W_0' и W_0''—приведенная скорость жидкой и газовой фаз; d—диаметр трубы; ν — вязкость жидкости; u — скорость на оси канала.

Разделение режимов на ламинарный, переходный и турбулентный условно, и границы перехода взяты для условий однофазного течения. Из фиг. 4 видно, что в области больших чисел Рейнольдса профили скорости в двухфазной жидкости подчиняются обычным закономерностям, свойственным турбулентным однофазным потокам, т. е. $\frac{W_0'}{u} = \left(\frac{y}{R}\right)^{1/n}$, где $1/n = {}^1/_6 \ldots {}^1/_7$. При числах Рейнольдса, обычно соответствующих условиям перехода ламинарного течения в турбулентное (см. фиг. 3), профили скорости существенно отличаются от профилей для однофазной жидкости.

При условно-ламинарных параметрах потока (Re=1920 и менее) отклонение результатов экспериментов от данных, полученных на однофазной жидкости, становится очень сильным.

На профиле скорости при газосодержании, равном $\beta=0{,}07$, появляются характерные участки со скоростью, большей, чем на оси. При остальных газосодержаниях профиль более заполнен, чем при течении однофазной жидкости, причем эта деформация весьма заметна даже при ничтожно малых концентрациях газовой фазы. Приведенные результаты находятся в полном соответствии с полученными в [1] данными по измерению средних и пульсационных характеристик трения на стенке.

Таким образом, результаты работы [1] и данной работы говорят о необходимости пересмотра представлений о механизме течения газожидкостной смеси в пузырьковом режиме в области малых чисел Рейнольдса.

Поступила 10 XII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бурдуков А. П., Валукина Н. В., Накоряков В. Е.* Особенности течения газожидкостной пузырьковой смеси при малых числах Рейнольдса.— ПМТФ, 1974, № 4.
2. *Накоряков В. Е., Бурдуков А. П., Покусаев Б. Г., Кузьмин В. А., Утович В. А., Христофоров В. В., Татевосян Ю. В.* Исследование турбулентных течений двухфазных сред. Новосибирск, изд. Ин-та теплофизики СО АН СССР, 1973.
3. *Hiroaki Matsuda, Joseph Yamada.* Limiting diffusion current in hydrodynamic voltametry.—«J. Electroanal. Chem.», 1971, vol. 30, p. 261—270.

УДК 532. 712

МЕДЛЕННЫЕ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОЙ КАПЛИ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

В. А. Городцов

(*Москва*)

Задача об установившемся медленном поступательном движении круглой жидкой капли (пузырька) в вязкой жидкости была решена Адамаром и Рыбчинским [1,2]. Результаты экспериментальных измерений редко согласуются с формулой Адамара — Рыбчинского. Это связано с заторможенностью течения внутри капли из-за поверхностно-активных примесей, которых обычно достаточно много в жидкостях. Тем не менее задачу о неустановившемся движении капли будем рассматривать в простейшем случае, предполагая, что поверхностно-активные вещества отсутствуют.

Рассмотрены задачи о колебаниях и движениях с произвольными ускорениями шарообразной капли в вязкой жидкости. Анализируется формула для силы сопротивления капли жидкости с большой вязкостью, упруговязкой капли и частицы с «проскальзыванием».

1. Если движения капли столь медленны, что можно ограничиться линейным приближением, а капля столь мала, что изменением ее формы можно пренебречь [1, 2], то течения внутри и вне капли описываются

уравнениями (жидкости считаем несжимаемыми)

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{u}, \quad \nabla \mathbf{u} = 0, \tag{1.1}$$

причем жидкость вне капли характеризуется плотностью ρ и вязкостью η, а внутри капли — ρ', η' (характеристики внутренней области отмечены штрихами).

