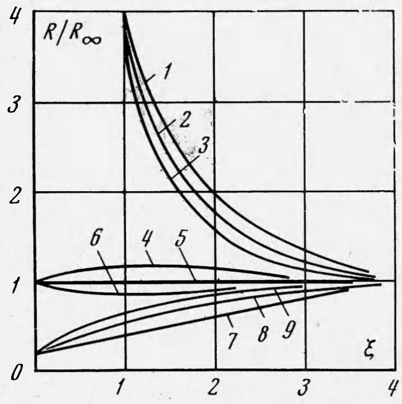
Значение отношения R/R_∞ на оси канала $\rho = 0$ было просчитано для различных значений параметров s, β и для разных ξ. На фигуре даны кривые относительного кажущегося сопротивления R/R_∞ для значений s, β, равных 0.1—1.3, 0.1—1.0, 0.1—0.7, 1—1.3, 1—1, 1—0.7, 5—0.7, 5—1, 5—1.3 (кривые *1*—*9* соответственно).



Из фигуры видно, что при больших расстояниях от источника, независимо от значений s, β кажущееся сопротивление, измеряемое по оси скважины, стремится к сопротивлению среды на бесконечности.

При малых расстояниях от источника кажущееся сопротивление стремится к сопротивлению среды в области $r < r_0$. При промежуточных расстояниях на кажущееся сопротивление влияет разница в сопротивлениях двух зон, а также неоднородность деформированного состояния среды при $r > r_0$. Деформированное состояние зоны $r > r_0$ влияет на распределение потенциала за счет изменения сопротивления на бесконечности от всестороннего сжатия по формуле (4.12) и за счет искажения конфигурации кривых кажущегося сопротивления в силу неоднородности деформированного состояния, характеризуемого отклонением параметра β от единицы.

Поступила 18 V 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Д а х н о в В. Н. Электрические и магнитные методы исследования скважин. М., «Недра», 1967.
2. Ф о к В. А. Теория каротажа. М.— Л., Гостехтеоретиздат, 1933.
3. Г л у м о в И. Ф., Д о б р ы н и н В. Н. Изменение электрического сопротивления водонасыщенных пород под влиянием горного и пластового давления. Сб. статей «Прикладная геофизика», М., Гостоптехиздат, 1962.
4. М о и с е е н к о У. И., И с т о м и н В. Е., У ш а к о в Г. Д. Влияние одностороннего давления на электрическое сопротивление горных пород. Докл. АН СССР, 1964, т. 154, № 2.
5. П а р х о м е н к о Э. И. Электрические свойства горных пород. М., «Наука», 1965.
6. С е д о в Л. И. Введение в механику сплошной среды. М., Физматгиз, 1962.
7. Т и х о н о в А. Н., С а м а р с к и й А. А. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1966.
8. Г р а д ш т е й н И. С., Р ы ж и к И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.

УДК 624.074.4

К РАСЧЕТУ ТЕРМОУПРУГОГО РАВНОВЕСИЯ ТОРОИДАЛЬНОЙ ОБОЛОЧКИ

С. П. Гавеля, Ю. А. Мельников

(Днепропетровск)

В работах [1,2] предложен алгоритм расчета матриц Грина, который легко распространяется на случай замкнутых оболочек вращения, в частности сферической, тороидальной и других. Использование этих матриц позволяет эффективно определять напряженно-деформированное состояние таких оболочек, вообще говоря, при произвольном их нагружении. С другой стороны, расчет напряженного состояния неравномерно нагретой оболочки обычно приводится к учету так называемых температурных нагрузок довольно сложной структуры. Ниже на некоторых примерах, имеющих важное прикладное значение, исследуется возможность построения алгоритмов такого расчета, основанных на использовании предварительно рассчитанных матриц Грина. Полученные численные результаты позволяют сделать некоторые выводы.

