НЕСТАЦИОНАРНЫЙ РАДИАЦИОННО-КОНДУКТИВНЫЙ ПЕРЕНОС ТЕПЛА В ПЛОСКОМ СЛОЕ СЕРОЙ ПОГЛОЩАЮЩЕЙ СРЕДЫ

А. Л. Бурка, Н. А. Рубцов

(Новосибирск)

Рассматривается кинетика прогрева плоского слоя серой поглощающей среды за счет радиационно-кондуктивного переноса тепла.

Нестационарное уравнение энергии сводится с помощью функции Грина к нелинейному интегральному уравнению, которое решается численно методом Ньютона. Результаты решения представлены в виде температурных полей в слое применительно к различным значениям определяющих параметров (оптическая толщина, критерий радиационно-кондуктивного теплообмена, критерий теплообмена на границах).

Процесс нагрева полупрозрачных неподвижных сред обусловлен двумя изменяющимися во времени механизмами переноса тепла: молекулярной теплопроводностью и тепловым излучением.

Для широкого класса умеренных и быстропротекающих процессов перенос тепла излучением слабо зависит от времени. В связи с этим в уравнении энергии радиационного теплообмена членом, выражающим скорость изменения объемной плотности радиационной энергии, в силу его малости можно пренебречь. С учетом этого ограничения нестационарное уравнение энергии радиационно-кондуктивного теплообмена записывается в следующем виде:

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) - \operatorname{div} \mathbf{E} = c\rho \frac{\partial T}{\partial t} \tag{1}$$

Здесь E — вектор потока излучения. Остальные обозначения общеизвестны.

Постановки задач, использующие уравнение энергии (1), вытекают из практических потребностей современной технической оптики, связанных с выяснением кинетики прогрева (охлаждения) полупрозрачных теплопроводных тел (стекломасс, кристаллов и т. п.) за счет тепловой радиации [1–3]. В то же время строгие решения такого рода задач практически отсутствуют.

В данной работе в одномерном случае численно решается краевая задача для уравнения энергии (1), когда div**E** имеет два представления — интегральное и приближение радиационной теплопроводности.

Интегральное представление для div**E** [4] может быть записано в следующем виде:

$$\frac{d\Phi}{d\xi} = 2h\left[2\theta^4(\xi,\tau) - W_{1,h}(\xi) - \int_0^1 W_{z,h}(\xi,z)\,\theta^4(z,\tau)\,dz\right] \tag{2}$$

$$W_{1,h}(\xi) = \alpha\,[(a_1\theta_1^4 + 2a_2r_1\theta_2^4K_3(h))\,K_2(q) + (a_2\theta_2^4 + 2a_1r_2\theta_1^4K_3(h))\,K_2(h-q)]$$

$$W_{z,h}(\xi,z) = h\,\{K_1\,|q-p| + 2\alpha\,[r_1(K_2(p) + 2r_2K_3(h)\,K_2(h-p))\,K_2(q) + r_2(K_2(h-p) + 2r_1K_3(h)\,K_2(p)\,K_2(h-q))]\}$$

$$\alpha = \frac{1}{1 - 4r_1r_2K_3^2(h)}; \quad K_j(\xi) = \int_0^1 \nu^{j-2} \exp\frac{q}{\nu}\,d\nu, \quad p = hz, \; q = h\xi$$

В приближении радиационной теплопроводности div **E** имеет вид

$$\frac{d\Phi}{\partial \xi^2} = -\frac{d}{d\xi}\left(\frac{4}{3h}\,\theta^3\,\frac{d\theta}{d\xi}\right) \tag{3}$$

$$\left(\Phi = \frac{E}{\sigma_0 n^2 T_*^4}, \; \theta = \frac{T}{T_*}, \; h = \varkappa\delta, \; \theta_i = \left(\frac{E_i^*}{\sigma_0 n^2 T_*^4}\right)^{1/4}\right)$$

Здесь θ, T_*, σ_0, $\varkappa$, θ_i, E_i^*, a_i, r_i, k_j, h, ξ, τ — соответственно искомая безразмерная температура среды, характерная температура среды, постоянная Стефана — Больцмана, коэффициент поглощения излучения, эквивалентные значения температуры границ, полусферические плотности потоков излучения, падающего на соответствующие поверхности слоя, поглощательные и отражательные способности соответствующих поверхностей слоя, экспоненциальные интегралы, оптическая толщина слоя, безразмерные координата и время ($i = 1, 2$; $j = 1, 2, 3$). Физические и оптические свойства среды предполагаются независящими от температуры ($n = 1$).

