

РЕШЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЕКТРОНОВ  
НА ЭВМ

Э. Б. Сонин

(Ленинград)

Излагается физическая и математическая постановка задачи при исследовании слабоионизированной плазмы в термоэлектронных преобразователях. Для численного решения применяется электронно-вычислительная машина. Использовано кинетическое уравнение Больцмана с граничными условиями. Функция распределения электронов разлагается в ряд, для коэффициентов которого выводятся уравнения моментов. Электрическое поле учитывается в приближении квазинейтральности. Приводится пример расчета при учете только электрон-атомных столкновений.

Пусть между двумя неограниченными плоскими электродами (катодом и анодом), нагретыми до разных температур, имеется слабоионизированная плазма и приложена разность потенциалов. С электродов в объем плазмы поступают потоки ионов и электронов. В объеме, кроме того, могут иметь место ионизация и рекомбинация. Нужно определить ток, распределение потенциалов, температур, плотностей зарядов и возбужденных атомов и другие количественные характеристики происходящих в плазме процессов. Такая задача возникает при исследовании цезиевых термоэлектронных преобразователей в дуговом режиме. Если объемной ионизацией можно пренебречь, то происходящие процессы хорошо описываются диффузионной теорией, изложенной в работе Мойжеса и Пикуса [1]. Когда объемные неупругие процессы (ионизация, возбуждение, рекомбинация) становятся существенными, то желательно иметь более полные сведения о функции распределения электронов и перейти от диффузионной теории к кинетическому уравнению Больцмана. Однако при этом резко возрастают вычислительные трудности. Излагаемая в данной работе постановка задачи предполагает использование электронно-вычислительных машин.

В основе способ решения кинетического уравнения сводится к следующему. Функция распределения электронов в кинетическом уравнении заменяется рядом по некоторой полной системе функций от скоростных координат. Имеется другая система независимых функций; умножая их на обе части кинетического уравнения и интегрируя по пространству скоростей, получаем дифференциальные уравнения первого порядка относительно пространственных координат для параметров ряда функции распределения. Это — уравнения баланса или уравнения моментов относительно упомянутой системы независимых функций (обычно — это полиномы от координат скорости).

Выберем из этой системы подсистему функций, умножим их на граничные условия к кинетическому уравнению и проинтегрируем по области их задания (т. е. по скорости электронов, летящих от электрода). Получим граничные условия для дифференциальных уравнений моментов.

Разновидностями такого метода будет метод Града [2] и Вейтца [9] в газодинамике, метод сферических гармоник [4-5] в нейтронной физике. Обзор их дан в работе [6]. Метод разложения электронной функции распределения в данной статье отличается от метода Града тем, что здесь используются функции от энергии и сферических углов в пространстве скоростей, вместо функций от декартовых координат скорости у Града. Кроме того, функция нулевого приближения выбрана изотропной по скоростям  $\exp(-mv^2/2kT)$  вместо неизотропной  $\exp[-m(\mathbf{v}-\mathbf{v}_0)/2kT]$  у Града ( $m$  — масса электрона,  $T$  — температура,  $k$  — постоянная Больцмана,  $\mathbf{v}$  — скорость частицы,  $\mathbf{v}_0$  — средняя скорость частицы). Эти отличия вызваны следующим. Для электронов слабоионизированной плазмы, ввиду частых столкновений с нейтральными атомами, характерна более быстрая релаксация по импульсам, чем по энергиям [7], и функция распределения слабо отличается от изотропной. С другой стороны, для неупругих процессов ионизации и возбуждения, исследование которых является главной целью данной работы, наиболее существенным является распределение электронов по энергиям, независимо от ориентации вектора импульса. Поэтому при разложении по сферической координате  $\mu = v_x/v$  можно ограничиться первыми двумя членами ( $P_1$  — приближение в методе сферических гармоник).

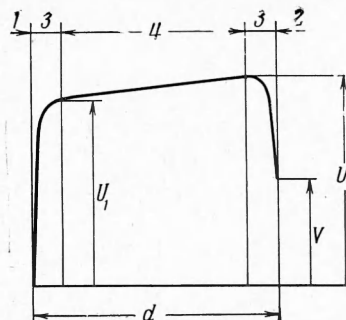
В плазме приходится также учитывать электрическое поле, зависящее от объемного заряда.

