ЛИТЕРАТУРА

1. **Zeleny J.** Instability of electrified liquid surfaces // Phys. Rev.— 1917.— V. 10, N 1.
2. **Taylor G. I.** Electrically driven jets // Proc. Roy. Soc. London.— 1969.— V. A313.— P. 453.
3. **Horning D. W., Hendrics C. D.** Study of an electrically driven jet // J. Appl. Phys.— 1979.— V. 50, N 4.
4. **Kim K., Turnbull R. J.** Generation of charged drops of insulating liquids by electrostatic spraying // J. Appl. Phys.— 1976.— V. 17, N 5.
5. **Baumgarten P. K.** Electrostatic spinning of acrylic microfibers // J. Colloid Interface Sci.— 1971.— V. 36, N 1.
6. **Larrondo L., Menley R. S. J.** Electrostatic fiber spinning from polymer melts // J. Polym. Sci.: Polym. Phys.— 1981.— V. 19, N 6.
7. **Кириченко В. Н., Петрянов И. В., Супрун Н. Н., Шутов А. А.** Асимптотический радиус слабопроводящей жидкой струи в электрическом поле // ДАН СССР.— 1986.— Т. 289, № 4.
8. **Тамм И. Е.** Основы теории электричества.— М.: Наука, 1976.
9. **Миролюбов Н. Н., Костенко М. В., Левинштейн М. Л., Тиходеев Н. Н.** Методы расчета электростатических полей.— М.: Высш. шк., 1963.

г. Обнинск *Поступила 15/VIII 1988 г., в окончательном варианте — 17/X 1989 г.*

УДК 538.4

В. И. Хоничев

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ТЕЛА, ДВИЖУЩЕГОСЯ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПОД ВЛИЯНИЕМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ СИЛ

В [1] рассматривается модельная задача о приведении в движение шара, помещенного в проводящую жидкость, электромагнитным полем, индуцированным в этой жидкости магнитным диполем $\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 e^{i\omega t}$, смещенным относительно центра шара. Анализ проводится в стоксовом приближении, причем исследуется силовое воздействие на жидкость лишь той части силового поля, которая ответственна за приведение шара в движение, а именно силы

$$\mathbf{f} = \frac{45}{4\pi}\varepsilon\frac{H_0^2}{\delta}\left(\frac{a}{r}\right)^2 e^{-2(r-a)/\delta}\sin^2\vartheta\cos\vartheta\,\mathbf{e}_r. \tag{1}$$

Здесь $\varepsilon = d/a$; d — расстояние диполя $\mathbf{m}$ от центра шара; a — радиус шара; $\delta = \sqrt{c^2/2\pi\sigma\omega}$ — толщина скин-слоя; σ — проводимость жидкости; $H_0 = m_0/a^3$ — характерная напряженность магнитного поля; рассмотрение ведется в сферической системе координат (r, ϑ, φ).

Прямым решением (технически довольно трудоемким) стоксовых уравнений удается найти скорость движения шара

$$U_\infty \simeq \varepsilon\left(\frac{\delta}{a}\right)^2\frac{3aH_0^2}{8\pi\rho\nu}. \tag{2}$$

В настоящей работе получено общее соотношение для определения скорости тела, приводимого в движение за счет объемных электромагнитных сил, распределенных вне тела.

Найденные соотношения справедливы при следующих предположениях: 1) число Рейнольдса $\mathrm{Re} \ll 1$ (стоксово обтекание); 2) распределение объемных сил не зависит от поля скоростей, что при выполнении (1) возможно, если $E_0 \gg U_0H_0/c$ (E_0, H_0 — характерные напряженности электрического и магнитного полей, U_0 — характерная скорость течения).