Пусть параметризация рассматриваемой тороидальной поверхности задана уравнениями

$$x = (R + a\cos\varphi)\cos\vartheta, \quad y = (R + a\cos\varphi)\sin\vartheta, \quad z = a\sin\varphi \tag{1}$$

Термоупругое равновесие оболочки, для которой эта поверхность является срединной (как оболочки вращения), можно определить ([3], стр. 98) с помощью системы дифференциальных уравнений вида

$$\left[A^\circ\left(\varphi, \frac{\partial}{\partial\varphi}, \frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{h^2}{12}A^*\left(\varphi, \frac{\partial}{\partial\varphi}, \frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)\right]U(\varphi, \vartheta) = \Theta(\varphi, \vartheta) \tag{2}$$

$$U(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} u(\varphi, \vartheta) \\ v(\varphi, \vartheta) \\ w(\varphi, \vartheta) \end{pmatrix}, \qquad \Theta(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} \Theta_1(\varphi, \vartheta) \\ \Theta_2(\varphi, \vartheta) \\ \Theta_3(\varphi, \vartheta) \end{pmatrix}$$

где $U(\varphi, \vartheta)$ и $\Theta(\varphi, \vartheta)$ — векторы смещений срединной поверхности оболочки и температурной нагрузки соответственно, оператор A° имеет вид

$$A^\circ = (A_{ij}^\circ)_{i,j=1}^3$$

$$A_{11}^\circ = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{1-\nu}{2B^2}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} - \frac{\sin\varphi}{aB}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{(1-\nu)\cos\varphi}{aB} - \frac{a + R\cos\varphi}{aB^2}$$

$$A_{12}^\circ = \frac{1+\nu}{2aB}\frac{\partial^2}{\partial\varphi\,\partial\vartheta} + \frac{(3-\nu)\sin\varphi}{2B^2}\frac{\partial}{\partial\vartheta}$$

$$A_{13}^\circ = \frac{R + (1+\nu)a\cos\varphi}{a^2B}\frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{R\sin\varphi}{aB^2}$$

$$A_{21}^\circ = \frac{1+\nu}{2aB}\frac{\partial^2}{\partial\varphi\,\partial\vartheta} - \frac{(3-\nu)\sin\varphi}{2B^2}\frac{\partial}{\partial\vartheta}$$

$$A_{22}^\circ = \frac{1}{B^2}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} + \frac{1-\nu}{2a^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} - \frac{(1-\nu)\sin\varphi}{2aB}\frac{\partial}{\partial\varphi} + (1-\nu)\frac{(R+B)\cos\varphi - a\sin^2\varphi}{2aB^2}$$

$$A_{23}^\circ = \frac{R + (1+\nu)a\cos\varphi}{aB^2}\frac{\partial}{\partial\vartheta}$$

$$A_{31}^\circ = \frac{R + (1+\nu)a\cos\varphi}{a^2B}\frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{[\nu R + (1+\nu)a\cos\varphi]\sin\varphi}{aB^2}$$

$$A_{32}^\circ = \frac{\nu R + (1+\nu)a\cos\varphi}{aB^2}\frac{\partial}{\partial\vartheta}$$

$$A_{33}^\circ = \frac{B[R + (1+2\nu)a\cos\varphi] + a^2\cos^2\varphi}{a^2B^2} + \frac{h^2}{12}\Delta\left(\frac{B^2 + a^2\cos^2\varphi}{a^2B^2} + \Delta\right)$$

Результаты расчета показывают, что для рассматриваемых далее конкретных случаев учет оператора A^* изменяет температурные нагрузки не более чем на 2%. Поэтому (2) можно приближенно заменить следующей:

$$A^\circ\left(\varphi, \frac{\partial}{\partial\varphi}, \frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)U(\varphi, \vartheta) = \Theta(\varphi, \vartheta) \tag{3}$$