Пусть  $d$  — расстояние между катодом и анодом,  $V$  — разность потенциалов,  $r$  — дебаевский радиус,  $n_+$  и  $n_-$  — концентрации ионов и электронов,  $T$  — температура,  $k$  — постоянная Больцмана,  $q$  — заряд электрона. Как и в работе [1], рассмотрим случай, когда основное изменение электрического потенциала  $U$  происходит в приэлектродных областях объемного заряда у катода и анода с размерами порядка  $r$ , а в остальной области выполняется условие квазинейтральности  $|n_+ - n_-| \ll n_+$  (фиг. 1). Для этого необходимо

$$V \ll 4\pi n_+ q d^2, \quad \text{или} \quad \frac{qV}{kT} \ll \left(\frac{d}{r}\right)^2 \quad (0.1)$$

Размер областей объемного заряда меньше, чем длина свободного пробега для любого из объемных процессов, вследствие чего рассеяние в этих областях не происходит, а наличие их учитывается введением потенциальных барьеров  $U_1$  у катода и  $U_2 - V$  у анода. Оба физических условия выполняются при достаточно малом  $r$ .

Предполагается также, что в областях объемного заряда потенциал изменяется монотонно, как показано на фиг. 1, где 1 — катод, 2 — анод, 3 — области объемных зарядов, 4 — квазинейтральная плазма.



Фиг. 1

§ 1. Уравнения моментов и граничные условия. Исходное интегро-дифференциальное уравнение Больцмана имеет вид

$$\frac{\partial f(v, x)}{\partial t} + v_x \frac{\partial f(v, x)}{\partial x} + \frac{qF(x)}{m} \frac{\partial f(v, x)}{\partial v_x} = K(f) \quad (1.1)$$

Здесь  $f(v, x)$  — функция распределения электронов,  $v$  — скорость электрона в точке  $x$  в момент времени  $t$ ,  $m$  — масса электрона,  $F = -dU/dx$  — электрическое поле для электрона,  $q$  — заряд электрона,  $K(f)$  — столкновительный член, учитывающий различные упругие и неупругие процессы и выражающийся через интегралы по скоростным переменным. Граничные условия

катод ( $x = 0$ )

$$a) v_x f(0, v_x, v_y, v_z) = v_x f_k(\sqrt{v_x^2 - 2qU_1/m}, v_y, v_z) \quad (1.2)$$

для  $v_x \geq \sqrt{2qU_1/m}$ , если  $U_1 \geq 0$      $v_x \geq 0$ , если  $U_1 \leq 0$

$$б) v_x f(0, v_x, v_y, v_z) = v_x f(0, -v_x, v_y, v_z)$$

для  $\sqrt{2qU_1/m} > v_x \geq 0$ , если  $U_1 \geq 0$

анод ( $x = d$ )

$$(1.3)$$

$$a) v_x f(d, v_x, v_y, v_z) = v_x f_a(\sqrt{v_x^2 - 2q(U_2 - V)/m}, v_y, v_z)$$

для  $v_x \leq -\sqrt{2q(U_2 - V)/m}$ , если  $U_2 - V \geq 0$ ;     $v_x \leq 0$ , если  $U_2 - V \leq 0$

$$б) v_x f(d, v_x, v_y, v_z) = v_x f(d, -v_x, v_y, v_z)$$

для  $-\sqrt{2q(U_2 - V)/m} < v_x \leq 0$ , если  $U_2 - V \geq 0$

Здесь  $f_k(v_x, v_y, v_z)$ ,  $f_a(v_x, v_y, v_z)$  — функции распределения электронов, эмиттируемых с катода и анода, которые будем считать максвелловскими

$$f_k(v_x, v_y, v_z) = N_k \left(\frac{m}{2\pi k T_k}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k T_k}\right) \quad (1.4)$$

$$f_a(v_x, v_y, v_z) = N_a \left(\frac{m}{2\pi k T_a}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k T_a}\right)$$

Здесь  $T_k$  и  $T_a$  — температура катода и анода. В уравнениях (1.1)—(1.3) перейдем к следующим переменным:

$$\varepsilon = \frac{mv^2}{2}, \quad \mu = \frac{v_x}{v}, \quad \varphi = \arctg \frac{v_y}{v_z} \quad (1.5)$$

При этом зависимость от  $\varphi$  вследствие осевой симметрии задачи в пространстве скоростей выпадает. Вместо (1.1) будем иметь

$$\frac{\partial f(\varepsilon, \mu)}{\partial t} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m}} \left[ \mu \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial f(\varepsilon, \mu)}{\partial x} + qF \left( \mu \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial f(\varepsilon, \mu)}{\partial \varepsilon} + \frac{(1-\mu^2)}{2\sqrt{\varepsilon}} \frac{\partial f(\varepsilon, \mu)}{\partial \mu} \right) \right] = K(f) \quad (1.6)$$

Разложим функцию распределения в ряд по  $\mu$

$$f(\varepsilon, \mu) = f_0(\varepsilon) + \mu f_1(\varepsilon) + \dots \quad (1.7)$$

Уравнения для коэффициентов ряда (1.7) получаются после подстановки (1.7) в (1.6), умножения на  $\mu^i$  ( $i = 0, 1, \dots, m$ ), где  $m$  — число членов ряда в (1.7), и интегрированием по  $\mu$  от  $-1$  до  $+1$ .