Система уравнений, описывающая стационарное движение жидкости в системе координат, связанной с телом, имеет вид

$$(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} + (1/\rho)\nabla p = (1/\rho)\mathbf{f} + \nu\Delta\mathbf{u},\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0. \tag{3}$$

На поверхности тела должны выполняться условия прилипания

(4) $$\mathbf{u}|_S = 0.$$

На бесконечно удаленной от тела поверхности, как правило, задается скорость набегающего потока $\mathbf{u}|_{|\mathbf{r}|\to\infty} = -\mathbf{U}_\infty$ ($\mathbf{U}_\infty$ — вектор скорости движения тела). Однако в нашем случае величина $\mathbf{U}_\infty$ неизвестна и определяется из условия равенства нулю суммарной силы, действующей па стационарно движущееся в вязкой жидкости тело:

(5) $$\int_G \mathbf{f}\, d^3\mathbf{r} = \int_S T(\mathbf{u})\,\mathbf{n}\, dS.$$

Здесь G — область, занятая жидкостью; S — поверхность обтекаемого тела; n — внешняя нормаль к поверхности S; $T(\mathbf{u})$— тензор напряжений $T_{ij}(\mathbf{u}) = -p\delta_{ij} + \mu(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)$.

В стоксовом приближении уравнение (3) можно записать как

(6) $$\operatorname{div} T(\mathbf{u}) + \mathbf{f} = 0.$$

Интегрируя (6) по объему G, занятому жидкостью, и применяя формулу Остроградского — Гаусса, получаем

(7) $$-\int_S T(\mathbf{u})\,\mathbf{n}\, dS + \int_{\Sigma_R} T(\mathbf{u})\,\mathbf{n}\, dS + \int_G \mathbf{f}\, d^3\mathbf{r} = 0$$

(Σ_R — удаленная от тела произвольная поверхность). Сравнивая (5) и (7), находим

(8) $$\int_{\Sigma_R} T(\mathbf{u})\,\mathbf{n}\, dS = 0.$$

В случае обычного стоксова обтекания, когда объемные силы отсутствуют ($\mathbf{f} \equiv 0$), из (7) следует

(9) $$\int_{\Sigma_R} T(\mathbf{v})\,\mathbf{n}\, dS = \int_S T(\mathbf{v})\,\mathbf{n}\, dS.$$

Воспользуемся теперь формулой Грина

(10) $$\int_G \mathbf{v}(\mu\Delta\mathbf{u} - \nabla p)\, d^3\mathbf{r} - \int_G \mathbf{u}(\mu\Delta\mathbf{v} - \nabla q)\, d^3\mathbf{r} = \int_\Sigma \{\mathbf{v}T(\mathbf{u})\,\mathbf{n} - \mathbf{u}T(\mathbf{v})\,\mathbf{n}\}\, dS,$$

где $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ — произвольные гладкие соленоидальные векторы; p, q — произвольные гладкие функции; $T(\mathbf{u})$, $T(\mathbf{v})$— тензоры напряжений, соответствующие полям ($\mathbf{u}$, p) и ($\mathbf{v}$, q).

Выберем в качестве $\mathbf{u}$, p решение задачи о движении рассматриваемого твердого тела под воздействием электромагнитных сил (задача (6), (4), (5)), а в качестве $\mathbf{v}$, q — решение обычной стоксовой задачи обтекания этого же тела. Тогда с учетом уравнения (6) и граничных условий (4) соотношение (10) запишем в виде

(11) $$-\int_G \mathbf{v}\mathbf{f}\, d^3\mathbf{r} = \int_{\Sigma_R} \mathbf{v}T(\mathbf{u})\,\mathbf{n}\, dS - \int_{\Sigma_R} \mathbf{u}T(\mathbf{v})\,\mathbf{n}\, dS.$$

Пусть при $|\mathbf{r}| \to \infty$

(12) $$\mathbf{u} \to (U_\infty, 0, 0), \quad \mathbf{v} \to (V_\infty, 0, 0).$$

Тогда на поверхности Σ_R, охватывающей тело, имеем

$$\int_{\Sigma_R} \mathbf{v}T(\mathbf{u})\,\mathbf{n}\, dS = V_\infty \int_{\Sigma_R} T_{x_j}(\mathbf{u})\, n_j\, dS + \int_{\Sigma_R} O(\mathbf{v} - V_\infty\mathbf{i})\, T(\mathbf{u})\,\mathbf{n}\, dS,$$

$$\int_{\Sigma_R} \mathbf{u}T(\mathbf{v})\,\mathbf{n}\, dS = U_\infty \int_{\Sigma_R} T_{x_j}(\mathbf{v})\, n_j\, dS + \int_{\Sigma_R} O(\mathbf{u} - U_\infty\mathbf{i})\, T(\mathbf{v})\,\mathbf{n}\, dS.$$