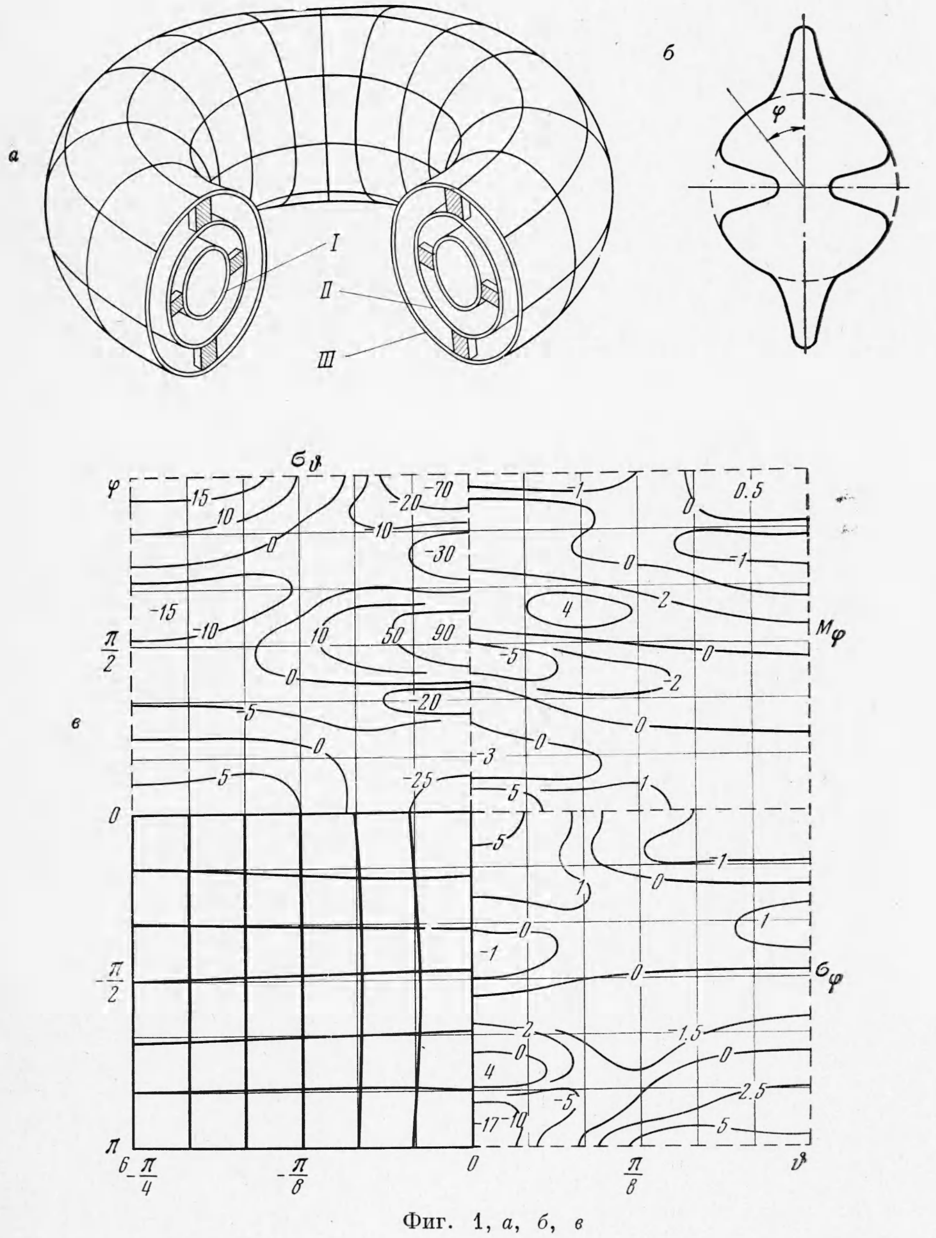
Компоненты вектора $\Theta = (\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3)$ температурной нагрузки определяются формулами

$$\Theta_1 = -\frac{\varkappa Eh}{1-\nu}\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(t_1 + \frac{h}{6a}t_2\right)$$

$$\Theta_2 = -\frac{\varkappa Eh}{1-\nu}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(t_1 + \frac{h\cos\varphi}{6B}t_2\right)$$

$$\Theta_3 = 2\frac{\varkappa Eh}{1-\nu}\left(\frac{R + 2a\cos\varphi}{2aB}t_1 - \frac{h}{12}\Delta t_2\right)$$