Математическая формулировка краевой задачи для одномерного нестационарного уравнения энергии в случае теплопроводной среды с учетом (3) записывается в следующей безразмерной форме:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2} - S\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} = \frac{\partial\theta}{\partial\tau}, \qquad 0 \leqslant \xi \leqslant 1, \quad \tau > 0 \tag{4}$$

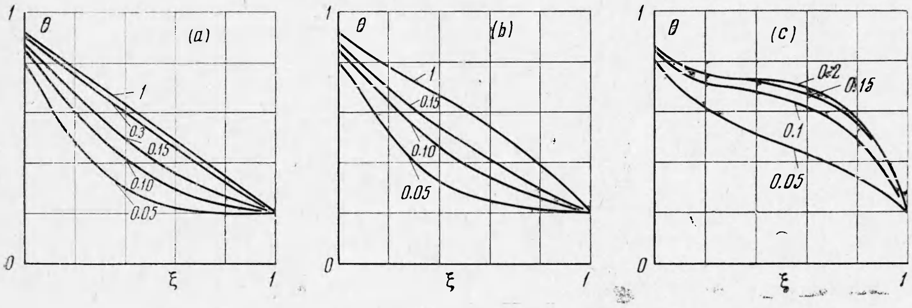
$$\alpha_1\frac{\partial\theta}{\partial\xi} - \beta_1(\theta - v_1) = 0, \qquad \xi = 0, \quad \tau > 0 \tag{5}$$

$$\alpha_2\frac{\partial\theta}{\partial\xi} + \beta_2(\theta - v_2) = 0, \qquad \xi = 1, \quad \tau > 0 \tag{6}$$

$$\theta(\xi, 0) = \theta_0, \qquad 0 \leqslant \xi \leqslant 1 \tag{7}$$

$$\left(S = \frac{\sigma_0 T_*^3}{\lambda}\delta, \quad \tau = \frac{at}{\delta^2}, \quad \frac{\beta_i}{\alpha_i} = \frac{\alpha_i\delta}{\lambda} = B\right)$$

Здесь v_i — внешние температуры среды, θ_0 — начальная температура слоя, S — критерий Старка, α_i, β_i — некоторые положительные постоянные, одновременно не обращающиеся в нуль, B — критерий Био ($i = 1, 2$).



Фиг. 1

Рассмотрим прогрев (охлаждение) плоского слоя серой теплопроводной среды, подвергнутой внешнему воздействию диффузно излучающих, а также конвективных потоков тепла. При этом будем предполагать, что темп прогрева и соответствующие значения температурных перепадов не настолько велики, чтобы следовало вводить зависимость коэффициентов поглощения излучения $\varkappa$, а также теплопроводности λ от температуры.

В качестве определяющей температуры принимаем значение температуры внешнего, диффузно излучающего, источника.

Согласно (2), $d\Phi / d\xi$ представляет собой нелинейное относительно θ интегральное выражение, поэтому уравнение (4) становится нелинейным интегро-дифференциальным. Это обстоятельство не позволяет получить решение краевой задачи (4) — (7) в аналитически замкнутом виде. С помощью функции Грина сведем краевую задачу (4) — (7) к функциональному уравнению (к которому, как будет показано ниже, удобно применить итерационные методы для его численной реализации)

$$\theta(\xi, \tau) = \frac{1}{\Delta}\{\beta_1 v_1[\alpha_2 \operatorname{ch}(1-\xi) + \beta_2 \operatorname{sh}(1-\xi)] + \\ + \beta_2 v_2[\alpha_1 \operatorname{ch}\xi + \beta_1 \operatorname{sh}\xi]\} + \int_0^1 G(\xi, z) F(\theta, z, \tau)\, dz \tag{8}$$

Здесь

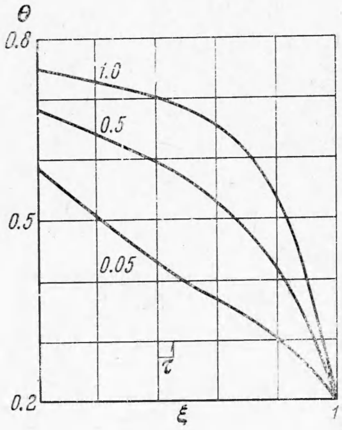
$$G(\xi, z) = \begin{cases} (\alpha_1 \operatorname{ch} z + \beta_1 \operatorname{sh} z)[\alpha_2 \operatorname{ch}(1-\xi) + \beta_2 \operatorname{sh}(1-\xi)] / \Delta, & z \leqslant \xi \\ (\alpha_1 \operatorname{ch}\xi + \beta_1 \operatorname{sh}\xi)[\alpha_2 \operatorname{ch}(1-z) + \beta_2 \operatorname{sh}(1-z)] / \Delta, & z > \xi \end{cases}$$

$$\Delta = -[(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)\operatorname{ch}1 + (\alpha_1\beta_2 + \beta_1\beta_2)\operatorname{sh}1]$$

