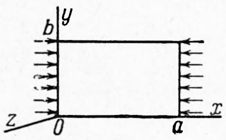
К УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ ПЛАСТИН ПО ТЕОРИИ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ

Г. В. Иванов

(*Новосибирск*)

Рассматривается устойчивость равновесия сжатой в одном направлении пластины (фиг. 1), края которой либо оперты, либо два края оперты, а два других свободны. Критические напряжения определяются по критерию [1], с тем ограничением, что при переходе из основного состояния в соседнее не допускаются возмущения, вызывающие разгрузку. Материал предполагается несжимаемым. Критические напряжения, найденные по теории пластического течения, несколько меньше, но весьма близки к критическим и по критерию [1], и по критерию Шенли напряжениям, найденным по теории малых упруго-пластических деформаций [1].

1. В рассматриваемой задаче в основном состоянии осуществляется одноосное напряженное состояние



Фиг. 1

$$\sigma_x = -\sigma_0, \qquad \sigma_0 > 0$$

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \tag{1.1}$$

Подставляя (1.1) в уравнения пластического течения несжимаемого материала [2], найдем, что напряжение и деформации в основном состоянии связаны уравнениями

$$d\varepsilon_x = -\frac{1}{E'}\,d\sigma_0, \qquad d\varepsilon_y = d\varepsilon_z = -\frac{1}{2}\,d\varepsilon_x \tag{1.2}$$

где E' — касательный модуль. При сколь угодно малых отклонениях от основного состояния

$$\sigma_x = -\sigma_0 + \sigma_x^{\times}, \quad \sigma_y = \sigma_y^{\times}, \quad \tau_{xy} = \overset{\times}{\tau}_{xy}, \quad \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$
$$T = T_0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\sigma_x^{\times} + {}^1/_2\sigma_y^{\times}\right), \quad T_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_0 \tag{1.3}$$

---

[1] Отметим, что в статье [1] на стр. 51 при рассмотрении случая

$$T + \frac{\sigma^{\times}(T)}{\sqrt{3}}\operatorname{sign}\sigma < T' + \frac{\sigma^{\times}(T')}{\sqrt{3}}\operatorname{sign}\sigma'$$

допущена ошибка. В этом случае должно быть

$$\sigma^{\times}(T) = E'(T')\,\varepsilon^{\times}(T) + E\,[\varepsilon^{\times}(T) - \varepsilon^{\times}(T')] + E\,(\varepsilon - \varepsilon') - (\sigma - \sigma')$$

Полагаем

$$\sigma \geqslant \sigma' > 0, \qquad \sigma = \sigma' + E'(T')\,(\varepsilon - \varepsilon')$$

Тогда $\sigma^{\times}(T) < \sigma^{\times}(T') - (\sigma - \sigma')$ и, следовательно,

$$\varepsilon^{\times}(T) - \varepsilon^{\times}(T') + \varepsilon - \varepsilon' < 0, \qquad \sigma^{\times}(T) < E'(T')\,\varepsilon^{\times}(T)$$

т. е.

$$E^{\times}(T) > E'(T') \qquad \text{при } \varepsilon^{\times}(T) < 0,\ \varepsilon^{\times}(T) \leqslant \varepsilon^{\times}(T')$$

Случай же $\varepsilon^{\times}(T) > 0$, $\varepsilon^{\times}(T) \geqslant \varepsilon^{\times}(T')$ невозможен, так как $\varepsilon \geqslant \varepsilon'$.

Кроме того, в статье на стр. 51 в случае

$$T'' + \frac{\sigma^{\times}(T'')}{\sqrt{3}}\operatorname{sing}\sigma'' = T' + \frac{\sigma^{\times}(T')}{\sqrt{3}}\operatorname{sing}\sigma'$$

не отмечено, что принимается $E'(T') = E'(T'')$.

величины с косым крестом сколь угодно малы. Ограничимся рассмотрением только таких сколь угодно малых отклонений от основного состояния, в процессе возникновения которых не происходит разгрузки, т. е. выполнены неравенства

$$\sigma_0 - \sigma_x^\times + {}^1/_2\,\sigma_y^\times \geqslant \sigma_s, \qquad d\,(\sigma_0 - \sigma_x^\times + {}^1/_2\,\sigma_y^\times) > 0$$

где σ_s — предел текучести при простом растяжении. Подставляя (1.3) в уравнения пластического течения несжимаемого материала [2], ограничиваясь сохранением в них сколь угодно малых величин только первого порядка и учитывая (1.2), найдем, что

$$d\varepsilon_x^\times = d\,\frac{\sigma_x^\times - {}^1/_2\sigma_y^\times}{E'}, \qquad d\sigma_y^\times + 2GF\,(T_0)\,dT_0\sigma_y^\times = 2G\,(d\varepsilon_x^\times + 2d\varepsilon_y^\times)$$

$$d\tau_{xy}^\times + 2GF\,(T_0)\,dT_0\tau_{xy}^\times = Gd\gamma_{xy}^\times \qquad \left(F\,(T_0) = \frac{3}{2T_0}\left(\frac{1}{E'} - \frac{1}{E}\right)\right) \tag{1.4}$$