Считая известным закон изменения скорости капли* $\mathbf{U}(t)$, будем искать, как меняется сила сопротивления $\mathbf{F}(t)$, действующая на нее. При этом жидкость вдали от капли предположим неподвижной. Пользуясь линейностью задачи с помощью преобразования Фурье по времени $f(\mathbf{r}, \omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}, t)\, e^{i\omega t} dt$, перейдем сначала к более простой задаче о сопротивлении, испытываемом каплей, скорость которой меняется гармоническим образом, а затем вернемся к общей задаче с помощью обратного преобразования Фурье

$$f(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}, \omega)\, e^{-i\omega t} d\omega. \tag{1.2}$$

Для комплексных амплитуд давлений $p(\mathbf{r}, \omega)$, $p'(\mathbf{r}, \omega)$ и скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r}, \omega)$, $\mathbf{u}'(\mathbf{r}, \omega)$ течений, возникающих вне и внутри капли, скорость которой меняется по закону $\mathbf{U}(\omega)e^{-i\omega t}$, из уравнений (1.1) следует

$$-i\omega\rho\mathbf{u}(\mathbf{r}, \omega) = -\nabla p(\mathbf{r}, \omega) + \eta\Delta\mathbf{u}(\mathbf{r}, \omega), \ \nabla\, \mathbf{u}(\mathbf{r}, \omega) = 0. \tag{1.3}$$

Аналогичные уравнения получаются для характеристик внутренней области (ниже при полной аналогии соотношения для них отдельно не выписываются).

Поскольку решения $\mathbf{u}$, p могут зависеть только от векторов $\mathbf{r}$, $\mathbf{U}(\omega)$, причем от $\mathbf{U}$ линейно, то их общий вид будет

$$p(\mathbf{r}, \omega) = p_0 + \mathbf{n}\mathbf{U}\varphi_0(r), \ r \equiv |\mathbf{r}|; \tag{1.4}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{U})\varphi_1(r) + \mathbf{m}\varphi_2(r), \ \mathbf{m} \equiv \mathbf{U} - \mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{U}).$$

Удобство разложения на слагаемые указанного вида связано со свойством ортогональности $\mathbf{n}\mathbf{m} = 0$. Подставляя эти выражения в уравнения (1.3), находим

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} + \frac{2}{r}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0; \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(\eta\Delta + i\omega\rho)\left(r\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} + 3\varphi_1\right) = 0;$$

$$\varphi_0 / r = i\omega\rho\varphi_2 + \eta\left[\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\varphi_2}{\partial r} + \frac{2}{r^2}(\varphi_1 - \varphi_2)\right].$$

Получаем общее решение второго уравнения системы (1.5)

$$\varphi_1 = c_0 + c_1\frac{1}{r^3} + c_2\frac{1+\lambda r}{\lambda^2 r^3}e^{-\lambda r} + c_3\frac{1-\lambda r}{\lambda^2 r^3}e^{\lambda r}, \ \lambda = (1-i)\sqrt{\frac{\rho\omega}{2\eta}}, \quad c_k = \mathrm{const}.$$

---

* Благодаря линейности задачи и шарообразности капли всегда возможно раздельное рассмотрение поступательного и вращательного движения капли. В дальнейшем анализируется только поступательное движение.

Из условия ограниченности решения при $r=0$ следует, что $c_1=0$, $c_2=c_3$, поэтому течение жидкости внутри капли представим уравнениями

(1.6) $$\varphi_1'(r) = a_1 + a_2 \frac{\gamma(\lambda' r)}{\lambda'^2 r^3}; \quad \gamma(x) \equiv x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x.$$

Условие неподвижности жидкости вдали от капли приводит к $c_0=$ $=c_3=0$, так что вне капли

(1.7) $$\varphi_1(r) = \frac{b_1}{r^3} + b_2 \frac{1+\lambda r}{\lambda^2 r^3} e^{-\lambda r}.$$

Из первого уравнения системы (1.5) и соотношений (1.6), (1.7) следует

(1.8) $$2\varphi_2'(r) + \varphi_1'(r) = 3a_1 + a_2 \frac{\operatorname{sh} \lambda' r}{r}; \quad 2\varphi_2(r) + \varphi_1(r) = -b_2 \frac{e^{-\lambda r}}{r}.$$

В свою очередь, эти формулы помогают найти из третьего уравнения системы (1.5) значения

(1.9) $$\varphi_0'(r) = i\omega\rho r a_1; \quad \varphi_0(r) = -\frac{i\omega\rho}{2r^2} b_1.$$

Таким образом, решения найдены с точностью до четырех неопределенных коэффициентов a_1, a_2, b_1, b_2, которые получены из граничных условий на сферической поверхности капли (ее деформацией пренебрегаем).

