Прикладная механика и техническая физика, 1996, т. 37, № 4

ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫЕ КАПЛЯ ИЛИ ВИХРЬ В НЕОДНОРОДНОМ ПОТОКЕ

УДК 532.527

Р. М. Гарипов

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Найдены все движения идеальной и несжимаемой жидкости с кусочно-постоянными плотностью и завихренностью, которые терпят разрыв на поверхности эллипсоида. Допускается тангенциальный разрыв на эллипсоиде и линейный рост на бесконечности скорости жидкости.

1. Формулировка задачи. В известном эллиптическом вихре Кирхгофа [1] скорость жидкости непрерывна, а на бесконечности жидкость покоится. В данной работе тоже предполагается, что вихрь кусочно-постоянный и поверхность разрыва вихря или плотности есть эллипсоид (эллипс). Но допускается тангенциальный разрыв скорости на эллипсоиде и линейный рост скорости на бесконечности. В такой обобщенной постановке существуют нетривиальные **пространственные** решения. В работе найдены **все** решения указанного вида. В этом классе решений содержатся, в частности, все известные обобщения вихря Кирхгофа [2–4] (все они плоские). Наше обобщение имеет физический смысл [5] и может также представить интерес в связи с моделью турбулентности М. А. Лаврентьева [6]. Плоские решения для краткости изложения не приводятся.

Рассматривается движение идеальной несжимаемой жидкости плотности ρ_0 внутри эллипсоида S и единичной плотности вне S. Пусть вихрь $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ внутри и вне S не зависит от точки пространства $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, но зависит от времени t и равен $\boldsymbol{\omega}_0$ и $\boldsymbol{\omega}_1$ соответственно. Приняты обозначения: $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_1, u_2, u_3)$ — скорость жидкости, $p(\mathbf{x}, t)$ — давление, $\nabla = (\partial/\partial x_1,\ \partial/\partial x_2,\ \partial/\partial x_3)$.

Все переменные безразмерные. В капле ($\rho_0 \neq 1$) внешние силы должны отсутствовать. В случае вихря ($\rho_0 = 1$) потенциальные массовые силы включаются в давление и никак не влияют на движение. Поэтому далее предполагается, что внешних сил нет. Начало системы координат поместим в центр эллипсоида, который по предположению движется без ускорения. Тогда поверхность S имеет уравнение $f \equiv \mathbf{x} \cdot A\mathbf{x} - 1 = 0$, где A — симметричная положительно определенная матрица. В жидкости справедливы уравнения Эйлера. На S внутри и вне должны выполняться условия непротекания

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f = 0 \qquad \text{при} \quad f = 0 \tag{1.1}$$

и должно быть непрерывно давление. Капиллярные силы не учитываем. На бесконечности $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = O(|\mathbf{x}|)$, где $|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$ — длина вектора.

2. Уравнения движения.

Теорема.

$$\mathbf{u} = \begin{cases} B_0\mathbf{x} & \text{\textit{внутри}} \quad S, \\ B_1\mathbf{x} & \text{\textit{вне}} \quad S, \end{cases}$$

где матрицы B_0, B_1 — функции t.

Доказательство не приводим.

Подставим функцию $\mathbf{u}$ в уравнение несжимаемости

$$\mathrm{sp}B_0 \equiv \sum_{i=1}^{3} B_{0ii} = 0, \qquad \mathrm{sp}B_1 = 0. \tag{2.1}$$

Подставив выражение для $\mathbf{u}$ в уравнение движения жидкости внутри S, имеем

$$\dot{B}_0 + B_0^2 = (\dot{B}_0 + B_0^2)^*, \qquad p = -\frac{\rho_0}{2}\mathbf{x}\cdot(\dot{B}_0 + B_0^2)\mathbf{x} + \frac{q_0}{2}.$$

Здесь точка и звездочка обозначают производную по времени и сопряженную матрицу; $q_0(t)$ — произвольная функция. Аналогичные уравнения получаются вне S с произвольной функцией $q(t)$. Так как давление определено с точностью до прибавления произвольной функции времени, то можно положить $q_0 = 0$. Далее предельные значения $\mathbf{u}$ на S внутри и вне эллипсоида подставим в условия непротекания (1.1) и в условие непрерывности давления на S. Полученную систему уравнений преобразуем к виду

$$\begin{aligned} &\rho_0(\dot{B}_0 + B_0^2) - \dot{B}_1 - B_1^2 + qA = 0, \qquad \dot{B}_0 + B_0^2 - (\dot{B}_0 + B_0^2)^* = 0,\\ &\dot{A} + AB_0 + B_0^*A = 0, \qquad (B_0 - B_1)A^{-1} + A^{-1}(B_0 - B_1)^* = 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

где $q = \mathrm{sp}(-\rho_0 B_0^2 + B_1^2)/\mathrm{sp}A$. Левые части первого и последнего (после умножения на A) уравнения имеют нулевые следы в силу (2.1). Поэтому система (2.2) содержит 22 независимых уравнения на 22 неизвестных A, B_0, B_1 на многообразии (2.1).