Здесь G — модуль сдвига. Согласно гипотезам Кирхгофа

$$\varepsilon_x^\times = e_1 - z\varkappa_1, \quad \varepsilon_y^\times = e_2 - z\varkappa_2, \quad \gamma_{xy}^\times = 2\,(e_{12} - z\varkappa_{12})$$
$$\varkappa_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varkappa_2 = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \varkappa_{12} = \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} \tag{1.5}$$

Если кривизны и кручение срединной поверхности известны как функции параметра нагрузки, т. е. известны

$$\varkappa_1\,(\xi), \quad \varkappa_2\,(\xi), \quad \varkappa_{12}\,(\xi), \quad \xi \in [\tau_s, T_0] \tag{1.6}$$

то из (1.4), (1.5) нетрудно найти моменты

$$M_x = \int \sigma_x^\times z\,dz, \qquad M_y = \int \sigma_y^\times z\,dz, \qquad M_{xy} = \int \tau_{xy}^\times z\,dz$$

(интегрирование проводится в пределах от $-h/2$ до $+h/2$), именно

$$M_x = {}^1/_2 M_y - {}^1/_{12} E'h^3\varkappa_1, \quad M_y = -D^\times(\varkappa_1 + 2\varkappa_2), \quad M_{xy} = -C^\times\varkappa_{12} \tag{1.7}$$

Здесь $D^\times$, $C^\times$ — функционалы от функций (1.6)

$$D^\times = \frac{1}{2}\,\frac{{}^1/_9 Eh^3}{\varkappa_1(T_0) + 2\varkappa_2(T_0)}\Big[\varkappa_1(\tau_s) + 2\varkappa_2(\tau_s) +$$
$$+ \int_{\tau_s}^{T_0}\Big(\exp 2G\int_{\tau_s}^{\tau} F\,(T_0)\,dT_0\Big)\frac{d}{d\tau}(\varkappa_1 + 2\varkappa_2)\,d\tau\Big]\exp\Big(-2G\int_{\tau_s}^{T_0} F\,(T_0)\,dT_0\Big)$$

$$C^\times = \frac{1}{2}\,\frac{{}^1/_9 Eh^3}{\varkappa_{12}(T_0)}\Big[\varkappa_{12}(\tau_s) + \int_{\tau_s}^{T_0}\Big(\exp 2G\int_{\tau_s}^{\tau} F\,(T_0)\,dT_0\Big)\frac{d\varkappa_{12}}{d\tau}\,d\tau\Big] \times$$
$$\times \exp\Big(-2G\int_{\tau_s}^{T_0} F\,(T_0)\,dT_0\Big)$$

Нетрудно доказать тем же способом, каким доказывается аналогичное утверждение в работе [1], что функционалы $D^\times$, $C^\times$ в классе кусочно непрерывных с кусочно непрерывными производными функций (1.6), удовлетворяющих при $\xi \in [\tau_s, T_0]$ какому-либо из неравенств

$$\varkappa_1(T_0) + 2\varkappa_2(T_0) > 0, \qquad \varkappa_1(T_0) + 2\varkappa_2(T_0) \geqslant \varkappa_1(\xi) + 2\varkappa_2(\xi)$$

$$\varkappa_1(T_0) + 2\varkappa_2(T_0) < 0, \qquad \varkappa_1(T_0) + 2\varkappa_2(T_0) \leqslant \varkappa_1(\xi) + 2\varkappa_2(\xi) \quad (1.8)$$

$$\varkappa_{12}(T_0) > 0, \quad \varkappa_{12}(T_0) \geqslant \varkappa_{12}(\xi); \quad \varkappa_{12}(T_0) < 0, \quad \varkappa_{12}(T_0) \leqslant \varkappa_{12}(\xi)$$

достигают минимума при

$$\varkappa_1(\xi) + 2\varkappa_2(\xi) = \text{const}, \qquad \varkappa_{12}(\xi) = \text{const}, \qquad \xi \in [\tau_s, T_0]$$

т. е. имеют место неравенства (1.9)

$$D^\times \geqslant \frac{1}{2} D \exp\left(-2G \int_{\tau_s}^{T_0} F(T_0)\,dT_0\right) = D^{\times\times}, \quad C^\times \geqslant D^{\times\times} \qquad \left(D = \frac{Eh^3}{9}\right)$$

