

ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ ПРИ ОДНОРОДНОМ
ОТСАСЫВАНИИ НА ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЕ
В ОСЦИЛЛИРУЮЩЕМ ПОТОКЕ

И. В. Пушкарева

(Новосибирск)

Рассматривается нестационарное течение несжимаемой жидкости в ламинарном пограничном слое с однородным отсасыванием при продольном обтекании плоской пластины, когда внешний поток представляет собой течение с постоянной скоростью, на которое наложено синусоидальное возмущение, сносимое потоком, аналогично работе [1]. Исследуется устойчивость такого течения в пограничном слое.

1. Поле скорости в пограничном слое при наличии периодических возмущений во внешнем потоке. Положим, что скорость внешнего потока имеет вид

$$U(x, t) = U_0[1 + \lambda \cos \omega(x / U_0 - t)] \quad (1.1)$$

и вдоль всей обтекаемой поверхности пластины производится отсасывание жидкости с постоянной скоростью $v_0 < 0$.

Уравнения нестационарного двумерного пограничного слоя имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Граничные условия

$$\begin{aligned} u(x, y, t) = 0, \quad v(x, y, t) = v_0 = \text{const} \quad (y = 0) \\ u(x, y, t) \rightarrow U(x, t) \quad (y \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

Здесь $u(x, y, t)$ и $v(x, y, t)$ — соответственно продольная и поперечная составляющие скорости в пограничном слое, p — давление, ν — кинематический коэффициент вязкости, ось x направлена вдоль пластины, ось y перпендикулярна пластине.

В уравнениях (1.2) перейдем к безразмерным переменным

$$u = U_0 u^0, \quad v = |v_0| v^0, \quad \xi = \frac{v_0^2 x}{U_0 \nu}, \quad \eta = \frac{|v_0| y}{\nu}, \quad \tau = \omega \left(\frac{x}{U_0} - t \right) \quad (1.3)$$

Ищем такие решения для u^0 и v^0 , которые будут функциями только η и τ . Эти решения будут применимы, начиная только с некоторого расстояния от передней кромки пластины. Такие решения должны удовлетворять следующим уравнениям:

$$\frac{\partial^2 u^0}{\partial \eta^2} + \gamma(1 - u^0) \frac{\partial u^0}{\partial \tau} - v^0 \frac{\partial u^0}{\partial \eta} = \frac{\lambda^2}{2} \gamma \sin 2\tau, \quad \gamma \frac{\partial u^0}{\partial \tau} + \frac{\partial v^0}{\partial \eta} = 0 \quad (1.4)$$

с граничными условиями

$$u^0 = 0, \quad v^0 = -1 \quad (\eta = 0), \quad u^0 \rightarrow 1 + \lambda \cos \tau \quad (\eta \rightarrow \infty), \quad \gamma = \nu \omega / v_0^2$$

Предполагая $\lambda \ll i$, решение уравнений (1.4) будем искать в виде

$$\begin{aligned} u^\circ(\eta, \tau) &= u_0(\eta) + \lambda u_1(\eta, \tau) + \lambda^2 u_2(\eta, \tau) + \dots \\ v^\circ(\eta, \tau) &= w_0(\eta) + \lambda w_1(\eta, \tau) + \lambda^2 w_2(\eta, \tau) + \dots \end{aligned} \quad (1.5)$$

Подставляя выражения (1.5) в уравнения (1.4) и собирая члены при одинаковых степенях λ , получаем системы уравнений для коэффициентов разложений (1.5).

Члены при нулевой степени λ дают стационарные уравнения

$$w_0 \frac{\partial w_0}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 u_0}{\partial \eta^2}, \quad \frac{\partial w_0}{\partial \eta} = 0 \quad (1.6)$$

с граничными условиями

$$u_0 = 0, \quad w_0 = -1 \quad (\eta = 0), \quad u_0 \rightarrow 1 \quad (\eta \rightarrow \infty)$$

Это — известные уравнения для асимптотического профиля отсасывания на плоской пластине. Их решение имеет вид

$$u_0 = 1 - e^{-\eta}, \quad w_0 = -1 \quad (1.7)$$

Члены с λ^1 дают уравнения

$$L(u_1, w_1) = 0, \quad K(u_1, w_1) = 0 \quad (1.8)$$

с граничными условиями

$$u_1 = w_1 = 0 \quad (\eta = 0), \quad u_1 \rightarrow \cos \tau \quad (\eta \rightarrow \infty)$$