При $\rho_0 = 1$ задача имеет тривиальное решение $B_0 = B_1$. Эллипсоид S будет жидкой поверхностью. При $\rho_0 \neq 1$, $B_0 = B_1$ система (2.2) совпадает по форме с уравнениями движения отдельного жидкого эллипсоида [7–10] и имеет интегралы энергии, момента импульса и циркуляции. Ниже рассматривается только случай $B_0 \neq B_1$. При этом имеются аналоги указанных интегралов.

Последнее уравнение (2.2) означает, что матрица $F = (B_0 - B_1)A^{-1}$ антисимметрична. Введем F в качестве искомой функции и исключим матрицу $B_1 = B_0 - FA$ из первого уравнения. Полученное уравнение умножим справа на A^{-1} и исключим $\dot{A}$:

$$(\rho_0 - 1)(\dot{B}_0 + B_0^2)A^{-1} + \dot{F} + B_0F - FB_0^* - FAF + qI = 0$$

(I — единичная матрица). Отделим симметричную и антисимметричную части, учитывая второе уравнение (2.2). Если $\rho_0 = 1$, то

$$\dot{F} = 0; \tag{2.3}$$

$$G \equiv B_0F - FB_0^* - FAF + qI = 0. \tag{2.4}$$

Если $\rho_0 \neq 1$, то симметричная часть однозначно разрешается относительно $\dot{B}_0 + B_0^2$:

$$\frac{1}{2}(\rho_0 - 1)(\dot{B}_0 + B_0^2) = H(A, G)$$

(H — матричная функция указанных аргументов). Это утверждение очевидно в системе координат, в которой матрица A диагональна. Система (2.2) приводится к нормальной форме порядка 17 на многообразии $\mathrm{sp}B_0 = 0$:

$$\dot{F} + HA^{-1} - A^{-1}H = 0, \qquad \dot{B}_0 + B_0^2 = \frac{2}{\rho_0 - 1}H, \qquad \dot{A} + AB_0 + B_0^*A = 0.$$

3. Частное решение — твердо вращающийся эллипсоид. Система (2.2) имеет решение, описывающее твердое вращение эллипсоида S с внутренней жидкостью вокруг оси x_3 с постоянной угловой скоростью ω_0. Выпишем решение во вращающейся вместе с эллипсоидом системе координат.

При $\rho_0 = 1$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{11} & A_{23} \\ 0 & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Относительная скорость жидкости $\mathbf{u} = (2\omega_0/A_{11})(A_{11}x_2 + A_{23}x_3,\ -A_{11}x_1,\ 0)$ вне S (внутри S она равна нулю). В этой системе координат течение установившееся.

При $\rho_0 \neq 1$ есть осесимметричное решение. Неосесимметричное решение существует только при $\rho_0 < 1$ и имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} \\ 0 & A_{22} & 0 \\ A_{31} & 0 & A_{33} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u} = f_1(0,\ A_{13}x_1 + A_{33}x_3,\ -A_{22}x_2) \quad \text{вне} \quad S,$$

где $A_{22} > 0,\ A_{33} > 0,\ A_{22} > A_{33}$ произвольны;

$$A_{11} = (A_{22} - A_{33})(1 + \frac{4}{1 - \rho_0} A_{33}/A_{22});$$

$$A_{13} = \pm 2A_{33}\sqrt{\frac{A_{22} - A_{33}}{(1 - \rho_0)A_{22}}}; \qquad f_1 = \pm\omega_0\sqrt{\frac{1 - \rho_0}{A_{22}(A_{22} - A_{33})}}.$$

4. Интегралы движения. Система (2.2) имеет следующие интегралы:

$$J_1 = \det A, \quad J_2 = \mathrm{sp}((\rho_0 B_0^* B_0 - B_1^* B_1)A^{-1}), \quad J_3 = (\rho_0 B_0 - B_1)A^{-1} - A^{-1}(\rho_0 B_0^* - B_1^*),$$
$$J_4 = \mathrm{sp}(((B_0^* - B_0)A^{-1})^2), \quad J_5 = \mathrm{sp}(((B_1^* - B_1)A^{-1})^2).$$