Условия равенства нормальных и касательных компонент скорости на поверхности капли дают (a — радиус капли)

(1.10) $$\varphi_1'(a) = \varphi_1(a) = 1; \quad \varphi_2'(a) = \varphi_2(a).$$

В качестве четвертого условия используем равенство касательных усилий (нормальные при этом не равны и приводят к не учитываемой здесь деформации капли). Решениям вида (1.4) соответствует общая формула для напряжений

(1.11) $$\sigma_{ij} = \delta_{ij}\left[-p_0 + \left(2\eta \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{r} - \varphi_0\right)\mathbf{nU}\right] + n_i n_j 2\eta \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} - \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{r}\right)\mathbf{nU} +$$
$$+ (n_i m_j + n_j m_i)\, \eta \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{r}\right),$$

которая позволяет, используя первое уравнение системы (1.5), записать условие равенства сдвиговых напряжений с обеих сторон поверхности капли в виде

(1.12) $$\eta \frac{\partial}{\partial r}(2\varphi_2 - \varphi_1)|_{r=a} = \eta' \frac{\partial}{\partial r}(2\varphi_2' - \varphi_1')|_{r=a}.$$

Подставив решения в условия (1.10), (1.12), получаем

(1.13) $$\frac{a_2}{a} = \frac{-3\eta(1+\lambda a)}{\eta(3+\lambda a)\,\delta(\lambda' a) + \eta'[\gamma(\lambda' a) - 2\delta(\lambda' a)]};$$

(1.14) $$a_1 = 1 - \frac{a_2}{a}\frac{\gamma(\lambda' a)}{(\lambda' a)^2}, \quad \delta(x) \equiv \operatorname{sh} x - 3\gamma(x)/x^2;$$

(1.15) $$-\frac{b_2}{a} e^{-\lambda a} = 3 + \frac{a_2}{a}\delta(\lambda' a); \quad \frac{b_1}{a^3} = \frac{\lambda^2 a^2 + 3\lambda a + 3}{\lambda^2 a^2} + \frac{1+\lambda a}{\lambda^2 a^2}\frac{a_2}{a}\delta(\lambda' a).$$

Для нахождения комплексной амплитуды силы сопротивления, действующей на колеблющуюся каплю, необходимо проинтегрировать напряжение из (1.11) по ее поверхности. Эта операция для сферической капли сводится к легко выполнимому усреднению по направлениям

$$F_i(\omega) = \int\limits_{r=a} \sigma_{i\alpha}(\mathbf{r}, \omega)\, n_\alpha dS = 4\pi a^2 \langle \sigma_{i\alpha}(\mathbf{r}, \omega)\, n_\alpha \rangle|_{r=a} = \frac{4\pi}{3} a^2 \Big[-\varphi_0(a) + \\ + 2\eta \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{r} \right)\Big|_{r=a} \Big] U_i(\omega).$$

Последнее выражение упрощается с помощью (1.7)—(1.9)

$$F_i(\omega) = -2\pi a\eta \left[\frac{\lambda^2 a^2}{3} - (1 + \lambda a) \frac{b_2}{a} e^{-\lambda a} \right] U_i(\omega). \tag{1.16}$$

В частном случае жесткого шарика ($\eta' \gg 1$), согласно (1.13), (1.15), $b_2 e^{-\lambda a} = -3a$ и формула для силы принимает хорошо известный вид [2]. В случае стационарного движения ($\omega, \lambda, \lambda' \to 0$) $-b_2 = a \dfrac{2\eta + 3\eta'}{\eta + \eta'}$ и формула (1.16) переходит в формулу Адамара—Рыбчинского.