Граничные условия к ним получаются после домножения граничных условий (1.2) на катоде и (1.3) на аноде на четные степени  $\mu^i$  ( $i = 0, 2, \dots, m-2$ ;  $m$  выбираем четным) и интегрирования по  $\mu$  от  $0$  до  $1$  — на катоде и от  $-1$  до  $0$  — на аноде. Полученные уравнения, если выкинуть поле в объеме и барьеры на границах, эквивалентны уравнениям метода сферических гармоник [4,5].

В дальнейшем будем ограничиваться всегда двумя членами разложения в (1.7) ( $P_1$  — приближение метода сферических гармоник). Уравнения для  $f_0(\varepsilon)$  и  $f_1(\varepsilon)$  в таком случае будут иметь вид (производную по времени опускаем — нас интересует стационарная задача)

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m}} \left[ \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial f_1(\varepsilon)}{\partial x} + qF \left( \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial f_1(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \frac{f_1(\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \right] &= \int_{-1}^1 K(f) d\mu \\ \frac{2}{3} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m}} \left[ \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial f_0(\varepsilon)}{\partial x} + qF \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial f_0(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right] &= \int_{-1}^1 K(f) \mu d\mu \end{aligned} \quad (1.8)$$

Граничные условия:

катод

$$\begin{aligned} &({}^{1/2}f_0(\varepsilon) + {}^{1/3}f_1(\varepsilon)) = \\ &= \begin{cases} [{}^{1/2}f_0(\varepsilon) \varepsilon^{-1}qU_1 - {}^{1/3}f_1(\varepsilon) (\varepsilon^{-1}qU_1)^{3/2} + {}^{1/2}f_k(\varepsilon - qU_1) (1 - \varepsilon^{-1}qU_1)] & \text{при } \varepsilon \geq qU_1 \geq 0 \\ [{}^{1/2}f_0(\varepsilon) - {}^{1/3}f_1(\varepsilon)] & \text{при } 0 \leq \varepsilon < qU_1 \\ {}^{1/2}f_k(\varepsilon - qU_1) & \text{при } qU_1 \leq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.9)$$

анод

$$\begin{aligned} &({}^{1/2}f_0(\varepsilon) - {}^{1/3}f_1(\varepsilon)) = \\ &= \begin{cases} [{}^{1/2}f_0(\varepsilon) \varepsilon^{-1}q(U_2 - V) + {}^{1/3}f_1(\varepsilon) (\varepsilon^{-1}q(U_2 - V))^{3/2} + {}^{1/2}f_a(\varepsilon - q(U_2 - V)) \times \\ \quad \times [1 - \varepsilon^{-1}q(U_2 - V)]] & \text{при } \varepsilon \geq q(U_2 - V), q(U_2 - V) \geq 0 \\ [{}^{1/2}f_0(\varepsilon) + {}^{1/3}f_1(\varepsilon)] & \text{при } 0 \leq \varepsilon < q(U_2 - V) \\ {}^{1/2}f_a(\varepsilon - q(U_2 - V)) & \text{при } q(U_2 - V) \leq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Здесь учтено, что  $f_k$  и  $f_a$  не зависят от  $\mu$ . Разложим  $f_0(\varepsilon)$  и  $f_1(\varepsilon)$  по функциям от энергии

$$f_0(\varepsilon) = \left( \frac{m}{2\pi kT_0} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT_0}\right) \sum_{i=0}^n A_i(x) L_i\left(\frac{\varepsilon}{kT_0}\right) \quad (1.11)$$

$$f_1(\varepsilon) = \left(\frac{m}{2\pi kT_0}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT_0}\right) \sum_{i=0}^n B_i(x) L_i\left(\frac{\varepsilon}{kT_0}\right) \quad (1.12)$$

(Вычисления с сохранением  $n + 1$  членов ряда в (1.11) и (1.12) назовем  $n$ -приближением.)

Функции  $L_i(\varepsilon / kT_0)$  будут полиномами порядка  $i$ .

Величина  $T_0$ , которую назовем параметром разложения, может зависеть от  $x$ .