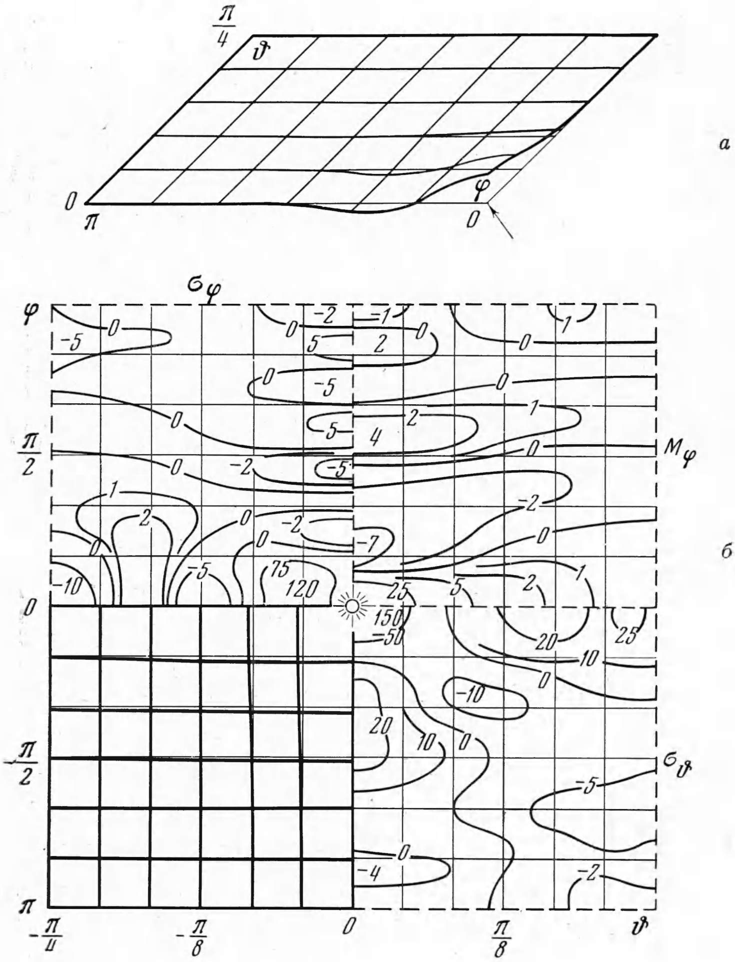
Здесь ν, E и h — коэффициент Пуассона, модуль упругости и толщина оболочки соответственно; a — радиус меридионального сечения оболочки; R — расстояние между центром этого сечения и осью вращения; φ, ϑ — криволинейные координаты сре-



Фиг. 1, *а*, *б*, *в*

динной поверхности; $\varkappa$ — коэффициент линейного расширения материала; t_1 и t_2 — характеристики температурного поля $T = T(\varphi, \vartheta)$, определяющиеся интегралами вдоль нормали к срединной поверхности оболочки

$$t_1 = \frac{1}{h} \int\limits_{-h/2}^{h/2} T d\gamma, \qquad t_2 = \frac{6}{h^2} \int\limits_{-h/2}^{h/2} \gamma T d\gamma$$



Фиг. 2 *а*, *б*

$B = R + a \cos \varphi$; Δ обозначает линейный дифференциальный оператор

$$\Delta = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} - \frac{\sin \varphi}{aB} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

Если известна матрица Грина $G(\varphi, \vartheta; \alpha, \beta)$ системы (3) для рассматриваемой оболочки, то вектор смещений ее срединной поверхности определяется интегралом

$$U(\varphi, \vartheta) = \iint_{\Omega} G(\varphi, \vartheta; \alpha, \beta)\, \theta(\alpha, \beta)\, d_{\alpha,\beta}\Omega \qquad (4)$$