5. Решение уравнений движения вихря. В случае $\rho_0 = 1$ система (2.2) интегрируется в элементарных функциях. Антисимметричная матрица F является интегралом (2.3). При $F = 0$ решение тривиально: $B_0 = B_1$. Поэтому далее предположим, что $F \neq 0$. Так как система (2.2) инвариантна относительно ортогональных преобразований системы координат, то ось x_3 направим так, чтобы матрица F имела вид

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -2f & 0 \\ 2f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f \neq 0$$

(не путать с $f = \mathbf{x} \cdot A\mathbf{x} - 1$). Обозначив

$$B = B_0 - \frac{1}{2}FA = \frac{1}{2}(B_0 + B_1),$$

запишем уравнение (2.4) так: $BF - FB^* + qI = 0$. Расписав его по элементам, получим

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 & B_{13} \\ 0 & B_{11} & B_{23} \\ 0 & 0 & B_{33} \end{pmatrix}, \quad q = 0. \tag{5.1}$$

Подставив $B_0 = B + (1/2)FA$, $B_1 = B - (1/2)FA$ в выражение для q, имеем $q = 0$. Значит, второе уравнение (5.1) есть следствие первого. Подставив $B_0 = B + (1/2)FA$ во второе и третье уравнения (2.2) и учитывая равенства $BF = FB^*$, $\mathrm{sp}B = 0$, получим систему уравнений в нормальной форме порядка 8 на искомые функции B_{13}, B_{23}, A:

$$\dot{B} - \dot{B}^* + B^2 - B^{2*} + \frac{1}{4}(FA)^2 - \frac{1}{4}(FA)^{2*} = 0, \quad \dot{A} + AB + B^*A = 0. \tag{5.2}$$

Эта система содержит произвольную функцию $B_{11}(t)$.

Перейдем в систему координат, вращающуюся вокруг оси x_3. Это означает замену переменных в уравнениях (5.2):

$$B \to B' = UBU^*, \qquad \dot{B} \to U\dot{B}U^* = \dot{B}' + PB' - B'P.$$

Здесь

$$U = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad P = U\dot{U}^* = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\vartheta} & 0 \\ \dot{\vartheta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично преобразуется матрица A. Матрица F не изменяется, так как коммутирует с U. Матрицу U выберем так, чтобы $B'_{23} = 0$. Уравнения для B' примут вид

$$\dot{B}'_{13} - B'_{11}B'_{13} + f^2\Delta'_{31} = 0, \qquad \dot{\vartheta}B'_{13} + f^2\Delta'_{32} = 0,$$

где Δ'_{ij} — алгебраическое дополнение элемента A'_{ij} матрицы A'. Так как система не содержит переменную ϑ, то ее порядок понижается до 7. Напомним, что ϑ — угол между осью x'_1 и неподвижной осью абсцисс. Замечательно, что подходящей заменой переменных можно удалить произвольную функцию $B'_{11}(t)$. Эта замена эквивалентна следующему преобразованию координат, времени и B'_{13}:

$$x'_i \to h^{-1}x'_i \ \ (i = 1, 2), \quad x'_3 \to h^2 x'_3, \quad t \to \int h^{-2}dt, \quad B'_{13} \to h^{-1}B'_{13} \quad \Big(h = \exp\Big(\int_0^t B'_{11}(\tau)d\tau\Big)\Big).$$

Поэтому дальше достаточно рассмотреть случай $B'_{11} = 0$. Запишем полученную систему уравнений в переменных Δ'_{ij} (штрихи опустим):

$$\begin{gathered} 2\dot{\omega} + f^2\Delta_{31} = 0, \quad 2\omega\dot{\vartheta} + f^2\Delta_{32} = 0, \quad \dot{\Delta}_{11} = 2\dot{\vartheta}\Delta_{21} + 4\omega\Delta_{31}, \\ \dot{\Delta}_{21} = \dot{\vartheta}(-\Delta_{11} + \Delta_{22}) + 2\omega\Delta_{32}, \quad \dot{\Delta}_{22} = -2\dot{\vartheta}\Delta_{21}, \\ \dot{\Delta}_{31} = \dot{\vartheta}\Delta_{32} + 2\omega\Delta_{33}, \quad \dot{\Delta}_{32} = -\dot{\vartheta}\Delta_{31}, \quad \dot{\Delta}_{33} = 0. \end{gathered} \tag{5.3}$$