Подставляем (1.11) и (1.12) в уравнения (1.8) и граничные условия (1.9) и (1.10). Далее умножаем уравнения (1.8) на функции

$$\frac{3\pi^{3/2}}{m(kT_0)^{1/2}} \varepsilon \left(\frac{2}{m}\right)^{1/2} \left(\frac{\varepsilon}{kT_0}\right)$$

а уравнения (1.9) и (1.10) — на

$$\frac{4\sqrt{2}\pi^{3/2}}{m^{1/2}(kT_0)^{1/2}} \varepsilon L_i\left(\frac{\varepsilon}{kT_0}\right)$$

и интегрируем по  $d\varepsilon$  от 0 до  $\infty$ . В результате получим 2 ( $n + 1$ ) дифференциальных уравнения первого порядка для  $A_i(x)$  и  $B_i(x)$  и по  $n + 1$  граничных условия на катоде и аноде. Уравнения будут иметь следующий вид:

$$\sum_{j=0}^n K_{ij} \frac{dB_j(x)}{dx} + \left(-\frac{qF}{kT_0} N_{ij} + \frac{d \ln T_0}{dx} S_{ij}\right) B_j(x) = J_a^i(A, B) \quad (1.13)$$

$$\sum_{j=0}^n K_{ij} \frac{dA_j(x)}{dx} + \left(-\frac{qF}{kT_0} M_{ij} + \frac{d \ln T_0}{dx} S_{ij}\right) A_j(x) = J_b^i(A, B) \quad (i=0, 1, \dots, n) \quad (1.14)$$

$$K_{ij} = \int_0^{\infty} e^{-x} L_i(x) L_j(x) x dx$$

$$M_{ij} = \int_0^{\infty} e^{-x} (L_j(x) - L_j'(x)) L_i(x) x dx$$

$$N_{ij} = \int_0^{\infty} e^{-x} [(L_j(x) - L_j'(x)) x - L_j(x)] L_i(x) dx$$

$$S_{ij} = \int_0^{\infty} e^{-x} \left[ x^2 (L_j(x) - L_j'(x)) - \frac{3}{2} L_j(x) x \right] L_i(x) dx$$

$$J_a^i(A, B) = \frac{3\pi^{3/2}}{m(kT_0)^{1/2}} \int_0^{\infty} d\varepsilon \int_{-1}^1 d\mu K(f) L_i\left(\frac{\varepsilon}{kT_0}\right) \sqrt{\varepsilon} \quad (1.15)$$

$$J_b^i(A, B) = \frac{3\pi^{3/2}}{m(kT_0)^{1/2}} \int_0^{\infty} d\varepsilon \int_{-1}^1 d\mu K(f) L_i\left(\frac{\varepsilon}{kT_0}\right) \mu \sqrt{\varepsilon}$$

Граничные условия для системы (1.13)

катод

$$\gamma_i(f_k, U_1, T_0(0)) = \sum_{j=0}^n \left[ \alpha_{ij} \left( \frac{qU_1}{kT_0(0)} \right) A_j + \frac{2}{3} \beta_{ij} \left( \frac{qU_1}{kT_0(0)} \right) B_j \right]$$

анод

$$\gamma_i(f_a, U_2 - V, T_0(d)) = \sum_{j=0}^n \alpha_{ij} \left[ \left( \frac{q(U_2 - V)}{kT_0(d)} \right) A_j - \frac{2}{3} \beta_{ij} \left( \frac{(U_2 - V)q}{kT_0(d)} \right) B_j \right] \quad (1.16)$$

Здесь

$$\gamma_i(f, U, T) = \begin{cases} \left( \frac{2\pi kT}{m} \right)^{3/2} \int_{qU}^{\infty} f(\varepsilon - qU) \left( \frac{\varepsilon}{kT} - \frac{qU}{kT} \right) \frac{d\varepsilon}{kT} & (U \geq 0) \\ \left( \frac{2\pi kT}{m} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} f(\varepsilon - qU) \frac{\varepsilon}{kT} \frac{d\varepsilon}{kT} & (U \leq 0) \end{cases}$$

$$\alpha_{ij}(y) = \begin{cases} \int_y^{\infty} \exp(-x) L_i(x) L_j(x) (x - y) dx & (y \geq 0) \\ \int_0^{\infty} \exp(-x) L_i(x) L_j(x) x dx & (y \leq 0) \end{cases}$$

$$\beta_{ij}(y) = \begin{cases} 2\alpha_{ij}(0) + \int_y^{\infty} \exp(-x) L_i(x) L_j(x) \left( \left( \frac{y}{x} \right)^{3/2} - 1 \right) x dx & (y \geq 0) \\ \alpha_{ij}(0) & (y \leq 0) \end{cases}$$

Рассмотрим столкновительный член  $K(f)$  в случае, если имеются только столкновения электронов с нейтральными атомами. Если считать атомы бесконечно тяжелыми, то можно написать

$$K(f) = n_a v \int (f(\varepsilon, \mu') - f(\varepsilon, \mu)) \sigma(\vartheta, \varepsilon) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \quad \left( v = \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\sqrt{m}} \right) \quad (1.17)$$

Здесь  $n_a$  — плотность атомов;  $v$  — скорость электрона;  $\mu$  и  $\mu'$  — координата скорости электрона до и после столкновения (энергия  $\varepsilon$  при этом не меняется);  $\vartheta, \varphi$  — углы, характеризующие поворот вектора скорости в результате столкновения,  $\sigma(\vartheta, \varepsilon)$  — дифференциальное сечение.