Рассмотрим упрощения, возникающие при колебаниях малой частоты $\omega \ll \eta'/(\rho' a^2)$. При таких частотах достаточно оставить несколько членов в разложениях

$$\gamma(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+3} \frac{x^{2k+3}}{(2k+1)!}; \qquad \delta(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+5)(2k+3)} \frac{x^{2k+3}}{(2k+1)!}.$$

Тогда из соотношений (1.13)—(1.15) получим

$$-\frac{b^2}{a} e^{-\lambda a} \approx \frac{2\eta + 3\eta'}{\eta + \eta' + \lambda a\eta/3} + \frac{\eta\eta'(1 + \lambda a)}{(\eta + \eta' + \lambda a\eta/3)^2} \frac{(\lambda' a)^2}{21} + \ldots$$

Отметим, что малость $|\lambda' a|$ еще не означает малости величины $|\lambda a|$. При $\eta'/\rho' \gg \eta/\rho$, т. е. для очень вязкой по сравнению с окружающей жидкостью капли, в рамках рассматриваемого приближения $\omega \gg \eta/(\rho a^2)$. Отбрасывая все члены с λ', получим для амплитуды силы сопротивления простую формулу

$$F_i(\omega) = -2\pi a \left[-\frac{i\omega\rho a^2}{3} + \eta \frac{(2\eta + 3\eta')(1 + \lambda a)}{\eta + \eta' + \lambda a\eta/3} \right] U_i(\omega). \tag{1.17}$$

2. Чтобы определить, как меняется сила сопротивления $\mathbf{F}(t)$ при произвольном изменении скорости капли $\mathbf{U}(t)$, нужно произвести в (1.16) суммирование типа (1.2) по всем частотам. После этого общая формула принимает вид

$$\mathbf{F}(t) = -\frac{2\pi}{3} \rho a^2 \frac{d\mathbf{U}}{dt} - 2\pi a\eta \frac{2\eta + 3\eta'}{\eta + \eta'} \mathbf{U}(t) - 2\pi a\eta \int\limits_{-\infty}^{t} K(t - t') \frac{d\mathbf{U}}{dt'} dt'$$

с функцией памяти

$$K(t) = -\frac{\rho}{2\pi\eta} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1 + \lambda a}{\lambda^2 a} b_2 e^{-\lambda a} + \frac{2\eta + 3\eta'}{\eta + \eta'} \frac{1}{\lambda^2} \right) e^{-i\omega t} d\omega. \tag{2.1}$$

Найдем явный вид $K(t)$ при больших временах. Поскольку в частотном разложении (2.1) при больших t главный вклад дают малые частоты, при $t \gg a^2\rho'/\eta'$ из выражения для b_2 можно вообще опустить члены с $\lambda' a$.

Тем самым задача сводится к применению в (1.17) обратного преобразования Фурье. В этом приближении

$$K(t) \approx \frac{a\rho\alpha}{6\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{\lambda(\eta + \eta' + \lambda a\eta/3)} d\omega = \alpha e^T \operatorname{Erf} \sqrt{T}, \tag{2.2}$$

$$\alpha \equiv \frac{(2\eta + 3\eta')^2}{\eta(\eta + \eta')}, \quad T \equiv \frac{9(\eta + \eta')^2}{\rho\eta a^2} t.$$

На конечной стадии ускорения капли (при $T \gg 1$) асимптотическое разложение интеграла вероятности ошибок позволяет написать

$$K(t) \approx \frac{\alpha}{\sqrt{\pi T}} + \ldots, \; t \gg a^2\rho/\eta, \; a^2\rho'/\eta',$$

и формула для силы сопротивления капли примет вид, аналогичный формуле сопротивления жесткого шара [2].

При описании броуновского движения частиц, наряду с условиями прилипания жидкости на поверхности частиц, рассматривают и условия проскальзывания. Последнее соответствует вырожденному случаю рассмотренной задачи с $\eta' = 0$. Граничные условия отсутствия касательных усилий на поверхности шарообразной частицы и непроникания жидкости через ее поверхность

$$\frac{\partial}{\partial r}(2\varphi_2 - \varphi_1)|_{r=a} = 0, \quad \varphi_1(a) = 1$$

приводят к простому выражению для b_2:

$$\frac{b_2}{a} e^{-\lambda a} = -\frac{6}{3 + \lambda a}.$$

При этом для амплитуды силы и функции памяти получим выражения

$$\mathbf{F}(\omega) = -2\pi a\eta\left(\frac{\lambda^2 a^2}{3} + 6\frac{1 + \lambda a}{3 + \lambda a}\right)\mathbf{U}(\omega); \quad K(t) = 4e^{\tau} \operatorname{Erf} \sqrt{\tau}, \quad \tau \equiv \frac{9\eta}{\rho a^2} t.$$

Эти формулы следуют также из (1.17), (2.2) при $\eta' = 0$, но в отличие от них формально пригодны при любых частотах и временах.