Члены с λ^2 дают уравнения

$$\begin{aligned} L(u_2, w_2) &= \frac{\gamma}{2} \sin 2\tau + \gamma u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \tau} + w_1 \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \\ K(u_2, w_2) &= 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

с граничными условиями

$$u_2 = w_2 = 0 \quad (\eta = 0), \quad u_2 \rightarrow 0 \quad (\eta \rightarrow \infty)$$

Члены с λ^k ($k > 2$) дают уравнения

$$\begin{aligned} L(u_k, w_k) &= \gamma \sum_{i=1}^{k-1} u_i \frac{\partial u_{k-i}}{\partial \tau} + \sum_{i=1}^{k-1} w_i \frac{\partial u_{k-i}}{\partial \eta} \\ K(u_k, w_k) &= 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

с граничными условиями

$$u_k = w_k = 0 \quad (\eta = 0), \quad u_k \rightarrow 0 \quad (\eta \rightarrow \infty)$$

Здесь

$$\begin{aligned} L(u, w) &= \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \gamma e^{-\eta} \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial \eta} - e^{-\eta} w \\ K(u, w) &= \gamma \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (1.11)$$

В силу того что уравнения (1.8) линейны, однородны и их коэффициенты не зависят от переменной τ , решения уравнений (1.9) будем искать в виде

$$u_1 = \varphi_{01}(\eta) e^{i\tau} + \bar{\varphi}_{01}(\eta) e^{-i\tau}, \quad w_1 = \psi_{01}(\eta) e^{i\tau} + \bar{\psi}_{01}(\eta) e^{-i\tau} \quad (1.12)$$

(черта сверху обозначает здесь сопряженную функцию).

Подставляя (1.12) в (1.8), получаем для φ_{01} и ψ_{01} следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\varphi_{01}'' + \varphi_{01}' + i\gamma e^{-\eta}\varphi_{01} - e^{-\eta}\psi_{01} = 0, \quad \psi_{01}' + i\gamma\varphi_{01} = 0 \quad (1.13)$$

с граничными условиями

$$\varphi_{01} = \psi_{01} = 0 \quad (\eta = 0), \quad \varphi_{01} \rightarrow 1/2 \quad (\eta \rightarrow \infty)$$

Решение уравнений (1.13) имеет следующий вид:

$$\varphi_{01}(\eta) = e^{-\eta} \int_0^{\eta} Q(z) e^z dz, \quad \psi_{01}(\eta) = e^{-\eta} \int_0^{\eta} T(z) e^z dz \quad (1.14)$$

где

$$Q(z) = e^{-z/2} Z_1(2\sqrt{i\gamma} e^{-z/2}), \quad T(z) = Z_0(2\sqrt{i\gamma} e^{-z/2}) \\ Z_i(x) = C_{1i} J_i(x) + C_{2i} Y_i(x)$$

$$C_{11} = \frac{\pi}{2} \sqrt{i\gamma} \frac{Y_0(2\sqrt{i\gamma})}{J_0(2\sqrt{i\gamma})}, \quad C_{12} = -\frac{\pi}{2} \sqrt{i\gamma}, \quad C_{10} = -\sqrt{i\gamma} C_{11}, \quad C_{20} = \frac{\pi}{2} i\gamma$$

Здесь $J_i(x)$ и $Y_i(x)$ — функции Бесселя соответственно первого и второго рода.

Решение уравнений (1.9) будем искать в виде

$$u_2 = f_2(\eta) + \varphi_{11}(\eta) e^{2i\tau} + \overline{\varphi_{11}}(\eta) e^{-2i\tau}, \quad w_2 = \psi_{11}(\eta) e^{2i\tau} + \overline{\psi_{11}}(\eta) e^{-2i\tau} \quad (1.15)$$

Аналогично для функций u_k , w_k решения уравнений (1.10) ищем в виде

при $k = 2n + 1$

$$u_k = \sum_{m=0}^n (\varphi_{km} e^{i(2m+1)\tau} + \overline{\varphi_{km}} e^{-i(2m+1)\tau}) \\ w_k = \sum_{m=0}^n (\psi_{km} e^{i(2m+1)\tau} + \overline{\psi_{km}} e^{-i(2m+1)\tau})$$

