ( $L_1$  — абсцисса точки  $B$ )

$$(6) \quad L_1/L = \sqrt{1/(1 - \varepsilon)}, \quad H/L = \sqrt{\varepsilon/(1 - \varepsilon)}.$$

В прямой физической постановке параметры отображения  $C$  и модуль  $k$  искомые и для их определения служат величины  $L$  и  $H_0$ , получающиеся

$H_0/L$	$\varepsilon=0,2$		$\varepsilon=0,5$		$\varepsilon=0,8$	
	$k$	$H/L$	$k$	$H/L$	$k$	$H/L$
0	0,9997184	0,5000	0,9708201	1,0000	0,769110	2,0000
0,001	0,9997144	0,5002	0,9707375	1,0003	0,7680781	2,0003
0,1	0,9991045	0,5274	0,9616661	1,0318	0,7553391	2,0351
0,2	0,9975367	0,5695	0,9505844	1,0697	0,7413497	2,0727
0,4	0,9882379	0,6863	0,9226084	1,1619	0,7129412	2,1548
0,6	0,9660830	0,8313	0,8877010	1,2726	0,6842856	2,2459
0,8	0,9302154	0,9928	0,8476825	1,3983	0,6557589	2,3455
1,0	0,8843398	1,1645	0,8047256	1,5361	0,6276766	2,4529
10,0	0,1555625	10,0196	0,1548670	10,0779	0,1521975	10,3065

в результате интегрирования (4) от точки  $D$  до точки  $C$  и от точки  $D$  до точки  $B$  с использованием точки  $A$ . В запрограммированном для ЭВМ алгоритме  $k$  находится из соотношения для  $H_0$  методом половинного деления, а значение  $H$ , а также координаты точек кривой депрессии вычисляются с предварительным исключением  $C$  из соотношения, фиксирующего  $L=1$ .

Согласно расчетам, при фиксировании  $\varepsilon$  функция  $k = k(H_0/L)$  оказывается монотонно убывающей и ограниченной сверху величиной  $k_* = k(0)$ , которая соответствует предельному случаю  $H_0 = 0$  и максимально допустима для рассматриваемой схемы течения; модуль  $k_*$  определяется из уравнения

$$(7) \quad K'/K = (1/\pi) \ln |(1 + \sqrt{\varepsilon}) / (1 - \sqrt{\varepsilon})|.$$

При этом для  $k \leq 0,707106$  (что соответствует случаю, когда  $K \leq K'$ ) используются разложения  $\theta$ -функций в ряды по степеням параметра  $q$ , в противном случае осуществляется переход к известным разложениям по  $q' = \exp(-\pi\rho')$ , где  $\rho' = 1/\rho$ .

В таблице приводятся результаты вычислений  $k$  и  $H/L$  в зависимости от  $H_0/L$  для некоторых  $\varepsilon$ ; в первой строке содержатся значения  $k_*$  и  $H_*/L$ , найденные из (7) и (6) соответственно.

На рис. 4 показана зависимость  $H/L$  от  $\varepsilon$  и  $H_0/L$  (линии 1—7 для  $\varepsilon = 0,6; 0,5; 0,4; 0,3; 0,2; 0,1; 0,01$ ), при  $H_0/L > 1$  она близка к линейной.

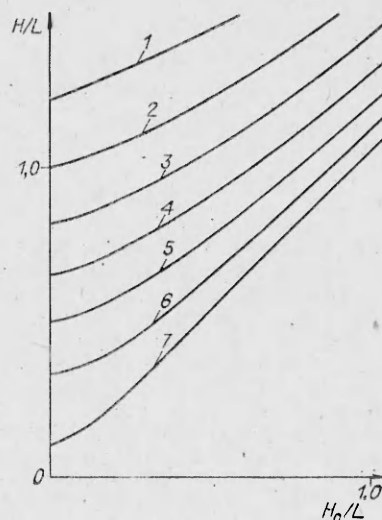


Рис. 4

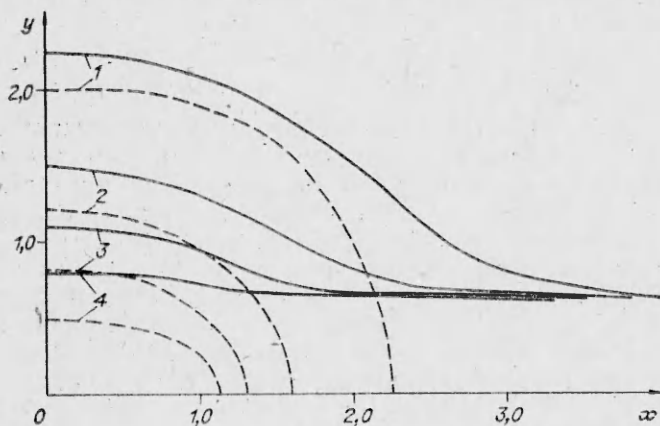


Рис. 5

На рис. 5 изображены кривые депрессии, рассчитанные при  $H_0/L = 0,6$  и различных  $\varepsilon$  (линии 1—4 для  $\varepsilon = 0,8; 0,6; 0,4; 0,2$ ), для этих же значений  $\varepsilon$  штриховые линии соответствуют предельному случаю  $H_0 = 0$ .

Автор благодарит В. Н. Эмиха за полезные замечания и обсуждение результатов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев В. А. О форме бугра грунтовых вод между двумя дренами на водоупоре. — ПММ, 1955, т. 19, вып. 1.
2. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. — М.: Наука, 1977.
3. Береславский Э. Н. О конформном отображении некоторых круговых многоугольников на прямоугольник. — Изв. вузов. Математика, 1980, т. 216, № 5.

Поступила 13/V 1985 г.