Для численного решения уравнения (8) его арифметизация проводится в следующей последовательности. Производная по времени аппроксимируется конечно-разностным оператором. Затем для каждого момента времени τ интеграл аппроксимируется квадратурной формулой Гаусса. Тем самым уравнение (8) сводится к системе нелинейных алгебраических уравнений. К такой системе, для ее численного решения, применяется итерационный метод Ньютона [5].

Результаты решения, представленные на фиг. 1—3, отображают кинетику прогрева серой теплопроводной среды, когда одна из поверхностей слоя ($\xi = 0$) обогревается конвективным потоком с температурой внешней среды $v_1 = 1, B_1 = 10$, $\theta_1 = 1$, а другая поверхность слоя ($\xi = 1$) поддерживается при температуре $v_2 = 0.2$ ($a_1 = 0.2$, $a_2 = 0.8$, $r_1 = 0.8$, $r_2 = 0.2$). На фиг. 1, *а* при $\theta_0 = 0.2$, $S = 0.25$, $h = 1$ для различных значений времени τ представлено температурное распределение в слое.

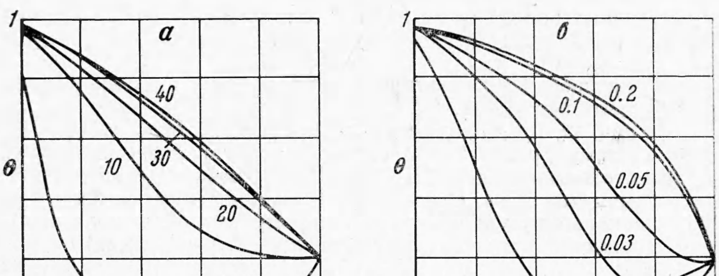
Характерно, что при выходе на стационарный режим ($\tau = 1$) температурная кривая имеет линейный характер, как и в случае чистой теплопроводности. Это обстоятельство объясняется тем, что при $S = 0.25$ доля радиационного переноса тепла еще незначительна.



Фиг. 2

На фиг. 1, *в* представлена картина температурного поля при тех же условиях, что и на фиг. 1, *а*, с той лишь разницей, что $S = 2.5$. Как видно из графика, при переходе к стационарному режиму температурные кривые меняют свой характер, приобретая выпуклую форму. Это обстоятельство указывает на более интенсивный характер нагрева за счет радиационной составляющей в суммарном переносе тепла.

На фиг. 1, *с* при $S = 25.0$ ($\theta_0 = 0$, $v_2 = 0$) наблюдается явно выраженный характер деформирования температурных профилей по сравнению с предыдущими. Этот факт обусловлен преобладающей ролью излучения по сравнению с молекулярным переносом тепла. По мере увеличения доли радиационной составляющей в общем переносе тепла время выхода системы на стационарный режим сокращается. Особенно заметно это проявляется в области границы, примыкающей к источнику нагрева. При снижении интенсивности подвода тепла снижается не только общий уровень температур, но также и темп прогрева (фиг. 2, где $B_1 = 5$ вместо использованного ранее $B_1 = 10$). Следует сказать несколько слов о характере сходимости итерационного процесса, который использовался при решении уравнения (8). Процесс быстро сходится при $0 \leqslant h \leqslant h_{\max}$, $S \leqslant 1$. Начиная с некоторого значения $h \geqslant h_{\max}$ и $S > 1$, сходимость процесса резко ухудшается. При этом температурные профили, начиная с некоторого момента времени τ, становятся неустойчивыми. Устранение этих особенностей связано с увеличением числа гауссовых точек, что влечет за собой увеличение порядка системы уравнений и, как следствие, резкое увеличение затрачиваемого машинного времени.