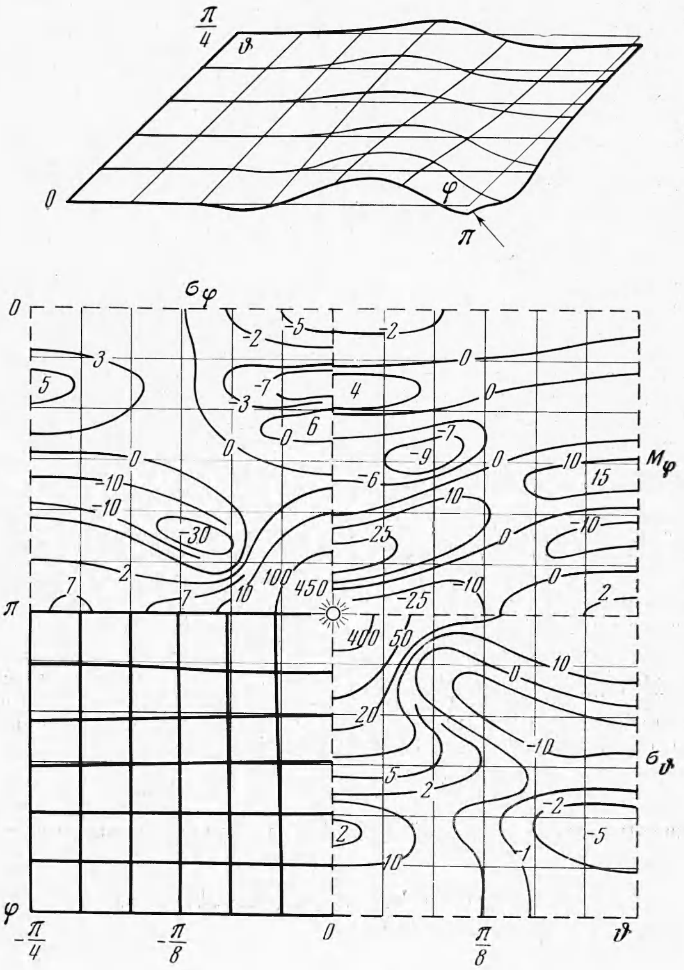
Расчет термоупругого состояния оболочки естественно выполнять по этапам:

1) определение температурного поля оболочки;

2) вычисление температурных нагрузок;

3) расчет напряженно-деформированного состояния оболочки под действием этих нагрузок.

Специфической особенностью температурных нагрузок следует считать их довольно сложный характер. Дело в в том, что на сложность исходных данных накладываются усложнения, возникающие при определении температурных полей, а затем — усложнения геометрического происхождения, проявляющиеся при вычислении температурных нагрузок. Очевидно, что для получения достоверных результатов необходимо учесть хотя бы основные из упомянутых факторов. Возможность достижения этого с помощью предварительно рассчитанных с достаточной точностью матриц Грина иллюстрируем примерами.



Фиг. 2, *в*, *г*,

В технике употребляется конструкция, состоящая из трех замкнутых тонких тороидальных оболочек, соединенных между собой с помощью цилиндрических патрубков или стержней, например, по схеме фиг. 1, *а*. Конструкция находится в среде с температурой T_1, внутри оболочки I поддерживается температура T_0. Таким образом, тепловое состояние оболочки II можно приближенно характеризовать локальным нагревом (охлаждением) в окрестностях некоторых достаточно удаленных одна от другой точек (соответствующих расположению стержней). Поэтому представляет интерес вопрос о влиянии локального нагрева на напряженно-деформированное состояние тороидальной оболочки.

Рассмотрим случай, когда температура оболочки определяется формулой

$$T(\varphi, \vartheta) = T_* \cos^{16} {}^1/_2\varphi \cos^8 2\vartheta \qquad (T_* = \mathrm{const})$$

(это соответствует локальному нагреву в окрестностях четырех равноудаленных точек внешнего экватора оболочки).