После подстановки (1.7), (1.14) и (1.12) в (1.17) и (1.17) в (1.15) получим следующие выражения для правых частей (1.13):

$$J_a^i(A, B) = 0, \quad J_b^i(A, B) = \sum_{j=0}^n K_{ij} B_j \frac{1}{L_-} \quad (1.18)$$

$$\left( \frac{1}{L_-} = n_a Q, \quad Q = 2\pi \int_0^{\pi} (1 - \cos \vartheta) \sigma(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta \right)$$

Здесь  $Q$  — сечение передачи импульса; предполагается, что оно не зависит от энергии.

Выражение для  $K_{ij}$  дано в (1.14). Учет других типов столкновений приведет к появлению в (1.18), соответствующих функций от коэффициентов ряда (электро-электронные столкновения и рекомбинация дадут квадратичную форму по  $A_i$  и  $B_i$ , а ионизация и неупругие электрон-атомные столкновения — линейную).

Интегро-дифференциальное кинетическое уравнение в частных производных, описывающее поставленную задачу, свелось к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Если решать эту систему в приближении  $n = 1$ , а также положить  $T_0(x)$  равной температуре электронов в данной точке, то система уравнений (1.13) становится эквивалентной уравнениям диффузии и теплопроводности для электронов в работе Мойжеса и Пикуса [1]. При этом первые два граничных условия (1.16) имеют следующий физический смысл<sup>1</sup>. Число и энергия электронов, летящих от электрода и пересекающих плоскость, параллельную электроду, в непосредственной близости от барьера, равно полному числу и энергии эмиттируемых электронов плюс число электронов, отраженных потенциальным барьером.

**§ 2. Сходимость разложения в энергетическом пространстве и выбор системы полиномов. О единственности решения.** Рассмотрим разложение в ряд (1.11) изотропной части функции распределения в  $n$ -приближении.

Коэффициенты  $A_i$  определяются из решения уравнений предыдущего параграфа, они зависят от выбора системы полиномов  $L_i(x)$ , однако подстановка  $A_i$  в (1.11), определенных для различных  $L_i(x)$ , дает эквивалентные выражения, зависящие только<sup>2</sup> от числа  $n$ .

Выберем в качестве  $L_i$  полиномы Лагерра с индексом  $1/2$ . Они ортогональны с весом  $\exp(-x) x^{1/2}$

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{1/2} L_i(x) L_j(x) dx = \delta_{ij} i! \Gamma(i + 3/2) \quad (2.1)$$

с весом  $e^{-x} \sqrt{x}$ . В этом случае плотность  $n$  и средняя энергия  $kT$  электронов для функции  $f_0$  в (1.11) определяются первыми двумя коэффициентами

$$n = A_0, \quad T = T_0 (1 + A_1 / A_0) \quad (2.2)$$

Величины  $A_i$  в (1.11) зависят от  $n$ -порядка приближения, в котором решаем поставленную задачу. Пусть  $f_0^*(\varepsilon)$  — точное решение уравнений (1.8). Можно утверждать, что при  $n \rightarrow \infty$  коэффициенты  $A$  должны стремиться к пределу

$$A_i^* = \left( \frac{2\pi}{m} \right)^{3/2} \left( \Gamma \left( i + \frac{3}{2} \right) i! \right)^{-1} \int_0^{\infty} f_0^*(\varepsilon) L_i \left( \frac{\varepsilon}{kT_0} \right) \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon \quad (2.3)$$

Здесь  $A_i^*$  — коэффициенты разложения по полиномам  $L_i(\varepsilon / kT_0)$  в пространстве с весом  $\rho(\varepsilon)$  функции  $\varphi(\varepsilon)$

$$\rho(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} \left( \frac{m}{2\pi kT_0} \right)^{3/2} \exp \frac{-\varepsilon}{kT_0}, \quad \varphi(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} \frac{f_0^*(\varepsilon)}{\rho(\varepsilon)}$$

