

Фиг. 3

Анализируя полученные результаты (фиг. 1, 2 и табл. 2), можно сделать вывод, что при пропорциональном изменении нагрузки (если нагрузка не убывает) гипотеза пропорциональности девиаторов для теории ползучести удовлетворительно выполняется или, по крайней мере, переменна нагрузки не увеличивает величину отклонения правых и левых частей (4) и (5).

На участке, следующем за частичной разгрузкой (участок III, фиг. 3), деформации ползучести сначала не возрастают (имеется даже едва заметный возврат), а затем постепенно растут, причем деформация удлинения начинает возрастать раньше, чем деформация сдвига, и с большей скоростью. В этом случае мы получаем большой процент отклонения соотношения (2) от результатов экспериментов. Соотношение же (1) будет выполняться почти с той же точностью, что и в последней точке предыдущего участка II, так как деформации ползучести на третьем участке мало изменяются.

Поступила  
10 VIII 1960

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Наместников В. С. Об одной гипотезе в теории трехосной ползучести. Изв. СО АН СССР, 1960, № 2.
- 2 Наместников В. С. О ползучести при постоянных нагрузках в условиях сложного напряженного состояния. Изв. АН СССР. ОТН, 1957, № 4.

#### К ТЕОРИИ ВДАВЛИВАНИЯ ШТАМПА В ПЛАСТИЧЕСКУЮ СРЕДУ

В. А. Жалнин, Д. Д. Ивлев

(Воронеж)

Прандтль [1] рассмотрел задачу о вдавливании жесткого гладкого штампа в пластическое полупространство. Позднее Хилл [2] предложил другое решение этой задачи. Оказалось, что граничные условия не определяют единственное решение. На фиг. 1 представлены возможные решения; во всех случаях величина предельной нагрузки оказывается равной

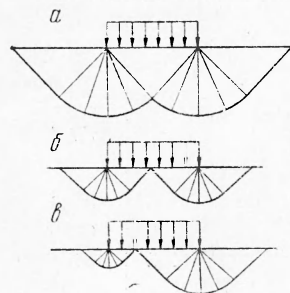
$$p = -k(\pi + 2)$$

однако построение поля скоростей существенно различно.

Непосредственное обобщение задачи Прандтля состоит в определении предельной нагрузки для штампа в случае, когда граница штампа и среды очерчена по некоторой кривой линии. В этом случае также сохраняются возможности построения различных решений, соответствующих, по крайней мере, вариантам фиг. 2.

В общем случае предельная нагрузка будет не совпадать для различных вариантов решений, поэтому, следуя Генки [3], будем предполагать, что истинное решение соответствует минимальным предельным усилиям.

В настоящей заметке рассматривается одно из самых простых и непосредственных обобщений решения Прандтля: случай, когда контуры гладкого штампа и пластической среды ограничены окружностью одного и того же радиуса (фиг. 2).



Фиг. 1

В этом случае исследование удобно вести в полярных координатах. Следует использовать уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{\rho\theta}}{\rho} = 0 \quad (1)$$

Условие пластичности

$$(\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{\rho\theta}^2 = 4k^2 \quad (2)$$

Условие несжимаемости и соотношения закона пластического течения

$$\epsilon_\rho + \epsilon_\theta = 0, \quad (\epsilon_\rho - \epsilon_\theta) \tau_{\rho\theta} - \epsilon_{\rho\theta} (\sigma_\rho - \sigma_\theta) = 0 \quad (3)$$

где

$$\epsilon_\rho = \frac{\partial u}{\partial \rho}, \quad \epsilon_\theta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{u}{\rho}, \quad \epsilon_{\rho\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{v}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right)$$

Соотношения (2) удовлетворим при помощи замены переменных М. Леви:

$$\sigma_\rho = \sigma + k \cos 2\psi, \quad \sigma_\theta = \sigma - k \cos 2\psi, \quad \tau_{\rho\theta} = k \sin 2\psi \quad (4)$$

где

$$\sigma = \frac{1}{2} (\sigma_\rho + \sigma_\theta), \quad \psi = \frac{1}{2} \arctg \frac{2\tau_{\rho\theta}}{\sigma_\rho - \sigma_\theta}$$

Подставляя выражения (4) в уравнения равновесия (1), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial \rho} - 2k \sin 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{2k \cos 2\psi}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{2k \cos 2\psi}{\rho} &= 0 \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} + 2k \cos 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{2k \sin 2\psi}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{2k \sin 2\psi}{\rho} &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Система уравнений (5) принадлежит к гиперболическому типу, уравнения ортогональных характеристик имеют вид

$$d\rho + \rho d\theta \operatorname{tg}(\psi \pm \pi/4) = 0 \quad (6)$$

Перейдем к соотношениям вдоль характеристик. Сделаем замену переменных

$$\begin{aligned} d\xi &= d\rho \cos(\psi + \pi/4) + \rho d\theta \sin(\psi + \pi/4), \\ d\eta &= d\rho \cos(\psi - \pi/4) + \rho d\theta \sin(\psi - \pi/4) \end{aligned} \quad (7)$$

Отметим, что в полярной системе координат уравнения равновесия вдоль линий скольжения (7) непосредственно не интегрируются, однако их можно записать в конечном виде [4], если использовать угол  $\theta$  между текущим радиусом и радиусом фиксированного (нулевого) направления (фиг. 3)

$$\sigma + 2k(\psi + \theta) = C_1, \quad \sigma - 2k(\psi + \theta) = C_2, \quad (C_1, C_2 = \text{const})$$

Рассмотрим соотношения для скоростей перемещений. Легко убедиться, что соотношения (3) принадлежит к гиперболическому типу, уравнения их характеристик определяются выражениями (6). Рассмотрим соотношения вдоль характеристик. Сделаем замену переменных

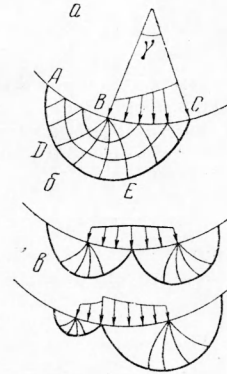
$$\begin{aligned} U &= u \cos(\psi + \pi/4) + v \sin(\psi + \pi/4) \\ V &= u \cos(\psi - \pi/4) + v \sin(\psi - \pi/4) \end{aligned} \quad (8)$$

где  $U$  и  $V$  — компоненты скорости перемещения вдоль характеристик.