Аппроксимация компонент вектора Θ температурной нагрузки полиномами

$$\Theta_1(\varphi, \vartheta) \approx \sum_{k,m=0}^{7} \Theta_1^{km} \sin k\varphi \cos m\vartheta, \qquad \Theta_2(\varphi, \vartheta) \approx \sum_{k,m=0}^{7} \Theta_2^{km} \cos k\varphi \sin m\vartheta \tag{5}$$

$$\Theta_3(\varphi, \vartheta) \approx \sum_{k,m=0}^{7} \Theta_3^{km} \cos k\varphi \cos m\vartheta$$

обеспечивает в данном случае точность, превышающую 97%. Такая малость невязки системы (3) позволяет считать достаточной точность используемой матрицы Грина, полностью учитывающей фигурирующие в разложениях (5) члены (вычислительная погрешность незначительна).

Рассчитанные по формуле (4) характеристики напряженно-деформированного состояния оболочки с параметрами $R = 400$, $a = 100$, $h = 1$, $\nu = 0.25$ изображены на фиг. 2, *а*, *б*. На фрагментах *в* и *г* показаны результаты расчета той же тороидальной оболочки при локальном нагреве в окрестностях четырех равноудаленных точек внутреннего экватора. В верхних частях фиг. 2 изображен прогиб оболочки, стрелками указано место нагрева. Тангенциальное деформирование координатной сетки представлено в левых нижних углах фрагментов *б* и *г*, здесь же линиями уровня изображены нормальные напряжения σ_φ и σ_ϑ, а также изгибающий момент M_φ.

Обращает на себя внимание локализация возмущений в пределах области знакопостоянства гауссовой кривизны срединной поверхности. Это обстоятельство позволяет осуществлять учет локальных воздействий, приложенных одновременно в точках внешнего и внутреннего экваторов, комбинированием рассмотренных случаев.

Убывание возмущений в направлении параллелей по мере удаления от точки приложения сосредоточенного воздействия в области положительной гауссовой кривизны выражено значительно более сильно, чем в области отрицательной кривизны. Это говорит о том, что первая из упомянутых областей тороидальной оболочки обладает большей жесткостью по отношению к рассматриваемым воздействиям, чем вторая.

Случай соединения оболочек по схеме фиг. 1, *а* (сечение $\vartheta = 0$ компоненты Θ_3 (φ, ϑ) температурной нагрезки изображено на фиг. 1, *б*, а компоненты Θ_1 (φ, ϑ), Θ_2 (φ, ϑ) имеют вид, соответствующий этому) также легко рассчитывается этим способом. Некоторые результаты такого расчета для тороидальной оболочки с прежними значениями параметров показаны на фиг. 1, *в*.

Интересен тот факт, что максимально напряженными оказываются окрестности «охлаждающих» стержней, и напряжения σ_ϑ значительно превышают σ_φ.

Рассмотрим далее вопрос об использовании аналогичной методики для учета температурных полей, изменяющихся более плавно. Пусть, например, в среде с температурой $T = T_* x^2$ ($T_* = \text{const}$) находится тороидальная оболочка радиуса $R = 200$ и такими же значениями остальных параметров, как и выше. Стационарное температурное поле оболочки, очевидно, определяется формулой

$$T(\varphi, \vartheta) = T_* (R + a \cos \varphi)^2 \cos^2 \vartheta$$

Компоненты вектора смещений срединной поверхности в этом случае имеют вид

$$u(\varphi, \vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty} (u_{k0} + u_{k2} \cos 2\vartheta) \sin k\varphi$$

$$v(\varphi, \vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty} v_{k2} \sin 2\vartheta \cos k\varphi$$

$$w(\varphi, \vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty} (w_{k0} + w_{k2} \cos 2\vartheta) \cos k\varphi$$