при $k = 2n$

$$u_k = f_k(\eta) + \sum_{m=1}^n (\varphi_{km} e^{i2m\tau} + \overline{\varphi_{km}} e^{-i2m\tau}) \\ w_k = \sum_{m=1}^n (\psi_{km} e^{i2m\tau} + \overline{\psi_{km}} e^{-i2m\tau})$$

Подставляя (1.15) в (1.9), получаем для f_2 , φ_{11} и ψ_{11} систему уравнений

$$f_2'' + f_2' = \varphi_{01}' \overline{\psi_{01}} + \overline{\varphi_{01}'} \psi_{01} \quad (1.16)$$

$$\varphi_{11}'' + \varphi_{11}' + 2i\gamma e^{-\eta}\varphi_{11} - e^{-\eta}\psi_{11} = -1/4 i\gamma + i\gamma\varphi_{01}^2 + \varphi_{01}'\psi_{01} \quad (1.17)$$

$$\psi_{11}' + 2\gamma\varphi_{11} = 0 \quad (1.18)$$

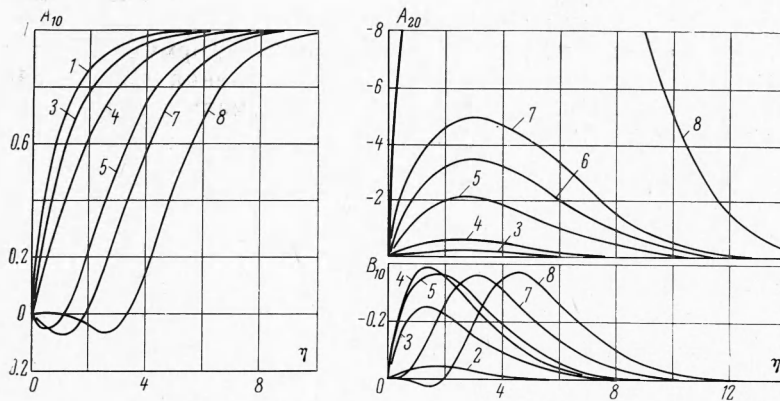
с граничными условиями

$$f_2 = \varphi_{11} = \psi_{11} = 0 \quad (\eta = 0), \quad f_2 \rightarrow 0, \quad \varphi_{11} \rightarrow 0 \quad (\eta \rightarrow \infty)$$

Решение для $f_2(\eta)$ можно написать в виде

$$f_2(\eta) = e^{-\eta} \int_0^{\eta} e^t \int_t^{\infty} [\varphi_{01}'(z) \overline{\psi_{01}}(z) + \overline{\varphi_{01}'}(z) \psi_{01}(z)] dz dt \quad (1.19)$$

Решения для φ_{11} и ψ_{11} , а также и для остальных φ_{km} и ψ_{km} можно формально построить, определив функцию Грина для однородной системы (1.13) с нулевыми граничными условиями. Функцию Грина нетрудно получить, используя решение (1.14). Для функций $f_k(\eta)$ решения аналогичны (1.19). Для конкретного построения функций f_k , φ_{km} и ψ_{km} требуется применение ЭВМ.



Фиг. 1

Подобно тому как сделано в [1], решения для u_1 , w_1 и u_2 , w_2 можно представить в виде

$$\begin{aligned} u_1(\eta, \tau) &= A_{10}(\eta) \cos \tau + B_{10}(\eta) \sin \tau \\ w_1(\eta, \tau) &= A_{10}^*(\eta) \cos \tau + B_{10}^*(\eta) \sin \tau \\ u_2(\eta, \tau) &= A_{20}(\eta) + A_{21}(\eta) \cos 2\tau + B_{21}(\eta) \sin 2\tau \\ w_2(\eta, \tau) &= A_{21}^*(\eta) \cos 2\tau + B_{21}^*(\eta) \sin 2\tau \end{aligned} \quad (1.20)$$

причем

$$\begin{aligned} A_{10} &= 2\operatorname{Re} \varphi_{01}, & B_{10} &= -2\operatorname{Im} \varphi_{01}, & A_{10}^* &= 2\operatorname{Re} \psi_{01} \\ B_{10}^* &= -2\operatorname{Im} \psi_{01}, & A_{20} &= f_2, & A_{21} &= 2\operatorname{Re} \varphi_{11} \\ B_{21} &= -2\operatorname{Im} \varphi_{11}, & A_{21}^* &= 2\operatorname{Re} \psi_{11}, & B_{21}^* &= -2\operatorname{Im} \psi_{11} \end{aligned}$$

На фиг. 1 представлены функции A_{10} , B_{10} и A_{20} , где кривым 1, ..., 8 соответствуют следующие значения γ .