Чтобы получить при нашей постановке задачи при  $n \rightarrow \infty$  функцию  $f_0^*(\varepsilon)$ , надо чтобы указанный ряд для  $\varphi(\varepsilon)$  сходиллся. Для этого необходима конечность нормы

$$R = \int_0^{\infty} \rho(\varepsilon) |\varphi(\varepsilon)|^2 d\varepsilon = \left( \frac{2\pi kT_0}{m} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} \exp \frac{\varepsilon}{kT_0} (f_0^*(\varepsilon))^2 \varepsilon^{1/2} d\varepsilon \quad (2.4)$$

Пусть асимптотически функция  $f_0^*(\varepsilon)$  ведет себя как  $\exp(-\varepsilon / kT_*)$ . Тогда норма  $R$  конечна при  $T_* < 2T_0$ . При  $\varepsilon \rightarrow \infty$  становятся малыми эффект поля и столкновения, приводящие к перераспределению электронов

<sup>1</sup> Отличие этих граничных условий от граничных условий в работе [1] заключается в том, что при выводе последних пренебрегается вкладом от изотропной части функции распределения при подсчете тока и энергии электронов, вылетающих из плазмы. Этот вклад действительно невелик, когда применима диффузионная теория.

<sup>2</sup> С точки зрения наилучшей организации численных расчетов, выбор системы  $L_i(x)$  не безразличен.

по энергиям (электрон-электронные и неупругие электрон-атомные столкновения). Поэтому распределение по энергиям становится таким же, как в потоке эмиссии с более горячего электрода (таким будет всегда катод). Так что можно считать  $T_* = T_k$ .

Таким образом, сходимость зависит от выбора параметра  $T_0$ . В диффузионной теории, эквивалентной приближению  $n = 1$ , параметр  $T_0$  выбирается так, что  $kT_0$  будет средней энергией электрона. Если обобщить этот принцип выбора  $T_0$ , то на основании (2.2) придем к условию<sup>1</sup>

$$A_1 = 0 \quad (2.5)$$

Вполне возможна ситуация при таком выборе  $T_0$ , что в какой-то точке условие  $T_k < 2T_0$  нарушается (температура электронов меньше половины температуры катода). В этом случае при  $n \rightarrow \infty$  ряд получится расходящимся<sup>2</sup>, хотя при небольших  $n$  можно получить разумный результат (диффузионная теория при  $n = 1$ ).

Можно выбирать  $T_0$  по-другому, потребовав выполнения условия

$$A_n = 0 \quad (2.6)$$

При  $n = 1$  условия (2.5) и (2.6) совпадают, так что они оба являются возможными обобщениями выбора  $T_0$  в диффузионной теории. Как упоминалось выше, асимптотически  $f^*_0(\varepsilon)$  ведет себя как  $\exp(-\varepsilon/kT_k)$ . Можно показать, что при достаточно больших  $n$  величина коэффициентов ряда функции зависит только от ее асимптотического поведения. Поэтому коэффициенты  $f_0^*(\varepsilon)$  будут пропорциональны коэффициентам функции  $\exp(-\varepsilon/kT_k)$ , последние пропорциональны величине

$$\left(1 - \frac{T}{T_0}\right) \frac{1}{n!}$$

Таким образом, условие (2.6) при  $n \rightarrow \infty$  эквивалентно условию  $T_0 = T_k$ , при этом  $A_n$  стремятся к 0 и ряд сходится.

Рассмотрим случай, когда учитываются только столкновения электронов с бесконечно тяжелыми атомами, а барьеры на катоде  $U_1$  и на аноде  $U_2 - V$  положительны, т. е. отражают электроны из плазмы. Часть электронов оказываются «захваченными» потенциальной ямой. Такие ситуации разбираются в ряде работ по термоэлектронным преобразователям [8,9]. При этом исходное интегро-дифференциальное уравнение имеет много решений. Фактически в этом случае нельзя пренебрегать всегда имеющими место изменениями энергии электрона при столкновениях, либо учесть уход электронов в поперечном направлении. Однако решение уравнений моментов § 1 при любом  $n$  единственно.

Величины коэффициентов  $A_i$  и  $B_i$  при  $n \rightarrow \infty$  соответствуют единственной функции распределения электронов. Чтобы получить эту функцию однозначной из исходного интегро-дифференциального уравнения, надо ввести столкновительный член, приводящий к релаксации электронов по энергиям. Если устремить соответствующее время релаксации к бесконечности, то в пределе решение интегро-дифференциального уравнения будет давать искомую функцию распределения.