Учитывая соотношения (7), (8), преобразуем выражения (3) к виду

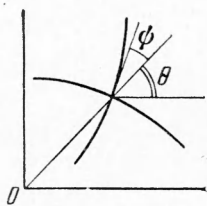
$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \xi} - V \frac{\partial \psi}{\partial \xi} - \frac{V}{\rho} \cos\left(\psi - \frac{\pi}{4}\right) &= 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \eta} + U \frac{\partial \psi}{\partial \eta} - \frac{U}{\rho} \sin\left(\psi - \frac{\pi}{4}\right) &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Соотношения (9) являются известными соотношениями Гейрингер, записанными в полярной системе координат. Используя угол  $\theta$ , аналогично можно записать соотношения (9) в их обычной форме.

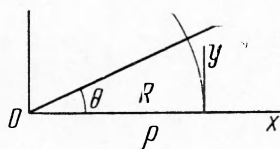


Фиг. 2

Следует отметить, что соотношения в полярных координатах включают в себя как вырожденный случай соотношения, записанные в прямоугольной декартовой системе координат. Для этого достаточно сделать замену переменных (фиг. 4)



Фиг. 3



Фиг. 4

$$\varphi = R + x, \quad R\theta = y \quad (10)$$

и перейти к пределу при  $R \rightarrow \infty$ ,  $\theta \rightarrow 0$ , так, чтобы величины  $x$  и  $y$  оставались конечными.

В дальнейшем удобно считать все величины, имеющие размерности длины безразмерными, отнесенными к радиусу контура пластической среды.

На фиг. 5 показана сетка характеристик, построенная численным интегрированием исходных соотношений (6). (8) при двух приближениях, и значение предельной нагрузки, соответствующей варианту фиг. 2, а. Очевидно, что построение начинается от свободной границы  $AB$ , причем в области  $ABD$  напряженное состояние представляется решением

$$\sigma = -2k \ln \rho - k$$

а характеристики являются логарифмическими спиралями

$$\ln \rho \pm \theta = \text{const}$$

Был взят угол раствора контура  $\gamma$  (фиг. 2, а), равный  $24^\circ 3'$ . Так как величина  $\rho$  считается безразмерной, то построение решения по существу проведено для любого радиуса окружности, ограничивающей штамп и пластическую среду. Решение показало, что предельная нагрузка возрастает по поверхности контакта  $BC$  (фиг. 2, а, 5).

Отметим что на фиг. 5 поле логарифмических спиралей опущено, проведена лишь линия, соответствующая линии  $BD$  на фиг. 2.

Следовательно, если рассмотреть решение, соответствующее решению Хилла (фиг. 2, б), то предельная нагрузка будет иметь минимальное значение. В любом другом случае (фиг. 2, в) предельное значение нагрузки будет большим.

Таким образом, следует считать установленным, что в случае, когда штамп и пластическая среда ограничены дугой окружности, решение Хилла реализует минимум предельной нагрузки. Поэтому решение Хилла для полупространства (фиг. 1, б) является предельным среди минимальных (истинных) решений при стремлении кривизны дуги окружности к нулю. Однако нельзя утверждать, что это будет иметь место в общем случае задания контура среды.

Отметим, что замена переменных (10) с указанным предельным переходом приводит к окрестности точки  $O, i$  (центра веера на фиг. 5) и дает предельное значение нагрузки, полученное Прандтлем.

Отметим, что среднее значение нагрузки (фиг. 5) равно  $p^* = -5.845 k$ . Пользуясь полученным решением, можно получить решение Хилла для углов раствора  $\gamma = 48^\circ 6'$ .

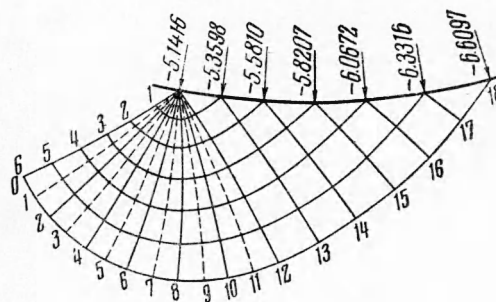
Построение поля скоростей перемещений приводит к известным задачам для линейных гиперболических уравнений; легко убедиться, что это построение может быть выполнено.

Воронежский государственный  
университет

Поступила  
20 IX 1960

#### ЛИТЕРАТУРА

1. П р а н д т л ь Л. О твердости пластических материалов и сопротивление резанию. Сб. статей «Теория пластичности», ИИЛ, М., 1948.
2. Х и л л Р. Математическая теория пластичности. Гостехтеоретиздат, 1956.
3. Г е н к и Г. О некоторых статически определимых случаях равновесия в пластических телах. Сб. статей «Теория пластичности», ИИЛ, М., 1948.
4. С о к о л о в с к и й В. В. Статика сыпучей среды. Гостехтеоретиздат, М., 1954.



Фиг. 5