Фиг. 3

Если оптическая толщина слоя достаточно велика, то уравнение энергии (1) можно записать с учетом приближенного представления (3) для вектора потока излучения

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2} + \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{16}{3h} S\theta^3 \frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right) = \frac{\partial\theta}{\partial\tau}, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant 1, \quad \tau > 0 \tag{9}$$

Практический интерес представляет решение уравнения (9) со следующими граничными условиями:

$$\frac{\partial\theta}{\partial\xi} = S\,[\theta^4(\xi, \tau) - 1], \qquad \xi = 0 \tag{10}$$

$$\theta(\xi, \tau) = \theta_1, \ \xi = 1; \quad \theta(\xi, \tau) = \theta_0, \quad \tau = 0 \tag{11}$$

Краевая задача (10), (11) сводится с помощью функции Грина к функциональному уравнению

$$F(\theta) = 0 \tag{12}$$

Здесь

$$F(\theta) = \left[\theta_1 - \theta(\xi, \tau) + \int_0^1 G(\xi, z) \frac{\partial\theta}{\partial\tau} dz\right] + S\left\{(1-\xi)\left[1 - \theta^4(0, \tau)\right] \times \right.$$

$$\left. \times \left[1 + \frac{16}{3h} S\theta^3(0, \tau)\right] + \frac{4}{3h}\left[\theta_1^4 - \theta^4(\xi, \tau)\right]\right\}, \quad G(\xi, z) = \begin{cases} (\xi - 1), & z \leqslant \xi \\ (z - 1), & z \geqslant \xi \end{cases}$$

Функциональное уравнение (12) содержит две неизвестные функции $\theta(\xi, \tau)$ и $\theta(0, \tau)$. Полагая $\xi = 0$, получаем из (12) еще одно уравнение, которое замыкает систему. Таким образом, исходная краевая задача (10), (11) свелась к системе их двух функциональных уравнений

$$F[\theta(\xi, \tau), \theta(0, \tau)] = 0, \quad F_1[\theta(\xi, \tau), \theta(0, \tau)] = 0 \tag{13}$$

Как и раньше, путем арифметизации сводим (13) к системе из $(m+1)$ нелинейных алгебраических уравнений, к которой для численного решения применяется итерационный метод Ньютона.

Ниже представлены некоторые результаты численного решения системы (13) применительно к условиям $\theta_0 = 0$, $\theta_1 = 1$, $S = 10$ при различных значениях h.

На фиг. 3*а*, и *в* представлены результаты расчета в случяе, когда $h = 40$, $h = 4$. Здесь отчетливо проявляется роль оптической толщины в формировании температурного поля в условиях закрепленного параметра S, характеризующего радиационно-кондуктивное соотношение в суммарном потоке тепла.

Это находит отражение в характере температурных профилей по всему слою, включая и весьма характерные скачки температуры во времени на границе. Как видно, при увеличении h темп прогрева всего слоя существенно понижается.

Поступила 25 V 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Lick W. Transient energy transfer by radiation and conduction. Internat. J. Heat and Mass Trans., 1965, vol. 8, No. 1.
2. Хромов А. В., Либин Ю. В. Плотность источников тепла и температурное поле в кристалле рубинового ОКГ. Инж.- физ. ж., 1966, т. 11, № 4.
3. Fowle A. A., Strong P. F., Comstock D. F., Sox C. Computer program to predict heat transfer through glass. AIAA Journal, 1969, vol. 7, No. 3.
4. Рубцов Н. А. К переносу теплового излучения в плоском слое поглощающей среды. ПМТФ, 1965, № 5.
5. Канторович Л. В. О методе Ньютона. Тр. матем. ин-та АН СССР, 1949, т. 28.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЯЗКОСТИ ЦЕЗИЯ, НАТРИЯ И КАЛИЯ ВБЛИЗИ ТЕМПЕРАТУРЫ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ

В. Н. Генрих, А. Б. Каплун

(Новосибирск)

При помощи вибрационного вискозиметра исследована вязкость чистого и технического цезия до 200° С и влияние кислорода на вязкость цезия. Растворенный кислород значительно увеличивает вязкость расплава, и вблизи температуры затвердевания вызывает резкое уменьшение амплитуды колебаний погруженной в расплав пластины за счет выпадения окислов на ее поверхность. Исследована вязкость натрия от 400° С до затвердевания и калия от 250° С до затвердевания. В исследуемых металлах, очищенных от газовых примесей вакуумной дистилляцией, аномалий температурного хода вязкости не обнаружено.

Наличие аномалий температурного хода и гистерезисов вязкости вблизи температуры затвердевания может свидетельствовать о структурных перестройках в жидкости и о так называемых явлениях «предкристаллизации» и «послеплавления».