**§ 3. Учет электрического поля объемных зарядов в приближении квазинейтральности.** Дифференциальные уравнения (1.13) с граничными условиями (1.16), а также условие (2.5) определяют электронную функцию распределения через величины  $A_i(x)$  и  $B_i(x)$  при известном распределении потенциала. Для определения последнего необходимо знать распределение плотности ионов в пространстве. Для наших целей достаточно это сде-

<sup>1</sup> Ему можно дать следующее вариационное толкование:  $T_0$  должно давать экстремум величине

$$\int_0^{\infty} \ln \rho(T_0, \varepsilon) f_0 \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon,$$

которая напоминает выражение для энтропии

$$\int_0^{\infty} (\ln f) f \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon$$

<sup>2</sup> Однако и его можно сделать сходящимся, обрезав функцию распределения электронов, вылетающих с катода, при конечном значении энергии. Так как энергию обрезания можно брать сколь угодно большой, то и в этом случае, в принципе, можно получить точное решение задачи.

лать в диффузионном приближении, считая их температуру равной температуре атомов [1]. Последнюю определим из уравнения теплопроводности для газа (так как плазма слабоионизированная, влияние ионов и электронов на нейтральный газ можно не учитывать)

$$T_{an}^{1/2} \frac{dT_{an}}{dx} = 0 \quad (3.1)$$

где  $T_{an}(x)$  — температура атомов.

С учетом граничных условий получим решение

$$T_{an}(x) = T_k \left( 1 + \left[ \left( \frac{T_a}{T_k} \right)^{3/2} - 1 \right] \frac{x}{d} \right)^{2/3} \quad (3.2)$$

где  $T_k, T_a$  — температура катода и анода.

Выражение для ионного тока  $I_+$  имеет вид [10]

$$I_+ = -qD_+ \left( \frac{dn_+}{dx} + (k_t + 1) n_+ \frac{1}{T_{an}} \frac{dT_{an}}{dx} + \frac{qF^{\eta}}{kT_{an}} n_+ \right) \quad (3.3)$$

В силу закона сохранения заряда

$$\frac{dI_+}{dx} = - \frac{dI_-}{dx} \quad (3.4)$$

Ток электронов  $I_-$  выражается через коэффициенты  $B_i$ , а коэффициент диффузии  $D_+$  может быть записан в виде  $D_+ = 1/3 L_+ v_+$ , где  $L_+$  — длина свободного пробега иона, а  $v_+$  — его тепловая скорость. Положим, что термодиффузионное соотношение  $k_t = 0$  (согласно Чепмену и Каулингу, это соответствует диффузии частиц в газе, когда размеры частицы и атома газа совпадают). Граничные условия для (3.3) и (3.4) ставятся так же, как и для электронной функции в приближении  $n = 0$  (с учетом изменения знака барьера для ионов и соотношений между  $A_0$  и  $n_+$ , а также  $B_0$  и  $I_+$ ).

Выразим  $n_+$  в уравнении (3.3), воспользовавшись соотношением (2.2), а также условием квазинейтральности

$$n_+(x) = n_-(x) \quad (3.5)$$

Тогда уравнение (3.3) можно использовать для определения  $F = dU/dx$  в каждой точке, а граничные значения  $U_1$  и  $U_2$  для функции  $U$  определяются граничными условиями для уравнений (3.3) и (3.4).

Изложенный способ учета поля объемных зарядов будет строгим, если выполнены условия, указанные во введении. Чтобы проверить, соответствует ли полученное таким способом решение этим условиям, надо оценить из уравнения Пуассона

$$d^2U/dx^2 = 4\pi q(n_- - n_+)$$

величину  $n_- - n_+$  в области квазинейтральной плазмы. Необходимо также решить уравнение Пуассона в приэлектродных областях. Граничными значениями будут потенциалы на границе с плазмой (т. е.  $U_1$  и  $U_2$ ) и известные потенциалы электродов, а размер области выбирается так, чтобы  $dU/dx$  обращалась в нуль на границе с плазмой (к этому сводится условие непрерывности  $dU/dx$  в пределе  $r \rightarrow 0$ ).

§ 4. Численное решение задачи. Задача свелась к решению дифференциальных уравнений (1.13), (3.3) и (3.4) с граничными условиями. С учетом (2.5) и (3.5) неизвестными функциями будут

$$U_0(x), T_0(x), A_0(x), A_2(x), \dots, A_n(x), I_+(x), B_0(x), \dots, B_n(x)$$

В общем виде это можно записать так:

$$\frac{dy_i(x)}{dx} = f_i(x, \dots, y_j \dots) \quad (i, j = 1, \dots, 2m) \quad (4.1)$$