Устремляя $R \to \infty$, получаем в силу (8), (9), (12) и произвольности поверхности

$$(13) \qquad \int\limits_{\Sigma_{R\to\infty}} \mathbf{v}T(\mathbf{u})\,\mathbf{n}\,dS = 0, \qquad \int\limits_{\Sigma_{R\to\infty}} \mathbf{u}T(\mathbf{v})\,\mathbf{n}\,dS = U_\infty \int\limits_S T_{x_j}(\mathbf{v})\,n_j\,dS.$$

Из (11) и (13) находим скорость потока на бесконечности в случае движения твердого тела под воздействием электромагнитных сил

$$(14) \qquad U_\infty = \int\limits_G \mathbf{v}\mathbf{f}d^3\mathbf{r} \Big/ \int\limits_S T_{x_j}(\mathbf{v})\,n_j\,dS.$$

Соотношение (14) решает поставленную задачу. Применим (14) к частному случаю движения сферы под действием электромагнитной силы $\mathbf{f}$ (соотношение 1)):

$$(15) \qquad \int\limits_S T_{x_j}(\mathbf{v})\,n_j\,dS = 6\pi\rho\nu V_\infty a,$$

$$v_r = V_\infty \cos\vartheta\left[1 - \frac{3}{2}\frac{a}{r} + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^3\right], \quad v_\vartheta = -V_\infty \sin\vartheta\left[1 - \frac{3}{4}\frac{a}{r} - \frac{1}{4}\left(\frac{a}{r}\right)^3\right].$$

Соотношения (15) для обычного стоксова обтекания сферы можно найти, например, в [2]. Подставляя (1), (15) в (14), получаем скорость движения сферы U_∞, определенную соотношением (2).

В заключение автор выражает признательность В. И. Яковлеву за обсуждение работы и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Хоничев В. И., Яковлев В. И.** Движение шара в безграничной проводящей жидкости, вызванное переменным магнитным диполем, расположенным внутри шара // ПМТФ.— 1978.— № 6.
2. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Гидродинамика.— М.: Наука, 1988.

г. Новосибирск *Поступила 17/IV 1990 г.*

УДК 534.222.2

А. С. Иванов, С. Д. Любарский, С. П. Хурс

ДВИЖЕНИЕ ТЕЛ В СЛОЕ СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ

Исследование движения твердых тел в слое сыпучей среды с различными физическими свойствами представляет большой практический интерес. В [1—3] и ряде других работ рассматривалось движение тел в двухфазных (твердая фаза — газ) средах. Методика и результаты расчета проникания твердых тел, движущихся с большими скоростями, в массив грунта, который в частном случае можно рассматривать как сыпучую среду, приведены в [4]. Методика расчета параметров движения тела, представленная в [4], применима тогда, когда перед движущимся телом в среде формируется ударная волна, что характерно для сверхзвуковых режимов движения. В [5] указано, что скорость звука в песке порядка 100 м/с, приведены эмпирические зависимости для определения замедления снаряда, движущегося как с дозвуковой, так и со сверхзвуковой скоростью. Однако в [5] не приводятся данные о сопротивлении песка, что не позволяет использовать известные зависимости для расчета движения тела в сыпучей среде под действием приложенной к нему силы. Из известных зависимостей для расчета сопротивления песка можно отметить формулу Понселе, значения эмпирических коэффициентов которой для сверхзвукового режима движения приведены в [6].

В настоящей работе представлены экспериментальные данные о сопротивлении сыпучей среды движущемуся в ней телу, эмпирические зависимости сопротивления среды от ее прочностных характеристик и скорости тела при дозвуковом режиме движения, результаты расчета метания тел двухфазным потоком в слой сыпучей среды.

Для исследования влияния скорости движения тела на сопротивление сыпучей среды использовалась экспериментальная установка, схема которой представлена на рис. 1. К коробу размерами 0,42×0,80×1,10 м,