Если $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ удовлетворяют какому-либо из неравенств

$$\varkappa_1(T_0) > 0, \quad \varkappa_1(T_0) \geqslant \varkappa_1(\xi); \qquad \varkappa_1(T_0) < 0, \quad \varkappa_1(T_0) \leqslant \varkappa_1(\xi) \qquad (1.10)$$

$$\varkappa_2(T_0) > 0, \quad \varkappa_2(T_0) \geqslant \varkappa_2(\xi); \qquad \varkappa_2(T_0) < 0, \quad \varkappa_2(T_0) \leqslant \varkappa_2(\xi); \quad \xi \in [\tau_s, T_0]$$

и $\varkappa_1(T_0)\,\varkappa_2(T_0) > 0$, то они заведомо удовлетворяют и какому-либо из неравенств (1.8).

2. Умножая уравнение равновесия пластины

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \sigma_0 h \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

на w и интегрируя по частям, находим

$$\sigma_0 h = -\left[\int_\Omega \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 d\omega\right]^{-1} \int_\Omega \left(M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2M_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right) d\omega \qquad (2.1)$$

Получающиеся при этом контурные интегралы исчезают, если края пластины оперты, либо два края оперты, а два других свободны. Подставляя (1.7) в (2.1), получим

$$\sigma_0 h = \left[\int_\Omega \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 d\omega\right]^{-1} \int_\Omega \left[\frac{1}{12}E' h^3 \varkappa_1^2 + \frac{1}{2} D^\times (\varkappa_1 + 2\varkappa_2)^2 + 2C^\times \varkappa_{12}^2\right] d\omega$$

За критическое напряжение, обозначая его через σ_{0*}, принимаем

$$\sigma_{0*} h = \min \left[\int_\Omega \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 d\omega\right]^{-1} \int_\Omega \left[\frac{1}{12}E' h^3 \varkappa_1^2 + \frac{1}{2} D^\times (\varkappa_1 + 2\varkappa_2)^2 + 2C^\times \varkappa_{12}^2\right] d\omega$$

минимум ищется в классе функций w, удовлетворяющих соответствующим граничным условиям и неравенствам (1.8), (1.10). Ввиду неравенств (1.9), задача сводится к отысканию минимума функционала (2.2)

$$\sigma_{0*} h = \min \left[\int_\Omega \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 d\omega\right]^{-1} \int_\Omega \left[\frac{1}{12}E' h^3 \varkappa_1^2 + \frac{1}{2} D^{\times\times} (\varkappa_1 + 2\varkappa_2)^2 + 2D^{\times\times} \varkappa_{12}^2\right] d\omega$$

в классе функций w, удовлетворяющих соответствующим граничным условиям.

3. Рассмотрим цилиндрическую форму потери устойчивости пластины. Полагаем, что в случае, когда края $x = 0$, $x = a$ оперты, а края $y = 0$, $y = b$ свободны, реализуется цилиндрическая форма потери устойчи-

вости, $\varkappa_2 = 0$. В этом случае

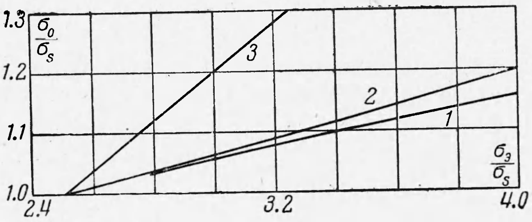
$$\sigma_{0*}h = \frac{1}{2}\left(\frac{E'h^3}{6} + D^{\times\times}\right) \min \left[\int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 d\omega\right]^{-1} \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 d\omega$$

минимум ищется в классе функций w, удовлетворяющих условию $w = 0$ при $x = 0$, $x = a$. Очевидно

$$\frac{\sigma_{0*}}{\sigma_э} = \frac{1}{4}\left[3g + \exp\left(-2G\int\limits_{\tau_s}^{\sigma^*} F(T_0)\, dT_0\right)\right] \qquad \left(\tau_* = \frac{\sigma_{0*}}{\sqrt{3}},\ g = \frac{E'}{E},\ \sigma_э = \frac{\pi^2 D}{a^2 h}\right)$$

Здесь $\sigma_э$ — критическое напряжение при упругих деформациях. При линейном упрочнении ($E' = \mathrm{const}$)

$$\sigma_{0*} = \frac{1}{4}\left[3g + \left(\frac{\sigma_{0*}}{\sigma_s}\right)^{\frac{g-1}{g}}\right] \qquad (3.1)$$

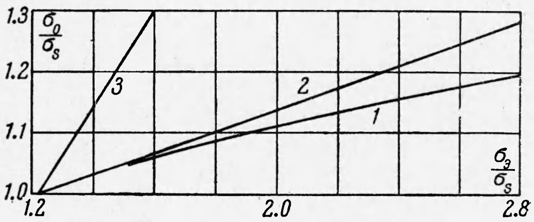


Фиг. 2

При решении этой задачи в постановке Шенли по теории пластического течения критическое напряжение, (обозначим его через $\sigma_0{}^*$), равно [2]

$$\sigma_0{}^* / \sigma_э = {}^1/_4 (1 + 3g) \qquad (3.2)$$

(в формуле, указанной в работе [2], имеется опечатка: в числителе и знаменателе следует опустить $\sqrt{3}$).