Кривые	1	2	3	4	5	6	7	8
$\gamma =$	0	0.1	0.5	1	3	5	7	30

Сравним полученное решение с решением [2] для пограничного слоя с однородным отсасыванием, когда внешний поток имеет скорость $U(t) = U_0(1 + \lambda \cos \omega t)$. Так же, как и для пограничных слоев без отсасывания [1], поведение течения в пограничном слое в двух этих случаях существенно различно. Интересно отметить, что для обоих случаев поведение течения в пограничном слое с однородным отсасыванием качественно совпадает с поведением соответствующего течения в пограничном слое без отсасывания.

2. Исследование устойчивости течения в пограничном слое. Основное течение, устойчивость которого исследуется, представляет собой полученное в п. 1 течение в пограничном слое плоской пластины при однородном отсасывании, когда внешний поток задан выражением (1.1). Пренебрегая, как это обычно делается при рассмотрении устойчивости течений в погра-

ничном слое, неоднородностью потока по длине и поперечной составляющей скорости, поток в пограничном слое можно приближенно считать плоскопараллельным, продольная скорость которого равна $u(y, t)$.

Используем простейшее «квазистационарное» определение устойчивости нестационарного течения, т. е. для каждого момента времени определяем значение критического числа Рейнольдса R как для стационарного течения, и как искомое берем минимальное значение R в пределах одного периода для рассматриваемой задачи.

Для исследования устойчивости применяется формула Линя [3] для приближенного определения минимального значения числа Рейнольдса на нейтральной кривой, получаемой в методе малых колебаний теории гидродинамической устойчивости.

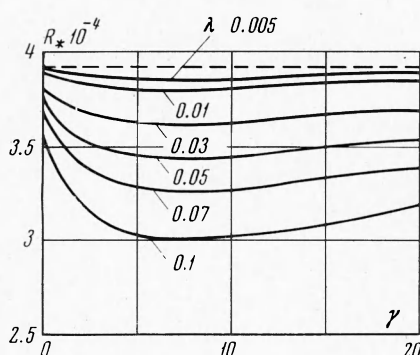
Формула Линя имеет вид

$$R \approx \frac{25 \bar{U}'(0)}{c^4}, \quad c = \bar{U}(y_c) \quad (2.1)$$

где y_c — корень уравнения

$$-\pi \bar{U}'(0) \left\{ 3 - 2 \frac{\bar{U}'(0) y_c}{\bar{U}(y_c)} \right\} \frac{\bar{U}(y_c) \bar{U}''(y_c)}{\bar{U}'^3(y_c)} = 0.58 \quad (2.2)$$

Безразмерные переменные введены следующим образом: (2.3)



Фиг. 2

$$y = \delta \bar{y}, \quad u = U \bar{U}, \quad R = U \delta / \nu$$

Здесь δ — толщина пограничного слоя, определенная как расстояние от стенки до точки, где скорость $u = 0.999 U$ (штрих обозначает дифференцирование по \bar{y}).

На фиг. 2 представлена зависимость критического числа Рейнольдса

$$R_* = R \frac{U_0 \delta^*}{U \delta}$$

построенного по толщине вытеснения $\delta^* = \nu / |v_0|$ и скорости U_0 , от безразмерного параметра γ и амплитуды колебания λ . Пунктирная линия

соответствует $R_* = 3.93 \cdot 10^4$. Такое значение критического числа Рейнольдса R_* дает формула Линя для стационарного асимптотического профиля отсасывания (1.7).

Анализируя влияние частоты ω на значение критического числа Рейнольдса R_* , видно, что, так же как и для пограничного слоя без отсасывания [1], имеется наиболее «опасный» диапазон частот, в котором число R_* принимает минимальные значения.

Поступила 12 VIII 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. П у ш к а р е в а И. В. Ламинарный пограничный слой на плоской пластине в осциллирующем потоке. ПМТФ, 1968, № 4.
2. S t a r t J. T. A solution of the Navier — Stokes and energy equations illustrating the response of skin friction and temperature of an infinite plate thermometer to fluctuations in the stream velocity. Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1955, vol. 231, No. 1184.
3. К о ч и н Н. Е., К и б е л ь И. А., Р о з е Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. 2, М., Физматгиз, 1963.