K	u_{k0}	u_{k2}	v_{k2}	w_{k0}	w_{k2}
0	0.00000	0.00000	—0.02560	0.00351	0.00274
1	—0.02898	—0.04245	—0.06262	0.02953	0.05439
2	—0.01887	—0.10094	0.06936	0.03799	0.19534
3	—0.00331	—0.06309	—0.02925	0.00969	—0.18607
4	0.00309	—0.00435	0.00493	—0.01237	0.01756
5	0.00085	—0.01354	0.00234	—0.00400	0.06725
6	—0.00084	0.00252	—0.00141	0.00519	—0.01602
7	—0.00011	0.00238	0.00017	0.00060	—0.00161

Значения коэффициентов u_{km}, v_{km}, w_{km} приведены в таблице. Не усложняя изложения, отметим лишь, что быстрое убывание модулей коэффициентов Фурье смещений убеждает в достижении приемлемой точности при расчете характеристик напряженного состояния оболочки.

Легко заметить принципиальную возможность распространения изложенных расчетных схем на все оболочки, для которых матрицы Грина могут быть предварительно рассчитаны согласно [1, 2].

Поступила 1 VI 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Г а в е л я С. П. Про один спосіб побудови матриць Гріна для зчленованих оболонок. Доп. АН УРСР, Сер. А, 1969, № 12.
2. Г а в е л я С. П. Про напружений стан пологих оболонок при концентрованих навантаженнях. Доп. АН УРСР, Сер. А, 1968, № 4.
3. П і д с т р и г а ч Я. С., Я р е м а С. Я. Температурні напруження в оболонках. Київ, Вид-во АН УРСР, 1961.

УДК 624.041+043

ПРОЕКТИРОВАНИЕ АНИЗОТРОПНЫХ КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН С ПРИМЕНЕНИЕМ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

Г. И. Брызгалин

(Волгоград)

Рассматриваются две задачи оптимального проектирования концентрических кольцевых пластин из анизотропного композитного материала, нагруженных равномерным давлением p по внутреннему либо внешнему контуру. С помощью процедуры построения рациональных проектов [1, 2] записаны решения, не являющиеся оптимальными, которые затем улучшаются численно.

Материал считается состоящим из связующего, армированного тонкими высокопрочными волокнами; при составлении основных уравнений он рассматривается как сплошная анизотропная среда. Волокна ориентированы в радиальном (1) и окружном (2) направлениях. Объемные интенсивности армирования обозначены s_1, s_2 — это неотрицательные величины, сумма которых не должна превышать некоторого значения s^*, определяемого из технологических соображений.

Принимается, что радиальное σ_1 и окружное σ_2 напряжения связаны с соответствующими деформациями ε_1, ε_2 и интенсивностями армирования линейной зависимостью

$$\sigma_i = Es_i\varepsilon_i \qquad (i = 1, 2) \tag{1}$$

где E — постоянная материала.

Деформации считаются ограниченными некоторой предельной величиной ε^*.

При радиусах пластины a, b $(a < b)$ и постоянной толщине H объем арматуры записывается в виде

$$V = 2\pi H \int_a^b (s_1 + s_2)\, r\, dr \tag{2}$$

Чтобы решения были пригодны для материалов с любыми значениями постоянных E, s^*, ε^*, вводятся безразмерные величины

$$e_i = \varepsilon_i / \varepsilon^*, \quad \zeta_i = s_i / 2s^*, \quad \tau_i = \sigma_i / 2Es^*\varepsilon^*$$
$$q = p / 2Es^*\varepsilon^*, \qquad W = V / \pi Ha^2 s^* \tag{3}$$

за которыми сохраняются те же названия, что и для соответствующих размерных.

Переменные e_i, τ_i, ζ_i являются функциями безразмерного радиуса $\rho = r/a$.

Согласно закону (1) интенсивности армирования можно выразить через напряжения и деформации $\zeta_i = \tau_i/e_i$. Основные величины τ_1, τ_2, e_1, e_2 удовлетворяют условиям равновесия и совместности

$$\tau_2 = \rho d\tau_1/d\rho + \tau_1, \qquad e_1 = \rho de_2/d\rho + e_2 \tag{4}$$