Граничные условия

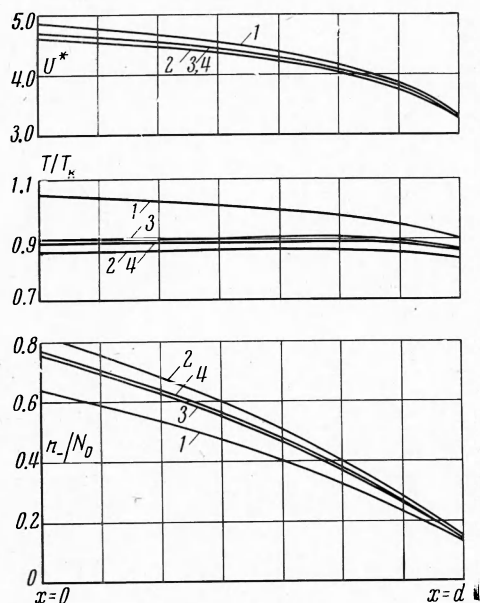
$$F_k(\dots y_i(0) \dots) = 0 \quad (k = 1, \dots, m), \quad F_{k+m}(\dots y_i(d) \dots) = 0 \quad (4.2)$$

Как дифференциальные уравнения, так и граничные условия нелинейны, причем последние заданы на обоих концах промежутка  $x = 0$  и  $x = d$ .



Уравнения (4.2) рассматриваются как  $2m$  нелинейных уравнения относительно значений функций  $y_i(0)$  в точке  $x=0$ . Значения  $y_i(d)$  определяются по заданным  $y_i(0)$  численным интегрированием уравнений (3.6) методом Рунге — Кутты. Для решения нелинейной системы применялся метод Ньютона [11].

Для иллюстрации эффективности изложенного метода приводим пример численного расчета, учитывающего лишь электрон-атомные столкновения. При этом рассмотрен как раз тот случай, о котором говорилось в конце § 2: на катоде и аноде имеются барьеры, отражающие электроны. Эмиссия ионов и электронов с анода не учитывалась. На фиг. 2 приведены результаты расчета в приближении  $n=1, 2, 3, 4$  для следующих значений безразмерных параметров:



Фиг. 2

$$\frac{qV}{kT_k} = 0$$

$$\frac{T_a}{T_k} = 0.544, \quad \ln\left(\frac{N_{k+}}{N_{k-}}\right)^{1/2} = 4.6$$

$$\frac{d}{L_-} = \frac{d}{L_+} = 7.2$$

Здесь  $N_{k+}$  и  $N_{k-}$  — плотности потоков эмиссии ионов и электронов с катода (см. (1.4));  $L_+$  и  $L_-$  — длины свободного пробега ионов и электронов у катода. По оси ординат отложены безразмерные величины

$$T/T_k, \quad u^* = qU/kT, \quad n_-/N_0,$$

$$(N_0 = \sqrt{N_{k+}N_{k-}})$$

Здесь  $N_0$  — равновесная концентрация зарядов у катода. При интегрировании методом Рунге — Кутты от  $x=0$  до  $x=d$  делалось 10 шагов. Увеличение при  $n=2$  шагов вдвое давало разницу в четвертом знаке.

Автор благодарит Г. Е. Пикуса за руководство и помощь в работе и Л. А. Оганесяна — за помощь при постановке задачи на электронно-вычислительной машине.

Поступила 13 VIII 1965

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Мойжес Б. Я., Пикус Г. Е. К теории плазменного термоэлемента. Физ. твердого тела, 1960, т. 4, стр. 756.
2. Grad H. On the kinetic theory of rarefied gases. Commun. Pure and Appl. Math., 1949, vol. 11, No. 4, p. 331.
3. Weitzsch F. Ein neuer Ansatz für die Behandlung gasdynamischer Probleme bei starken Abweichungen vom thermodynamischen Gleichgewicht. Ann. Physik, 1961, В. 7, Н. 7—8, S. 403.
4. Дэвисон Б. Теория переноса нейтронов. Атомиздат, 1960.
5. Марчук Г. И. Методы расчета ядерных реакторов. Госатомиздат, 1961.
6. Suchy K. Neue Methoden in der kinetischen Theorie Verdünnter Gase. Ergebn. exact. Naturwiss., 1964, В. 35, S. 103.
7. Давыдов Б. И. О распределении электронов, движущихся в электрическом поле. Ж. эксперим. и теор. физ., 1936, т. 6, стр. 463.
8. Кучеров Р. Я., Рикенглаз Л. Э. Кинетическая теория диода, заполненного разряженной плазмой. Ж. техн. физ., 1962, т. 32, стр. 1275.
9. Мак-Интайр Р. Анализ и численное решение задачи о пространственном распределении потенциала в термоэмиссионном преобразователе с низкой энергией. Сб. материалов симпозиума. Атомиздат, 1965, т. 2, стр. 73.
10. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. Изд-во иностр. лит., 1961.
11. Ланс Дж. Численные методы для быстродействующих вычислительных машин. Изд. иностр. лит., 1962.