Здесь $\omega = (1/2)B_{13}$. Поясним, что уравнение для A (5.2) во вращающейся системе координат надо умножить слева и справа на A^{-1} и воспользоваться правилом дифференцирования обратной матрицы: $d(A^{-1})/dt = -A^{-1}\dot{A}A^{-1}$. Затем учесть, что $\Delta_{ij} = (A^{-1})_{ji}\Delta$ и что $\Delta = \det A$ является интегралом движения. Переменные Δ_{ij} имеют наглядный геометрический смысл. Точка касания эллипсоида с плоскостью $x_k = \mathrm{const}$ имеет координаты $(\Delta\Delta_{kk})^{-1/2}$ $(\Delta_{k1}, \Delta_{k2}, \Delta_{k3})$. Проекция эллипсоида на плоскость $x_3 = 0$ ограничена эллипсом $\Delta_{22}x_1^2 + \Delta_{11}x_2^2 - 2\Delta_{21}x_1x_2 = (\Delta_{11}\Delta_{22} - \Delta_{21}^2)/\Delta$.

Система уравнений (5.3) имеет следующие интегралы:

$$\begin{gathered} \gamma_1 = (\Delta_{11} + \Delta_{22})\Delta_{33} - \Delta_{31}^2 - \Delta_{32}^2, \quad \gamma_2 = \Delta_{33}, \quad \gamma_3 = \Delta_{11} + \Delta_{22} + 4f^{-2}\omega^2, \\ \gamma_4 = \omega\Delta_{32}, \quad \gamma_5 = 4f^{-2}\omega^2\Delta_{22} + \Delta_{11}\Delta_{22} - \Delta_{21}^2, \\ \Delta^2 = (\Delta_{11}\Delta_{22} - \Delta_{21}^2)\Delta_{33} + 2\Delta_{21}\Delta_{31}\Delta_{32} - \Delta_{11}\Delta_{32}^2 - \Delta_{22}\Delta_{31}^2. \end{gathered} \tag{5.4}$$

Из интегралов γ_1 и γ_2 вытекает, что сечение эллипсоида плоскостью $x_3 = 0$ сохраняет свою форму, и эллипсоид все время касается неподвижной плоскости $x_3 = \sqrt{\Delta_{33}/\Delta}$.

Из интегралов (5.4) все переменные легко выражаются через ω. Функция ω находится квадратурой:

$$-f^2 t = \int \frac{d\omega^2}{\sqrt{\gamma_1'\omega^2 - 4f^{-2}\Delta_{33}\omega^4 - \gamma_4^2}} \quad (\gamma_1' = \gamma_3\Delta_{33} - \gamma_1 > 0).$$

Эта статья не была бы написана без помощи О. М. Лаврентьевой, за что автор искренне ее благодарит.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Kirchhoff G.** Vorlesungen über mathematische Physik, Mechanic. Leipzig, 1874. Рус. пер. Кирхгоф Г. Лекции по математической физике // Механика. М.: Изд-во АН СССР, 1962.
2. **Чаплыгин С. А.** О пульсирующем цилиндрическом вихре. Собр. соч. Т. 2. М.; Л.: ОГИЗ; ГИТТЛ, 1948. С. 138–154.
3. **Kida S. J.** Motion of an elliptic vortex in a uniform shear flow // Phys. Soc. Japan. 1981. V. 50, N 10. P. 3517–3520.
4. **Абрашкин А. А., Якубович Е. И.** О нестационарных вихревых течениях идеальной несжимаемой жидкости // ПМТФ. 1985. № 2. С. 57–64.
5. **Петров А. Г.** Функция Лагранжа для вихревых течений и динамика деформированных капель // ПММ. 1977. Т. 41, № 1. С. 79–94.
6. **Гарипов Р. М.** Модель турбулентности М. А. Лаврентьева // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1984. Вып. 68. С. 44–73.
7. **Dirichlet P. G.** Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik. Abhandl. der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1860. Bd 8, N 3.
8. **Riemann B.** Beitrag zu den Untersuchungen über die Bewegung eines flüssigen gleichartigen Ellipsoides. Gött. Abh., 1860. Bd 9, N 3. Рус. пер. Риман Б. М.; Л.: ОГИЗ; ГИТТЛ, 1948. С. 339–366.
9. **Овсянников Л. В.** Задача о неустановившемся движении жидкости со свободной границей: общие уравнения и примеры. Новосибирск: Наука, 1967.
10. **Лаврентьева О. М.** О движении жидкого эллипсоида // Докл. АН СССР. 1980. Т. 253, № 4. С. 828–831.

Поступила в редакцию 5/VI 1995 г.