Фиг. 3

При решении по теории малых упруго-пластических деформаций критическое напряжение и в предлагаемой постановке и в постановке Шенли равно [3]

$$\frac{\sigma_{0*}}{\sigma_э} = \frac{1}{4}\left(3g + \frac{E_c}{E}\right)$$

Здесь σ_{0*} — критическое напряжение, E_c — секущий модуль. При линейном упрочнении

$$\frac{\sigma_{0*}}{\sigma_э} = \frac{1}{4} g \left(3 + \frac{1}{1 + (g-1)\,\sigma_s / \sigma_{0*}}\right) \qquad (3.3)$$

Сравнение условий (3.1) — (3.3) для случая $g = 0.2$ приведено на фиг. 2. Кривые *1*, *2* соответствуют условиям (3.1), (3.3), прямая *3* — условию (3.2).

В случае идеальной пластичности условия (3.1), (3.2) дают одно и то же значение критического напряжения, равное ${}^1/_4\sigma_э$; при условии (3.3) будем иметь $\sigma_{0*} / \sigma_э = {}^1/_4 E_c / E$.

4. Устойчивость пластины, все края которой оперты. Полагая

$$w = c \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}$$

из (2.2) находим

$$\sigma_{0*}h = \min \frac{2\pi^2 D^{\times\times}}{b^2}\left[\left(1 + \frac{E'h^2}{6D^{\times\times}}\right)\frac{1}{4\lambda^2} + \lambda^2 + 2\right], \qquad \lambda = \frac{a}{bm}, \qquad n = 1$$

Ограничимся случаем, когда отношение a / b достаточно велико. В этом случае

$$\frac{\sigma_{0*}}{\sigma_э} = \frac{D^{\times\times}}{D}\left[1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{E'h^3}{6D^{\times\times}}\right)^{1/2}\right] \qquad \left(\sigma_э = \frac{4\pi^2 D}{b^2 h}\right)$$

Здесь $\sigma_э$ — критическое напряжение при упругих деформациях. При линейном упрочнении

$$\frac{\sigma_{0*}}{\sigma_э} = \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{1}{2}\left[1 + 3g\left(\frac{\sigma_s}{\tau_{0*}}\right)^{\frac{g-1}{g}}\right]^{1/2}\right\}\left(\frac{\sigma_{0*}}{\sigma_s}\right)^{\frac{g-1}{g}} \tag{4.1}$$

При решении этой задачи в постановке Шенли по теории пластического течения критическое напряжение $\sigma_0{}^*$ равно [4]

$$\sigma_0{}^* / \sigma_э = {}^1/_2\,[1 + {}^1/_2\sqrt{1 + 3g}] \tag{4.2}$$

При решении по теории малых упруго-пластических деформаций критическое напряжение и в предлагаемой постановке и в постановке Шенли равно [3]

$$\sigma_{0*} / \sigma_э = {}^1/_2\,[1 + {}^1/_2\sqrt{1 + 3g}]\, E_c / E$$

При линейном упрочнении

$$\frac{\sigma_{0*}}{\sigma_э} = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2}\sqrt{4 + 3(g-1)\frac{\sigma_s}{\sigma_{0*}}}\right]\frac{g}{1 + (g-1)\sigma_s / \sigma_{0*}} \tag{4.3}$$

Сравнение условий (4.1) — (4.3) для случая $g = 0.2$ приведено на фиг. 3. Кривые *1*, *2* соответствуют условиям (4.1), (4.3); прямая *3* — условию (4.2).

В случае идеальной пластичности условия (4.1), (4.2) дают одно и то же значение критического напряжения, равное ${}^3/_4\sigma_э$, а условие (4.3) дает $\sigma_{0*} / \sigma_э = {}^3/_4 E_c / E$.

Поступила 18 X 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванов Г. В. Об устойчивости равновесия при неупругих деформациях. ПМТФ, 1961, № 1.
2. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. Гостехиздат, 1956.
3. Стоуэлл Э. Обобщенная теория потери устойчивости стержней и пластинок при пластических деформациях. ИЛ, Сб. пер. Механика, 1952, вып. 2.
4. Вольмир А. С. Об устойчивости пластинок при пластических деформациях. Расчет пространственных конструкций. Госстройиздат, Сб. статей, 1961, вып. VI.