Проанализируем теперь поведение капли упруговязкой жидкости на конечной стадии ее ускорения в вязкой жидкости ($t \gg a^2\rho/\eta$, $a^2\rho'/|\eta'|$). Переход от колебаний капли вязкой жидкости с коэффициентом вязкости η' к колебаниям капли упруговязкой жидкости сводится в линейном приближении к простой замене в формулах п. 1 коэффициента η' на функцию частоты $\eta'_+(\omega)$. В жидкости с одним временем релаксации $\eta'_+(\omega) = \eta'/(1 - i\theta\omega)$.

Пренебрегая для простоты всеми членами с $\lambda' a$ и λa, получим

$$\mathbf{F}(\omega) \approx -2\pi a\eta \frac{2\eta + 3\eta'_+(\omega)}{\eta + \eta'_+(\omega)} \mathbf{U}(\omega).$$

В случае жидкости с одним временем релаксации обратное преобразование Фурье дает

$$\mathbf{F}(t) \approx -2\pi a\eta \frac{2\eta + 3\eta'_0}{\eta + \eta'_0} \mathbf{U}(t) - 2\pi a\eta \int\limits_{-\infty}^{t} K(t - t') \frac{d\mathbf{U}}{dt'} dt';$$

$$K(t) = -\frac{\eta'_0}{\eta + \eta'_0} e^{-\left(1 + \frac{\eta'_0}{\eta}\right)\frac{t}{\theta}}, \quad \eta'_0 \equiv \eta'_+(0).$$

Таким образом, характерное время памяти капли оказывается в $1+\eta_0'/\eta$ раз меньше времени релаксации жидкости, из которой она состоит.

Поступила 20 I 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Левич В. Г.* Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.

УДК 533.6.011.3

РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ О ТЕЧЕНИИ ДВУХФАЗНОЙ СМЕСИ ГАЗА И ИНОРОДНЫХ ТВЕРДЫХ ИЛИ ЖИДКИХ ЧАСТИЦ В СОПЛЕ ЛАВАЛЯ

В. И. Копченов

(*Москва*)

В рамках двухжидкостной (двухскоростной и двухтемпературной) модели сплошной среды рассматривается течение смеси газа и инородных частиц в дозвуковой, трансзвуковой и сверхзвуковой частях сопла Лаваля. В случае тонкого пристеночного слоя чистого газа задача решается в два этапа. Вначале при помощи метода установления рассчитывается ядро потока, где течет газ с частицами, при этом параметры в слое чистого газа определяются приближенно,а затем по упрощенным уравнениям (типа уравнений пограничного слоя) находится распределение параметров в зоне чистого газа и уточняется течение в ядре потока. Приведены примеры расчета. Применение развитого метода позволило установить некоторые особенности течения смеси газа с частицами в сопле Лаваля в случае стоксовского закона обтекания инородных частиц.

Для решения прямой задачи о течении смеси газа с частицами в сопле Лаваля в двумерной постановке в работах [1,2] применялся метод установления. Однако из-за отставания частиц вблизи стенки образуется слой чистого газа. Этот слой может быть достаточно тонким, но при сколь угодно малой его толщине в случае конечного относительного расхода частиц (расход частиц к расходу смеси) параметры газа в нем меняются на конечную величину. Последнее обстоятельство существенно затрудняет применение метода установления в случае малой толщины пристеночного слоя, так как для достижения удовлетворительной точности в слое чистого газа потребовалось бы достаточно мелкое разбиение, что привело бы к существенному увеличению времени счета задачи.

В работе [3] задача о течении смеси газа с частицами в сопле Лаваля решалась с помощью метода возмущений. Предполагалось, что коэффициенты φ^f и φ^q, определяющие взаимодействие частиц с газом, велики. Решение находилось в виде разложений по малым параметрам $\varepsilon_1=1/\varphi^f$ и $\varepsilon_2=1/\varphi^q$. Были получены упрощенные уравнения, описывающие течение в пристеночном слое чистого газа. Отмечалось, что, поскольку малый параметр появляется в уравнениях лишь через толщину слоя, которая в рас-